International
Scientific Conference

Algebraic and Geometric Methods of Analysis

26-30 may 2020
Odesa, Ukraine

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences

Organizers

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- International Geometry Center
- Kyiv Mathematical Society

Program Committee

Chairman: Prishlyak A.
(*Kyiv, Ukraine*)
Balan V.
(*Bucharest, Romania*)
Banakh T.
(*Lviv, Ukraine*)
Bolotov D.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Borysenko O.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Cherevko Ye.
(*Odesa, Ukraine*)
Fedchenko Yu.
(*Odesa, Ukraine*)
Karlova O.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Kiosak V.
(*Odessa, Ukraine*)
Kirillov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N.
(*Odesa, Ukraine*)
Lyubashenko V.
(*Kyiv, Ukraine*)
Maksymenko S.
(*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K.
(*Yamagata, Japan*)
Mormul P.
(*Warsaw, Poland*)
Mykhailyuik V.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Plachta L.
(*Krakov, Poland*)
Pokas S.
(*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E.
(*Kyiv, Ukraine*)
Sabitov I.
(*Moscow, Russia*)
Savchenko A.
(*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A.
(*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A.
(*Tver, Russia*)
Volkov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M.
(*Lviv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Kotlik S., Director of the P.M. Platonov Educational-scientific institute of computer systems and technologies “Industry 4.0”;
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

Organizing commitee

Kirillov V.
Konovenko N.
Fedchenko Yu.
Maksymenko S.
Cherevko Ye.
Osadchuk E.
Prus A.

On the geometry of submersions

G. M. Abdishukurova
(National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: Abdishukurova93@yandex.ru

A. Ya. Narmanov
(National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: narmanov@yandex.ru

Let M be a smooth connected Riemannian manifold of dimension n with Riemannian metric g.

Definition 1. Differentiable mapping $\pi : M \to B$ of maximal rank, where B is a smooth Riemannian manifold of dimension m, called submersion for $n > m$.

Submersion of $\pi : M \to B$ generates a foliation F of dimension $k = n-m$ on the manifold M, whose leaves are the submanifolds $L_p = \pi^{-1}(p), p \in B$. For a point $q \in L_p$ we denote by T_qF the tangent space of the leaf L_p at the point q, by $H(q)$ the orthogonal complement of the tangent space T_qF of the leaf L_p, i.e. $T_qM = T_qF \oplus H(q)$. We have two distributions $TF : q \to T_qF$, $H : q \to H(q)$. Each vector field X can be represented as $X = X^v + X^h$, where X^v, X^h are the orthogonal projections of X onto TF, H respectively. Here, for convenience, TF, H are considered as subbundles of the tangent bundle TM. If $X^h = 0$, then X is called a vertical field (it is tangent to the foliation), and if $X^v = 0$, then X is called a horizontal field.

Definition 2. A diffeomorphism $\varphi : M \to M$ is called a diffeomorphism of the foliated manifold (M, F), if the image $\varphi(L_\alpha)$ of each leaf L_α is a leaf of the foliation F.

The diffeomorphism $\varphi : M \to M$ of the foliated manifold (M, F), is denoted by $\varphi : (M, F) \to (M, F)$. The set of all diffeomorphisms of a foliated manifold is denoted by $Diff_F(M)$. The set $Diff_F(M)$ is a group with respect to the superposition of mappings and is a subgroup of the group $Diff(M)$ of diffeomorphisms of the manifold M. The group $Diff_F(M)$ was studied in [2], in particular, it was proved that this group is a closed subgroup of the group $Diff(M)$ with respect to a compactly open topology.

Definition 3. A diffeomorphism $\varphi : (M, F) \to (M, F)$ is called an isometry of the foliated manifold (M, F), if the restriction of the mapping φ to each leaf of the foliation F is an isometry, that is, for each leaf L_α the map $\varphi : L_\alpha \to f(L_\alpha)$ is an isometry between the manifolds L_α and $\varphi(L_\alpha)$.

Denote by $G_F(M)$ the set of isometries of the foliated manifold (M, F). The group $G_F(M)$ is subgroup of $Diff(M)$ and therefore it is topological group in compact open topology.

Let us consider submersion $\pi : R^{n+1} \to R^1$, where

$$\pi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{1}$$

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ is a differentiable function.

Theorem 4. *Diffeomorphism $\varphi : R^{n+1} \to R^{n+1}$, defined by formula*

$$\varphi_\lambda(x_1, x_2, \cdots x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1} + \lambda\pi) \tag{2}$$

at $\lambda \neq -1$ is an isometry of foliation, generated by submersion (1).

Theorem 5. *The set of diffeomorphisms*

$$G_\Lambda = \{\varphi_\lambda : \lambda \in R^1, \lambda \neq -1\}, \tag{3}$$

is a subgroup of the group $G_F(M)$.

Using the mapping $\varphi_\lambda \to \lambda$ we identify the set G_Λ with the set $R^1 \setminus \{-1\}$ of real numbers other than -1. On the set $R^1 \setminus \{-1\}$ we define the multiplication as follows

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \to \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2, \tag{4}$$

The inverse element is determined by the formula

$$\lambda \to -\frac{\lambda}{1+\lambda} \tag{5}$$

and it is obvious that they are differentiable. Therefore, we have following.

Proposition 6. *The set G_Λ is a one-dimensional Lie group.*

Example 7. Consider the submersion $\pi : R^3 \to R^1$, where $\pi(x_1, x_2, x_3) = x_3 - f(x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. This submersion generates a two-dimensional foliation F. The following vector fields

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, V_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

are vertical vector fields. Vector field

$$X = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$$

is a foliated vector field for the foliation F, as shown by the following equalities $[V_1, X] = V_2, [V_2, X] = -V_1$. It is known that the flow of foliated vector field consists of diffeomorphisms of foliated manifold (M, F) [1]. The vector field X is a Killing vector field.Therefore, the flow of a vector field X consists of isometries of a foliated manifold. Indeed, the flow of the vector field X consists of diffeomorphisms

$$x \to A(t)x + bt$$

where $t \in R$, $b = \{0, 0, 1\}^T$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

which are isometries of the foliated manifold (F, R^3).

