Группы Ли инфинитезимальных конформных преобразований второй степени в симметрическом римановом пространстве первого класса

И. И. Белокобыльский
(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: indalamar4200@gmail.com

С. М. Покась
(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: pokas@onu.edu.ua

П. А. Широковым в [1] были найдены все неприводимые симметрические римановы пространства $V_n(x; g(x))$ первого класса. Метрический тензор $g_{ij}(x)$ таких пространств в римановой системе координат с началом в точке $M_0(x^h = 0)$ имеет следующий вид:

$$g_{ij}(x) = \underset{o}{g_{ij}} + \frac{1}{3}(\underset{o}{h_{i\alpha}}\underset{o}{h_{j\beta}} - \underset{o}{h_{ij}}\underset{o}{h_{\alpha\beta}})x^\alpha x^\beta, \tag{1}$$

$$(\underset{o}{g_{ij}}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{E} \\ \hline \mathrm{E} & 0 \end{array}\right), (\underset{o}{h_{ij}}) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} e_1 & \\ & e_n \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

где E – единичная матрица а, $e_i = \pm 1, i = 1, ..., n$

Для произвольного риманова пространства $V_n(x; g(x))$ С. М. Покась [2] ввел понятие пространства второго приближения $\tilde{V}_n^2(y; \tilde{g}(y))$:

$$\tilde{g}_{ij}(y) = \underset{o}{g_{ij}} + \frac{1}{3}\underset{o}{R}_{i\alpha\beta j} y^\alpha y^\beta, \tag{2}$$

$$\underset{o}{g_{ij}} = g_{ij}(M_0), \underset{o}{R}_{i\alpha\beta j} = R_{i\alpha\beta j}(M_0), M_0 \in V_n.$$

Сравнение (1) и (2) показывает, что риманово пространство второго приближения $\tilde{V}_n^2$ для симметрического риманова пространства первого класса изометрично исходному пространству V_n. Поэтому группа Ли инфинитезимальных преобразований $\tilde{G}_r$ пространства $\tilde{V}_n^2$ изоморфна группе Ли инфинитезимальных преобразований G_r симметрического риманова пространства первого класса V_n.

Изучение инфинитезимальных конформных преобразований в пространстве $\tilde{V}_n^2$ сводится к исследованию обобщенных уравнений Киллинга [4]

$$\tilde{\xi}_{(i,j)} = \psi(y)\tilde{g}_{ij}$$

Здесь был получени следующий результат [3].

Теорема 1. *В пространстве второго приближения $\tilde{V}_n^2$ для риманова пространства V_n ненулевой скалярной кривизны в точке M_0 существуют инфинитезимальные конформные преобразования с вектором смещения вида*

$$\tilde{\xi}^h = a^h + a^h_{.l} y^l + a^h_{.l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2}, \tag{3}$$

$$(a^h, a^h_{.l}, a^h_{.l_1 l_2} - const)$$

отличные от движений, тогда и только тогда, когда константы $a^h_{\cdot}$ *и* $a^h_{\cdot l}$ *удовлетворяют алгебраическим уравнениям*

$$a^{\alpha}_{\cdot i}\underset{o}{g}_{j}\alpha = 0 \tag{4}$$

$$a^{\alpha}_{\cdot(i}\underset{o}{R}_{j)(l_1l_2)\alpha} + a^{\alpha}_{\cdot(l_1}\underset{o}{R}_{l_2)(ij)\alpha} = 0 \tag{5}$$

$$\underset{l_1l_2l_3}{C}\left[a^{\alpha}_{\cdot}\underset{o}{R}_{\alpha(l_1l_2)\beta}\underset{o}{R}_{\cdot(ij)l_3} - \frac{3}{2}\left(b_{\alpha}\underset{o}{R}^{\alpha}_{\cdot(ij)l_1}\underset{o}{g}_{l_2l_3} - b_{l_1}\underset{o}{R}_{i(l_2l_3)j}\right)\right] = 0 \tag{6}$$

где $\underset{l_1l_2l_3}{C}$ *- означает циклирование по индексам* $l_1l_2l_3$*,*

$$a^h_{l_1l_2}y^l_1y^l_2 = a^{\alpha}_{\cdot}\frac{1}{3}\underset{o}{R}^h{}_{.l_1l_2\alpha}y^{l_1}y^{l_2} + \frac{1}{2}\left(\underset{1}{b}y^h - \frac{1}{2}b^h\underset{o}{g}_{l_1l_2}y^{l_1}y^{l_2}\right) \tag{7}$$

$$\psi(y) = b_l y^l \tag{8}$$

Так как скалярная кривизна симметрического риманова пространства равна нулю, то аналогично Теореме 1 доказано утверждение.

Теорема 2. *В симметрическом римановом пространстве первого класса* V_n *существуют инфинитезимальные конформные преобразования с вектором смещения вида (3) тогда и только тогда, когда константы* $a^h_{\cdot}$ *и* $a^h_{\cdot l}$ *удовлетворяют алгебраическим уравнениям*

$$a^{\alpha}_{\cdot i}\underset{o}{g}_{j}\alpha = b\underset{o}{g}_{ij} \tag{9}$$

$$a_{\alpha\beta}\underset{o}{R}^{\alpha}{}_{.(ij).}{}^{\beta} = 0 \tag{10}$$

$$a^{\alpha}_{\cdot(i}\underset{o}{R}_{j)(l_1l_2)\alpha} + a^{\alpha}_{\cdot(l_1}\underset{o}{R}_{l_2)(ij)\alpha} = 0 \tag{11}$$

$$\psi(y) = b + b_l y^l \tag{12}$$

Исследуя уравнения (9)-(11) при условии (1) приходим к такой теореме:

Теорема 3. *Инфинитезимальные конформные преобразования с вектором смещения вида (3) в симметрическом римановом пространстве первого класса по необходимости являются инфинитезимальными гомотетическими преобразованиями.*

Для $n = 4$ доказана

Теорема 4. *Симметрическое риманово пространство* V_4 *1-го класса допускает группу Ли гомотетических инфинитезимальных преобразований* G_{12}*.*

Найден базис этой группы и её структура.

Литература

[1] П. А. Широков. Избранные работы по геометрии. Казань, 1966.

[2] С. М. Покась. Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения, Известия Пензенского государственного педагогического университета им. Белинского №26, 2011, 173-183 с 1978.

[3] С. М. Покась. Бесконечно малые конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения, Vol. 7 of Proc. of the Intern. Geom. Center, №2, 2014, 36-50 p.

[4] Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М, ИЛ, 1947.