Голоморфно-проективні перетворення локально конформно-келерових многовидів у симетричній F-зв'язності.

Є. В. Черевко
(Одеська національна академія харчових технологій, вул. Канатна, б. 112, м.Одеса, 65039, Україна)
E-mail: cherevko@usa.com

В. Є. Березовський
(Уманський национальний університет садівництва, вул. Інститутська, б. 1, м.Умань, Черкаськая обл., 20305, Україна)
E-mail: berez.volod@gmail.com

Й. Мікеш
(Університет Палацького в Оломоуце, вул. 17 Листопада, б. 12, м. Оломоуц, 77147, Чеська республіка)
E-mail: josef.mikes@upol.cz

Означення 1. Ермітовий многовид M_n, має назву *локально конформно-келерового* (коротше, ЛКК-) *многовидом*, якщо існує відкрите покриття $\mathfrak{U} = \left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ многовиду M та система

$$\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$$

гладких функцій таких, що $\left\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\right\}$ – келерова структура для будь якого $\alpha \in A$. Перехід від метрики $g|_{U_\alpha}$ до метрики $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ має назву *локально конформного перетворення структури*. Функція σ має назву *визначальною функцією* конформного перетворення[2].

На ЛКК-многовиді глобально визначено форма Лі(Lee):

$$\omega = \frac{2}{n-2}\delta\Omega \circ J$$

Відомо, що ЛКК-многовиди не допускають голоморфно-проективних передворень для зв'язності Леві-Чівіта [3]. Але можна на такому многовиді задати симетричну F-зв'язність, тобто таку, в якій комплексна структура є коваріантно сталою:

$$\overline{\nabla}_X J = 0.$$

Це не тільки відома зв'язність Вейля. Наприклад, симетричну F-зв'язність, можна побудувати іншим чином. Нехай шукана F-зв'язність задана формулою:

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + P^k_{ij},$$

де P^k_{ij} – тензор афіної деформації, а символом Γ^k_{ij} позначено компоненти зв'язності Леві-Чівіта, узгодженої з ЛКК-метрикою g_{ij}. Тензор афіної деформації для F-зв'язності будь-якого ермітового многовиду можна задати так [1]:

$$P^k_{ij} = -\frac{1}{4}(\nabla_j J^u_i + \nabla_i J^u_j)J^k_u + \frac{1}{4}(\nabla_j J^k_u - \nabla_u J^k_j)J^u_i. \tag{1}$$

Символом ∇ позначено коваріантну похідну у зв'язності Леві-Чівіта, узгодженої з ЛКК-метрикою. Враховуючи, що на ЛКК-многовиді

$$\nabla_j J^k_i = \frac{1}{2}\left(\delta^k_j J^t_i \omega_t - \omega^h J_{ij} - J^k_j \omega_i + J^k_t \omega^t g_{ij}\right),$$

з (1) отримуємо:

$$P^k_{ij}=-\frac{1}{4}\big(\delta^k_j\omega_i+\delta^k_j\omega_j+J^k_jJ^t_i\omega_t+J^k_iJ^t_j\omega_t-2\omega^kg_{ij}\big).$$

Нехай голоморфно-проективних перетворяння породжуються майже аналітичним векторним полем ξ, тобто таким, для якого виконується

$$\mathfrak{L}_\xi J^h_i=0.$$

Тоді похідна Лі об'єкту зв'язності Леві-Чівіта при голоморфно-проективних перетворяннях тоді матиме вигляд:

$$\mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{ij}=\frac{1}{4}\big(\delta^h_j\nabla_i\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)+\delta^h_i\nabla_j\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)+J^h_jJ^t_i\nabla_t\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)+J^h_iJ^t_j\nabla_t\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)$$
$$-g^{hr}\nabla_r\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)g_{ij}-\omega^h\mathfrak{L}_\xi g_{ij}+g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{\beta\alpha})g_{ij}\big)+\rho_j\delta^h_i+\rho_i\delta^h_j-\rho_tJ^t_iJ^h_j-\rho_tJ^t_jJ^h_i.$$

Доведено, що об'єкт

$$\Pi^h_{ij}=\Gamma^h_{ij}+\frac{1}{2}\omega^hg_{ij}-\frac{1}{n+2}\big(\big(\Gamma^s_{js}+\omega_j\big)\delta^h_i+\big(\Gamma^s_{is}+\omega_i\big)\delta^h_j$$
$$+\big(\Gamma^s_{ts}-\frac{n}{2}\omega_t\big)J^t_iJ^h_j+\big(\Gamma^s_{ts}-\frac{n}{2}\omega_t\big)J^t_jJ^h_i\big)$$

є інваріантним при цих перетвореннях. Цікавим є те, що такий самий об'єкт буде інваріантним, якщо скористатися для голоморфно-проективних перетворень зв'язністю Вейля [4].

Література

[1] *K. Yano*, Differential geometry on complex and almost complex spaces. New York: Pergamon Press Book –New York: 326p. 1965.

[2] *В. Ф. Кириченко* Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия. *Матем. сб.*, Т. 51(5), 57—66 1992.

[3] *Zh. Radulovich, J. Mikeš* Geodesic and holomorphically-projective mappings of conformally-Kählerian spaces. Opava: Silesian Univ. Math. Publ. 1 (1993) pp. 151-156.

[4] *Є. В. Черевко* Інваріантні об'єкти конформно голоморфно-проективних перетворень ЛКК-многовидів. Proc. Inter. Geom. Center, v.10, № 3-4, 2017 с.29-43.