Theorem 8. *Suppose for a vector field*

$$V = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

holds equaality $V(f) = 0$. Then the flow of the vector field

$$X = V + \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

consists of diffeomorphisms of the foliated manifold (F, R^{n+1}) generated by submersion (1). If the field V is a Killing field, then the flow of the vector field X consists of isometries of the foliated manifold (F, R^{n+1}).

References

[1] Molino P. Riemannian foliations. Boston–Basel: Burkhauser, 1988.

[2] Narmanov A.Y., Zoyidov A.N. On the group of diffeomorphisms of foliated manifolds. Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 49–58.

Hyperbolic 4-cobordisms, Teichmuller spaces and quasiregular mappings in space

Boris N. Apanasov
(Univ of Oklahoma, Math Dept, Norman, OK 73019, USA)
E-mail: apanasov@ou.edu

We present a new effect in the theory of deformations of hyperbolic 3-manifolds/orbifolds or their uniform hyperbolic lattices $\Gamma \subset \mathrm{Isom}\, H^3$ (i.e. in the Teichmüller spaces of conformally flat structures on closed hyperbolic 3-manifolds, cf. [1, 2]). We show that such Teichmüller space or the corresponding variety of conjugacy classes of discrete representations $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}\, H^4$ may have connected components whose dimensions differ by arbitrary large numbers, cf. [3, 5]. This is based on our "Siamese twins construction" of non-faithful discrete representations of hyperbolic lattices related to non-trivial "symmetric hyperbolic 4-cobordisms" [8] and Gromov-Piatetski-Shapiro interbreeding construction [11]. There are several applications of this result, from new non-trivial hyperbolic homology 4-cobordisms (cf. [9]) and wild 2-knots in the 4-sphere (cf. [5]), to bounded quasiregular locally homeomorphic mappings in 3-space, especially to their asymptotics in the unit 3-ball and to quasisymmetric embeddings of a closed ball inextensible in neighborhoods of any boundary points (cf. [10, 12, 13, 14, 15]).

The last part is based on our construction of a new type of bounded locally homeomorphic quasiregular mappings in 3-sphere (and in the unit 3-ball), see [6]. It addresses long standing problems for such mappings, including M. A. Lavrentiev problem, Pierre Fatou problem and Matti Vuorinen injectivity and asymptotics problems (cf. [7]). The construction of such mappings comes from our construction of non-trivial compact 4-dimensional cobordisms M with symmetric boundary components and whose interiors have complete 4-dimensional real hyperbolic structures (cf. [4]). Such bounded locally homeomorphic quasiregular mappings are defined in the unit 3-ball $B^3 \subset \mathbb{R}^3$ as mappings equivariant with the standard conformal action of uniform hyperbolic lattices $\Gamma \subset \mathrm{Isom}\, H^3$ in the unit 3-ball and with its discrete representation $G = \rho(\Gamma) \subset \mathrm{Isom}\, H^4$ (cf. [6]). Here G is the fundamental group of our non-trivial hyperbolic 4-cobordism $M = (H^4 \cup \Omega(G))/G$ and the kernel of the homomorphism $\rho : \Gamma \to G$ is a free group F_m on arbitrary large number m generators.

References

[1] Boris Apanasov, *Nontriviality of Teichmüller space for Kleinian group in space.* - In: Riemann Surfaces and Related Topics, Proc. 1978 Stony Brook Conference (I.Kra and B.Maskit, eds), Ann. of Math. Studies **97**, Princeton Univ. Press, 1981, 21–31.

[2] Boris Apanasov, *Conformal geometry of discrete groups and manifolds*, De Gruyter Exp. Math. **32**, W. de Gruyter, Berlin - New York, 2000.

[3] Boris Apanasov, *Nonstandard uniformized conformal structures on hyperbolic manifolds*, Invent. Math. **105**, 1991, 137–152.

[4] Boris Apanasov, *Hyperbolic 4-cobordisms and group homomorphisms with infinite kernel*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia **57**, 2010, 31–44.

[5] Boris Apanasov, *Group Actions, Teichmüller Spaces and Cobordisms*, Lobachevskii J. Math., **38**, 2017, 213-228.

[6] Boris Apanasov, *Topological barriers for locally homeomorphic quasiregular mappings in 3-space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **43**, 2018, 579–596.

[7] Boris Apanasov, *Hyperbolic topology and bounded locally homeomorphic quasiregular mappings in 3-space*, (Bogdan Bojarski Memorial Volume), J. Math. Sci. **242**, 2019, 760-771 (Український математичний вісник, Том 16 (2019), № 1, 10-27)

[8] Boris Apanasov, *Non-faithful discrete representations of hyperbolic lattices, hyperbolic 4-cobordisms and applications*,, Preprint, Univ. of Oklahoma, 2020, 25 pp.

[9] Boris N. Apanasov and Andrei V. Tetenov, *Nontrivial cobordisms with geometrically finite hyperbolic structures*, J. Diff. Geom. **28**, 1988, 407–422.

[10] K. F. Barth, D. A. Brannan and W. K. Hayman, *Research problems in complex analysis*, Bull. London Math. Soc. **16**, 1984, no. 5, 490–517.
[11] Mikhael Gromov and Ilia I. Piatetski-Shapiro, *Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces*, Publ. Math. IHES **66**, 1988, 93-103.
[12] W.K.Hayman and E.F. Lingham, *Research problems in function theory*, arXiv: 1809.07200
[13] Mikhael A. Lavrentiev, *On a class of continuous mappings*, Mat. Sbornik, **42**, 1935, 407–424. (in Russian).
[14] Seppo Rickman, *Quasiregular Mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. **26**, Springer, Berlin-Heidelberg, 1993.
[15] Matti Vuorinen, *Conformal geometry and quasiregular mappings*, Lecture Notes in Math **1319**, Springer, Berlin-Heidelberg, 1988.

