Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять добуток різного типу нелінійностей у правій частині

Чепок Ольга Олегівна
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна)
E-mail: olachepok@ukr.net

Розглядається диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}, p\colon [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$, $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ $(i \in \{0,1\})$ – неперервні функції, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} – однобічний окіл Y_i.

Вважаємо також, що функція φ_1 є правильно змінною (див. [1], розділ 1.4, стор. 17) при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1, а функція φ_0 двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_0} та така, що

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0,\\ \text{або} & +\infty,\end{cases} \qquad \lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(z)\varphi_0''(z)}{\left(\varphi_0'(z)\right)^2} = 1. \tag{2}$$

В силу умов (2) функція φ_0 та її похідна першого порядку є [1] швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_0. Таким чином, досліжуване диференціальне рівняння містить у правій частині добуток швидко та правильно змінних функцій.

Диференціальне рівняння (1) досліджується щодо умов існування у нього $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків, а також асимптотичних зображень таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язком, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = 0.$$

Основні результати доводяться у припущенні існування для $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків скінченної чи нескінченної границі $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$ та викладені у [2]. За апріорними властивостями таких розв'язків маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1, \tag{3}$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty,\\ t-\omega, & \text{якщо } \omega < +\infty.\end{cases}.$$

Наразі уточнена кількість таких $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків рівняння (1). Було отримано, що у випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)I_2'(t)}{I_2(t)} = c \in R$,

(1) при $c(1-\sigma_1) > 0$ рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків,
(2) при $c(1-\sigma_1) < 0$ та $\beta(1-\sigma_1) < 0$ рівняння (1) має двопараметричну сім'ю таких розв'язків,
(3) при $c(1-\sigma_1) < 0$ та $\beta(1-\sigma_1) > 0$ — має принаймні один такий розв'язок, де

$$I_2(t) = \operatorname{sign}(y_1^0) \cdot \int_{B_\omega^2}^{t} \left| \pi_\omega(\tau)p(\tau)\theta_1\left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(\tau)|}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau \text{ при } t \in [b;\omega[\subset [t_0,\omega[.$$

У випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_2'(t)}{I_2(t)}=\pm\infty$, рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0,Y_1,0)$-розв'язків.

Література

[1] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L., *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*, Cambridge university press,Cambridge, 1987.

[2] Чепок О. О. *Асимптотичні зображення повільно змінних розв'язків двочленних диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями різних типів* // Буковинський математичний журнал. – 2016. – **4**, №3-4. – С. 190-196.