Representation of gravi-electromagnetism using matrix algebra

İsmail Aymaz
(Kütahya Dumlupınar University, Graduate School of Sciences, Department of Physics, Kütahya, Turkey)
E-mail: aymazismail7@gmail.com

Mustafa Emre Kansu
(Kütahya Dumlupınar University, Faculty of Art and Science, Department of Physics, Kütahya, Turkey)
E-mail: memre.kansu@dpu.edu.tr

The vector, matrix and tensor algebras are frequently used in order to formulate many physical systems and engineering problems [1]. The nature of quantum mechanics, which is one of the significant areas of physics, has increased the importance of matrix algebra due to including non-commutative structures. Therefore, matrix algebra satisfies the great contributions and developments. In this study, after defining matrix definitions of quaternion algebra [2, 3], which is one of the member of higher dimensional algebra, both electromagnetism and linear gravity [4, 5, 6] are combined by using matrix representation with dual [7] and complex [8] units. By this way, we have firstly showed the isomorphism and similarity between quaternion and matrix algebras for gravi-electromagnetism [9, 10].

References

[1] B. Jancewicz. *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics.* Singapore: World Scientific, 1989.
[2] W. R. Hamilton. *Elements of Quaternions.* New York: Chelsea Publishing, 1969.
[3] K. Gürlebeck and W. Sprössig. *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers.* Chichester: Wiley, 1997.
[4] O. Heaviside. A Gravitational and Elecromagnetic Analogy (Part I). *The Electrician*, 31: 281, 1893.
[5] A.S. Rawat and O.P.S. Negi. Quaternion gravi-electromagnetism. *Int. J. Theor. Phys.*, 51(3): 738, 2012.
[6] B.S. Rajput. Unification of generalized electromagnetic and gravitational fields. *J. Math. Phys.*, 25(2): 351, 1984.
[7] S. Demir and K. Özdaş. Dual quaternionic reformulation of electromagnetism. *Acta Phys. Slov.*, 53(6): 429, 2003.
[8] S. Demir, M. Tanışlı, N. Şahin and M.E. Kansu. Biquaternionic reformulation of multifluid plasma equations. *Chinese J. Phys.*, 55(4): 1329, 2017.
[9] M. A. Güngör and M. Sarduvan. A note on dual quaternions and matrices of dual quaternions. *Scientia Magna*, 7(1): 1, 2011.
[10] S. Demir. Matrix realization of dual quaternionic electromagnetism. *Cent. Eur. J. Phys.*, 5(4): 487, 2007.

Uniqueness of pretangent spaces at infinity

Viktoriia Bilet
(IAMM of the NASU, Dobrovolskogo Str. 1, Sloviansk, 84100, Ukraine)
E-mail: viktoriiabilet@gmail.com

Oleksiy Dovgoshey
(IAMM of the NASU, Dobrovolskogo Str. 1, Sloviansk, 84100, Ukraine)
E-mail: oleksiy.dovgoshey@gmail.com

The pretangent spaces to an unbounded metric space (X, d) at infinity are, by definition, some limits of rescaling metric spaces $\left(X, \frac{1}{r_n} d\right)$ with r_n tending to infinity. The Gromov–Hausdorff convergence and the asymptotic cones are most often used for construction of such limits. Both of these constructions are based on high–order logic abstractions (see, e.g., [5]), which makes them very powerful, but it does away the constructiveness. In [2, 3] we present and consider a more constructive approach to building an asymptotic structure of unbounded metric spaces at infinity.

The object of the present abstract is metric spaces having with unique pretangent spaces at infinity. The theorem below gives the necessary and sufficient conditions under which an unbounded metric space X has an unique pretangent space $\Omega^X_{\infty,\tilde{r}}$ at infinity for every fixed scaling sequence $\tilde{r}$.

We will denote by $\mathfrak{A}$ the class of spaces having the property

$$((X, d) \in \mathfrak{A}) \Leftrightarrow ((X, d) \text{ is unbounded and } \forall\ \tilde{r} \text{ there is a unique } \Omega^X_{\infty,\tilde{r}}).$$

Let (X, d) be a metric space and let $p \in X$. For each pair of nonempty sets C, $D \subseteq X$ write

$$\Delta(C, D) := \sup\{d(x, y) \colon x \in C, y \in D\}.$$

In addition we define, for every $\varepsilon \in (0, 1)$, the set S^2_ε as

$$S^2_\varepsilon := \left\{(r, t) \in Sp^2(X) \colon r \neq 0 \neq t \text{ and } \left|\frac{r}{t} - 1\right| \geq \varepsilon\right\},$$

where $Sp^2(X)$ is the Cartesian square of $Sp(X) = \{d(x, p) \colon x \in X\}$.

Theorem 1. [4] *Let (X, d) be an unbounded metric space and let p be a point of X. Then $(X, d) \in \mathfrak{A}$ if and only if the following conditions are satisfied simultaneously.*

(1) The limit relations

$$\lim_{k\to 1} \limsup_{r\to\infty} \frac{\operatorname{diam}(A(p, r, k))}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\operatorname{diam}(S(p, r))}{r} = 0$$

hold, where $r \in (0, \infty)$, $k \in [1, \infty)$, $A(p, r, k)$ is the annulus $\{x \in X \colon \frac{r}{k} \leq d(x, p) \leq rk\}$ and $S(p, r)$ is the sphere $\{x \in X \colon d(x, p) = r\}$.

(2) Let $\varepsilon \in (0, 1)$. If $((q_n, t_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset S^2_\varepsilon$ and

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} t_n = \infty,$$

and there is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{t_n} = c_0 \in [0, \infty],$$

then there exists a finite limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta(S(p, q_n), S(p, t_n))}{|q_n - t_n|} := \kappa_0.$$

It can be proved that conditions (1) and (2) from Theorem 1 are mutually independent in the sense that no one of them implies the another.

Corollary 2. *Let (X,d) be a metric space and let Y be an unbounded subspace X. Then $(X,d) \in \mathfrak{A}$ implies $(Y,d) \in \mathfrak{A}$.*

Consider, for simplicity, logarithmic spirals having the pole at 0. The polar equation of these spirals is

$$\rho = kb^{\varphi}, \tag{1}$$

where k and b are constants, $k \in (0,\infty)$ and $b \in (0,1) \cup (1,\infty)$. The rotation of the polar axis on the angle $\varphi_1 = -\frac{\ln k}{\ln b}$ transforms (1) to the form

$$\rho = b^{\varphi}. \tag{2}$$

Let us denote by $\mathbb{S}^*$ the set of all complex numbers lying on spiral (2) and let

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^* \cup \{0\},$$

i.e., $\mathbb{S}$ is the closure of $\mathbb{S}^*$ in the complex plane $\mathbb{C}$. In the following theorem we consider $\mathbb{S}$ as a metric space with the usual metric $d(z,w) = |z-w|$.

Theorem 3. [4] *Each pretangent space to $(\mathbb{S},d)$ at infinity is unique and isometric to $\mathbb{S}$.*

These results have natural infinitesimal analogs (see [1]).

References

[1] F.Abdullayev, O. Dovgoshey, M. Küçükaslan. Metric spaces with unique pretangent spaces. Conditions of the uniqueness. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 36(2): 353 – 392, 2011.

[2] V. Bilet, O. Dovgoshey. Asymptotic behavior of meric spaces at infinity. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, 9: 9 – 14, 2017.

[3] V. Bilet, O. Dovgoshey. Finite asymptotic clusters of metric spaces. *Theory and Applications of Graphs*, 5(2): 1 – 33, 2018.

[4] V. Bilet, O. Dovgoshey. Uniqueness of pretangent spaces to metric spaces at infinity. *Ukrainian Math. Bulletin*, 16(1): 28 – 58, 2019.

[5] J. Roe. *Lectures on Coarse Geometry*, University Lecture Series **31**, Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.

Foliations of 3-manifolds with small module of mean curvature

Dmitry Bolotov
(B. Verkin ILTPE of NASU, 47 Nauky Ave., Kharkiv, 61103, Ukraine)
E-mail: bolotov@ilt.kharkov.ua

A taut foliation is a codimension one transversely oriented foliation of an oriented 3-manifold M with the property that for each leaf there is a transverse circle intersecting it.

D. Sullivan proved that $\mathcal{F}$ is taut iff each leaf is a minimal surface for some Riemannian metric on M which is equivalent that $\mathcal{F}$ does not contain generalized Reeb components [1]. Recall that a surface F is called minimal if the mean curvature H of F is identically zero.

In the present work we announce the following result.

Theorem 1 (Main theorem)**.** *Let (M,g) be a closed oriented Riemannian 3-Manifold sutisfying the following properties:*

(1) the volume $Vol(M,g) \leq V_0$;
(2) the sectional curvature γ of (M,g) satisfies $\gamma \leq \gamma_0$ for the constant $\gamma_0 \geq 0$;
(3) $\min\{inj(M,g), \frac{\pi}{2\sqrt{\gamma_0}}\} \geq i_0$.

Then there is a constant $H_0(V_0,\gamma_0,i_0)$ such that any transversally oriented foliation $\mathcal{F}$ of codimension one on M with the mean curvature of the leaves satisfying $|H| < H_0$, must be taut. The constant H_0 is defined as wollowing:

$$H_0 = \begin{cases} \min\{\frac{2\sqrt{3}i_0^2}{V_0}, \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}}{V_0}}\}, & \text{if } \gamma_0 = 0, \\ \min\{\frac{2\sqrt{3}i_0^2}{V_0}, x_0\}, & \text{if } \gamma_0 > 0, \end{cases} \tag{$*$}$$

where x_0 is the positive root of the equation

$$\frac{4}{\gamma_0}\operatorname{arcctg}^2\frac{x}{\sqrt{\gamma_0}} - \frac{2V_0}{\sqrt{3}}x = 0.$$

Let us recall that, by the Novikov's theorem [2], if $\pi_1(M) < \infty$ or $\pi_2(M) \neq 0$, then excepting the foliation of $S^2 \times S^1$ by spheres, $\mathcal{F}$ contains a Reeb component. Thus we obtain the following corollary.

Corollary 2. *Let (M,g) be a Riemannian manifold that satisfies the properties in the theorem above. If $\pi_1(M) < \infty$ or $\pi_2(M) \neq 0$, then excepting the foliation of $S^2 \times S^1$ by spheres, (M,g) does not admit a foliation with the mean curvature H of leaves satisfying the inequality $|H| < H_0$, where H_0 is determined from $(*)$.*

References

[1] Dennis Sullivan. A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces *Commentari Math. Helvetici* , 54 : 218–223, 1979.
[2] С. П. Новиков. Топология слоений *Тр. Моск. мат. о-ва.*, 14 : 249–278, 1965.

On integrability of geodesic flows on 3-dimensional manifolds

Alexey Bolsinov
(School of Mathematics, Loughborough University, Leicestershire, LE11 3TU, UK)
E-mail: `A.Bolsinov@lboro.ac.uk`

The goal of the talk is to discuss the behaviour of geodesics on 3-manifolds M with $SL(2,\mathbb{R})$ geometry, one of the eight natural geometries according to Thurston, appearing on three-dimensional manifolds. It has been known that the corresponding geodesic flows cannot be integrable, however, this particular case has not been studied in detail. The situation turned out quite interesting: we have observed (joint work with Alexander Veselov and Yiru Ye [6]) that the phase space T^*M contains to two open domains, complementary to each other and having common boundary, with integrable and chaotic behaviour of geodesics. In the integrable domain, we have integrability in the class of real-analytic integrals, whereas in the chaotic domain the geodesic flow has positive topological entropy. As a specific example, we study in more detail the geodesic flow on the modular 3-manifold $M = SL(2,\mathbb{R})/SL(2,\mathbb{Z})$ homeomorphic to the complement of a trefoil knot $\mathcal{K}$ in 3-sphere.

I will try to talk about these results in the context of a more general problem on topological obstructions to integrability of geodesic flows on smooth manifolds following papers by V. V. Kozlov [1], I. A. Taimanov [6, 4] and L. Butler [3, 5].

This work was supported by the Russian Science Foundation grant no. 17-11-01303 “Topological and algebraic aspects of the theory of integrable systems: new trends and applications”.

References

[1] V.V. Kozlov *Topological obstructions to the integrability of natural mechanical systems.* Soviet Math. Dokl. **20** (1979), 1413-1415.

[2] I.A. Taimanov *Topological obstructions to integrability of geodesic flows on non-simply-connected manifolds.* Math. USSR Izv. **30** (1988), 403-409.

[3] L. Butler *A new class of homogeneous manifolds with Liouville-integrable geodesic flows.* C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. **21**(1999), no. 4, 127-131.

[4] A.V. Bolsinov, I.A. Taimanov *Integrable geodesic flows with positive topological entropy.* Invent. Math. **140** (2000), 639-650.

[5] L.T. Butler *Invariant fibrations of geodesic flows.* Topology **44:4** (2005), 769-789.

[6] A.V.Bolsinov, A.P.Veselov, Y.Ye *Chaos and integrability in $SL(2,\mathbb{R})$-geometry* (in progress)

Algebraic and geometric questions about the EM helix

Enzo Bonacci
(Liceo Scientifico Statale "G.B. Grassi", Latina, Italy)
E-mail: enzo.bonacci@liceograssilatina.org

The recent proposal to detect Dark Matter through the Aharonov-Bohm effect [10] has renovated the interest for cosmological solutions based upon magnetic monopoles [8]. Challenging the Λ-CDM paradigm, some alternative representations are grounded on interactions with hypothetical magnetic charges [6] whereas others suppose the influence of relic magnetic atoms [4]. This raises two apparently separate issues about why magnetic monopoles have never been spotted and where those elusive particles come from. More than a decade ago [1, 2, 3] we described the materialization of mass from radiant energy as a process requiring the indistinguishability between the inertial reference frames at $v = c$ (SOL, i.e., speed of light) and those at $v < c$ (STL, i.e., slower than light). Such rigorous interpretation of the relativity principle could clarify the entanglement between temporally separated photons [7] and would allow the self-interacting electromagnetic rings, possible in SOL reference frames (characterized by atemporality), to be perceived as electromagnetic helices for STL observers. Namely, we assumed that a charged mass (both electric and magnetic) could be an electromagnetic helix, thus explaining some intrinsic quantities of particles and the absence of magnetic monopoles at low energies. Our model has been indirectly corroborated by the observation of the light self-torque [9] and could find future confirmation from a promising method to determine the geometry of an electron [5]. We wish to illustrate the algebraic and geometric questions behind a so formulated mathematical-physical theory, included a falsification test currently being assembled at CERN's MoEDAL.

References

[1] Enzo Bonacci. *Absolute Relativity*. Turin : Carta e Penna, 2007.
[2] Enzo Bonacci. *Extension of Einstein's Relativity*, volume 42 of *Physical Sciences*. Rome : Aracne Editrice, 2007.
[3] Enzo Bonacci. *Beyond Relativity*, volume 43 of *Physical Sciences*. Rome : Aracne Editrice, 2007.
[4] Vladimir V. Burdyuzha. Magnetic Monopoles and Dark Matter. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 127(4) : 638–646, 2018.
[5] Leon C. Camenzind et al. Spectroscopy of Quantum Dot Orbitals with In-Plane Magnetic Fields. *Physical Review Letters*, 122(20) : 207701, 2019.
[6] Valentin V. Khoze & Gunnar Ro. Dark matter monopoles, vectors and photons. *Journal of High Energy Physics*, 10(61), 2014.
[7] Eli Megidish et al. Entanglement Swapping between Photons that have Never Coexisted. *Physical Review Letters*, 110(21) : 210403, 2013.
[8] Arttu Rajantie. Magnetic Monopoles in Field Theory and Cosmology. *Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 370(1981) : 5705–5717, 2012.
[9] Laura Rego et al. Generation of extreme-ultraviolet beams with time-varying orbital angular momentum. *Science*, 364(6447) : eaaw9486, 2019.
[10] John Terning & Christopher B. Verhaaren. Detecting Dark Matter with Aharonov-Bohm. *Journal of High Energy Physics*, 12(152), 2019.

Geodesics on regular tetrahedra in spherical space

Alexander A. Borisenko
(B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine)
E-mail: aborisenk@gmail.com

Darya D. Sukhorebska
(B.Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine)
E-mail: suhdaria0109@gmail.com

The full classification of closed geodesics on regular tetrahedra in Euclidean space follows from the tiling of Euclidean plane by regular triangles [1].

In [2] we described a complete classification of simple (without self-intersections) closed geodesics on regular tetrahedra in hyperbolic 3-space. In addition, we presented the asymptotic of the number of simple closed geodesics of length not greater than L as L tends to infinity.

In current work we described all simple closed geodesics on regular tetrahedra in three-dimensional spherical spaces. In this space the tetrahedron's curvature is concentrated both into its vertices and into its faces. The value α of the faces' angle of a tetrahedron satisfies $\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$. The intrinsic geometry of a tetrahedron depends on α.

By definition a simple closed geodesic on a tetrahedron has the type (p, q) if it has p points on each of two opposite edges of the tetrahedron, q points on each of another two opposite edges, and there are $(p + q)$ points on each edges of the third pair of opposite one.

We proved that on a regular tetrahedron in spherical space there exists the finite number of simple closed geodesic. The length of all these geodesics is less than 2π. Furthermore, for any coprime integers (p, q) we found the numbers α_1 and α_2 depending on p, q and satisfying the inequalities $\pi/3 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi/3$ such that
1) if the faces' angle of a regular tetrahedron is measured $\alpha \in (\pi/3, \alpha_1)$ then in spherical space there exists unique, up to the rigid motion, simple closed geodesic of type (p, q) on this tetrahedron,
2) if the value α of faces' angle is in $(\alpha_2, 2\pi/3)$ then there is no simple closed geodesic of type (p, q) on the tetrahedron with such faces' angle in spherical space.

References

[1] D. B. Fuchs, E. Fuchs. Closed geodesics on regular polyhedra. *Mosc. Math. J.*, 7:2, 2007, p. 265–279.
[2] A. A. Borisenko, D. D. Sukhorebska. Simple closed geodesics on regular tetrahedra in hyperbolic space, *Mat. Sb.*, 211:5, 2020, p. 3-30 (in Russian). *English translation*: SB MATH, 2020, 211(5), DOI:10.1070/SM9212

Motivic hypercohomology solutions in field theory II

Francisco Bulnes
(IINAMEI, Research Department in Mathematics and Engineering, TESCHA, Chalco, Mexico.)
E-mail: `francisco.bulnes@tesch.edu.mx`

2010 AMS Classification: 13D03, 13D09, 18G40, 19D23, 19D55, 24D23.

Keywords: Derived Categories, Derived Tensor Products, Étale Sheaves, Geometrical Motives Categories, Hypercohomology, Quantum Field Equations, Tensor Derived Category.

The determination of a hypercohomology as cohomology group where are defined the solutions of the field equations obeys to the triangulated derived categories that permit an scheme (triangle) commutative whose integrals are solutions of the field equations. The determination of this hypercohomology arises of the fact of that derived motivic category $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$, which is of the motivic objects whose image is under $\mathrm{Spec}(k)$, that is to say, an equivalence of the underlying triangulated tensor categories, compatible with respective functors on $\mathrm{Sm}_k^{\mathrm{Op}}$. The geometrical motives will be risked with the moduli stack to holomorphic bundles. kewise, is analysed the special case where complexes $C = \mathbb{Q}(q)$, are obtained when cohomology groups of the isomorphism $H^p_{ét}(X, F_{ét}) \cong H^p_{\mathrm{Nis}}(X, F_{\mathrm{Nis}})$, can be vanished for $p > \dim(Y)$. We observe also the Beilinson-Soulé vanishing conjectures where we have the vanishing $H^p(F, \mathbb{Q}(q)) = 0$, if $p \leq 0$, and $q > 0$, which confirms the before established. Then survives a hypercohomology $\mathbb{H}^q(X, \mathbb{Q})$. Then their objects are in $\mathrm{Spec}(\mathrm{Sm}_k)$. Likewise for the complex Riemannian manifold the integrals of this hypercohomology are those whose functors image will be in $\mathrm{Spec}_H\mathrm{SymT}(\mathrm{OP}_{^LG}(D))$, which is the variety of opers on the formal disk D, or neighborhood of all point in a surface Σ.

References

[1] Francisco Bulnes, Characteristic Cycles Integration on D- Modules to obtaining of Field Equations solutions on L–Holomorphic Bundles, *International Journal of Advances in Mathematics*, Volume 2019, Number 4, pp. 1–17, 2019.

[2] Francisco Bulnes, & Ivan Verkelov. (2020). Scheme of Derived Moduli Problem to the "quantum" version of an algebra symT. IJRDO – Journal of Mathematics (ISSN: 2455-9210), 6(3), 01–12. Retrieved from `https://www.ijrdo.org/index.php/m/article/view/3534`

[3] F. Bulnes. (2020) "Geometrical Motives Categories to Determine Co-Cycles as Solutions in Field Theory," *Theoretical Mathematics and Applications*, Vol. 10 (2), pp. 15–31.

[4] F. Bulnes. (2017) "Extended ∂ – Cohomology and Integral Transforms in Derived Geometry to QFT–equations Solutions using Langlands Correspondences," Theoretical Mathematics and Applications, Vol. 7 (2), pp. 51–62.

Estimate of maximum of the products of inner radii of mutually non-overlapping domains

Iryna Denega
(Department of complex analysis and potential theory, Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 3 Tereschenkivska St, 01024 Kyiv, Ukraine)
E-mail: `iradenega@gmail.com`

Let $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ be the sets of natural and real numbers, respectively, $\mathbb{C}$ be the complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ be its one point compactification, $\mathbb{U}$ be the open unit disk in $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Let $r(B, a)$ be an inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ relative to a point $a \in B$ [1–4]. The inner radius of the domain B is connected with Green's generalized function $g_B(z, a)$ of the domain B by the relations

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \ln r(B, a) + o(1), \quad z \to a,$$

$$g_B(z, \infty) = \ln|z| + \ln r(B, \infty) + o(1), \quad z \to \infty.$$

The system of points $A_n := \{a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, is called n-radial, if $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ for $k = \overline{1, n}$ and

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Consider the following extremal problem.

Problem. For all values of the parameter $\gamma \in \mathbb{R}^+$ to find estimate of the maximum of the functional

$$J_n(\gamma) = [r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{1}$$

where $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \overline{\mathbb{C}}/\{0, \infty\}$ be any fixed n-radial system of different points, B_0, B_∞, $\{B_k\}_{k=1}^n$ be a system of mutually non-overlapping domains, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$.

The following proposition is true.

Theorem 1. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Then, for any fixed n-radial system of different points $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \overline{\mathbb{C}}/\{0, \infty\}$ and any mutually non-overlapping domains B_0, B_∞, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, the following inequalities hold*

$$J_n(\gamma) \leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma\frac{n+1}{n+2}} \left[\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{if} \quad \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|, & \text{if} \quad \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

Remark 2. If $\gamma = \frac{n+2}{2}$ and $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$, then from above posed Theorem 1, the following inequality holds

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^{\frac{n+2}{2}} \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

In this case the structure of points and domains is not important.

For any n-radial system of points $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, and any pairwise non-overlapping domains $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, the inequality

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$$

is valid (see Corollary 5.1.3 [1]). In Theorem 6.11 [2] for any different points a_k on the circle $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$ $(n \geqslant 2)$, and any pairwise non-overlapping domains $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$ such that $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, the inequality

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n$$

is proved. Thus, from Theorem 1 we have next result.

Corollary 3. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Then, for any system of different points $\{a_k\}_{k=1}^n$ of the unit circle $|a_k| = 1$ and any mutually non-overlapping domains B_0, B_∞, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, the following inequalities hold*

$$J_n(\gamma) \leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma\frac{n+1}{n+2}} \left(\dfrac{4}{n}\right)^{n-\frac{2\gamma n}{n+2}}, & \textit{if} \quad \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}, & \textit{if} \quad \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

If $B_0 \subset \mathbb{U}$, then from the proof of the Theorem 1, the following results are valid.

Corollary 4. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ and $B_0 \subset \mathbb{U}$. Then, for any system of different points $\{a_k\}_{k=1}^n$ of the unit circle $|z| = 1$ and any mutually non-overlapping domains B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, and the domains B_k, $k = \overline{1,n}$, are mirror-symmetric relative to the unit circle $|z| = 1$, the inequality holds*

$$r^{2\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Corollary 5. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $R > 0$ and B_0 be an arbitrary domain belonging to the open circle $|w| < R$. Then, for any n-radial system of different points $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ such that $|a_k| = R$, $k = \overline{1,n}$, and any mutually non-overlapping domains B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, and the domains B_k, $k = \overline{1,n}$, are mirror-symmetric relative to the circle $|w| = R$, the inequality holds*

$$r^{2\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \cdot R^{2\gamma}.$$

This work was supported by the budget program "Support of the development of priority trends of scientific researches" (KPKVK 6541230).

References

[1] A.K. Bakhtin, G.P. Bakhtina, Yu.B. Zelinskii. *Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis.* Zb. prats of the Inst. of Math. of NASU, 2008. (in Russian)

[2] V.N. Dubinin. *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory.* Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[3] G.V. Kuz'mina. Problems of extremal decomposition of the Riemann sphere. *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 276 : 253–275, 2001. (in Russian)

[4] P.M. Tamrazov. Extremal conformal mappings and poles of quadratic differentials. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32(5) : 1033–1043, 1968. (in Russian)

Inverse problem for tree of Stietjes strings

A. Dudko
(South Ukrainian National Pedagogical University named after K.D. Ushynsky)
E-mail: nastysha00301@gmail.com

V. Pivovarchik
(South Ukrainian National Pedagogical University named after K.D. Ushynsky)
E-mail: vpivovarchik@gmail.com

Finite-dimensional spectral problems on an interval were considered in [1] (some recent results see in [4], [3] and applications in [2]). Finite-dimensional spectral problems on graphs occur in various fields of physics (see e.g. [5], [6] and [7]).

We consider a tree T rooted at a pendant vertex. All edges are directed away from the root. Each edge e_j of this tree is a Stieltjes string with point masses $m_k^j \quad (k = 1, 2, \ldots, n_j,\ j = 1, 2, ..., q)$ and subintervals $l_k^j \quad (k = 0, 1, \ldots, n_j)$. The total length of e_j is $l_j = \sum_{k=0}^{n_j} l_k^j$. We denote $\tilde{n}_j = n_j - 1$ if $l_{n_j}^j = 0$ and $\tilde{n}_j = n_j$ if $l_{n_j}^j > 0$. The Dirichlet problem on this tree consists of the following equations.

For each edge:

$$\frac{u_k^j - u_{k+1}^j}{l_k^j} + \frac{u_k^j - u_{k-1}^j}{l_{k-1}^j} - m_k^j \lambda^2 u_k^j = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, \tilde{n}_j,\ j = 1, 2, ..., q). \tag{1}$$

For each interior vertex with incoming edge e_j and outgoing edges e_r we have

$$u_{\tilde{n}_j+1}^j = u_0^r, \tag{2}$$

and

$$\frac{u_{\tilde{n}_j+1}^j - u_{\tilde{n}_j}^j}{l_{\tilde{n}_j}^j} + \sum_r \frac{u_0^r - u_1^r}{l_0^r} = \begin{cases} 0, & \text{if } l_{n_j}^j > 0, \\ -m_{n_j}^j \lambda^2 u_{n_j}^j, & \text{if } l_{n_j}^j = 0. \end{cases} \tag{3}$$

For an edge e_j incident with a pendant vertex (except of the root) we have the Dirichlet boundary condition:

$$u_{n_j+1}^j = 0. \tag{4}$$

If e_1 is the edge incident with the root then at the root we have

$$u_0^1 = 0. \tag{5}$$

The Neumann problem consists of equations (1)–(4) and

$$u_0^1 = u_1^1. \tag{6}$$

at the root.

First of all we notice that interior vertices of degree 2 do not influence the results and we can assume absence of such vertices without losses of generality. Let P be a path in the tree T involving the maximum number of masses. Obviously it starts and finishes with pendant vertices. We denote the initial vertex of P by v_0 and choose it as the root of the tree. The enumeration of other vertices is arbitrary. We denote the edge incoming into a vertex v_i by e_i for all i. Then $P : v_0 \to v_1 \to v_{s_2} \to v_{s_3} \to ... \to v_{s_{r-1}} \to v_{s_r}$. Deleting v_0 and e_1 we obtain a new tree T' rooted at the vertex v_1.

Since the degree of v_1 is $d(v_1) > 2$ we can divide our tree T' into subtrees T_1', T_2', ..., $T_{d(v_1)-1}'$ having v_1 as the only common vertex. (We say that T_1', T_2', ..., $T_{d(v_1)-1}'$ are *complementary subtrees* of T'.

Denote by $\phi_{N_{(v_0)}}(z)$ (where $z=\lambda^2$) the characteristic polynomial of problem (1)– (4), (6) on the tree T and by $\phi_{D_{(v_0)}}(z)$ the characteristic polynomial of problem (1)– (4), (5) on this tree. These polynomials are normalized such that

$$\frac{\phi_{D(v_0)}(0)}{\phi_{N(v_0)}(0)} = l_1 + \frac{1}{\sum\limits_{r=1}^{d(v_1)-1} \frac{\phi_{Nr(v_1)}(0)}{\phi_{Dr(v_1)}(0)}},$$

$\phi_{D,r(v_1)}(z)$ is the characteristic polynomial of the Dirichlet problem (1)– (4), (5) on T'_r and $\phi_{N,r(v_1)}(z)$ is the characteristic polynomial of the Neumann problem (1)– (4), (6) on T'_r and so on.

The inverse problem lies in recovering the spectral problem data $\{m_k^j\}_{k=1}^{n_j}$, $\{l_k^j\}_{k=0}^{n_j}$ using the spectra $\{\mu_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$ and $\{\nu_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$ of the Neumann and Dirichlet problems.

The following theorem gives sufficient conditions for existence of solution of such inverse problem.

Theorem 1. *Let $\{\mu_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$ and $\{\nu_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$ be symmetric ($\mu_{-k}=-\mu_k$, $\nu_{-k}=-\nu_k$) and monotonic sequences of real numbers which interlace:*

$$0<(\mu_1)^2<(\nu_1)^2<...<(\mu_n)^2<(\nu_n)^2.$$

Let T be a metric tree of a prescribed form rooted at a pendant vertex v_0 with prescribed lengths of edges $l_j>0$ ($j=1,2,...,q$, q is the number of edges in T).

Then

1) there exist numbers $n_j\in\{0\}\cup\mathbb{N}$ ($j=1,2,...,q$), sequences of positive numbers $\{m_k^j\}_{k=1}^{n_j}$ (point masses on the edge e_j, $j=1,2,...,q$) and numbers $\{l_k^j\}_{k=0}^{n_j}$ ($l_k^j>0$ for all $k=0,1,...,n_j-1$, $l_{n_j}\geq 0$ for all $j=1,2,...,g$ such that $\sum\limits_{k=0}^{n_j} l_k^j = l_j$, $\sum\limits_{j=1}^{q} n_j = n$, the spectrum of Neumann problem (1)–(4), (6), coincides with $\{\mu_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$ and the spectrum of Dirichlet problem (1)–(4), (5) coincides with $\{\nu_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$;

2) the two spectra $\{\mu_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$ and $\{\nu_k\}_{k=-n,\ k\neq 0}^{n}$ and the length l_1 of the edge incident with the root uniquely determine the masses $\{m_k^1\}_{k=1}^{n_1}$ (point masses on the edge e_1) and lengths $\{l_k^1\}_{k=0}^{n_1}$ of the subintervals on this edge.

References

[1] F.R.Gantmakher and M.G.Krein. Oscillating matrices and kernels and vibrations of mechanical systems. *AMS Chelsea Publishing, Providence, RI*, 2002.

[2] A. F. Filimonov and A. D. Myshkis. On properties of large wave effect in classical problem bead string vibration. *J. Difference Equations and Applications*, 10(13-15) : 1171–1175, 2004.

[3] Che-Wei Tsao, Chun-Kong Law. The Stieltjes string and its associated nodal points. *Operators and Matrices*, 13(2): 363–373, 2019.

[4] S.J. Cox, M. Embree and J.M. Hokanson. One can hear the composition of a string: experiments with an inverse eigenvalue problem. *SIAM Rev.*, 54(1) : 157–178, 2012.

[5] A. Morassi, G. Gladwell. Dynamical Inverse Problems: Theory and Applications. *CISM Courses and Lectures 529*, 1–29, 2011.

[6] G. Gladwell. Inverse problems in vibration. *SIAM Rev.*, 2004.

[7] J.S. Maybee, J. Genin. Mechanical vibration trees. *J. Math. Anal. Appl.*, 45: 746–763, 1974.

Formal groups and algebraic cobordism

Nikolaj Glazunov
(NAU, Kiev, Ukraine)
E-mail: glanm@yahoo.com

We present our algorithm for constructing of Lazard's one dimensional universal commutative formal group. We apply it to some constructions of complex and algebraic cobordism.

Algorithm for constructing of Lazard's one dimensional universal formal group

Here we follow to [1, 5, 8]. We extract from Lazard [1] an algorithm of constructing of Lazard's one dimensional universal formal group law. The constructions of $n (n \geq 1)$-buds, formal groupoids and moduli spaces of one dimensional formal groups are investigated and are used. Let A_q and $A^{'}_q$ be the rings of polynomials $A_q = \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_q]$ and $A^{'}_q = \mathbb{Q}[\alpha_1, \ldots, \alpha_q]$.

Proposition 1. *The structure of the algorithm has the next form. For the (one-dimensional)* 1*-bud* $x + y + \alpha_1 xy$ *we put:*

$$f_1(x, y) = x + y + \alpha_1 xy;\ \varphi_1 = x - \frac{1}{2}\alpha_1 x^2;$$

$$f_{q+1}(x, y) = f_q(x, y) + h^{'}(x, y) + \alpha_{q+1} C_{q+2}(x, y),\ f_q(x, y) \in A_q;$$

compute $\varphi_{q+1},\ \varphi_{q+1} \in A^{'}_q$.

Remark 2. The algorithm and expressions for φ_{q+1}, $h^{'}(x, y)$, $C_{q+2}(x, y)$ will be given in my talk.

Definition 3. The ring $\mathbb{L} = \mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_2, \cdots]$ is called the Lazard ring.

Formal groups in complex cobordism

Here we follow to [2, 3, 4, 6].

Let M be a smooth manifold, TM be the tangent bundle on M and $\mathbb{R}^m$ the trivial real m-dimensional bundle of M.

Definition 4. A manifold M is *stably complex* if for some natural m the real vector bundle $TM \bigoplus \mathbb{R}^m$ admits a complex structure.

Let M_1 and M_2 be two smooth manifolds of dimension n, and W be the smooth manifold of dimension $n + 1$ with a boundary that is the union of M_1 and M_2, i.e. $\partial W = M_1 + M_2$.

Definition 5. Let M_1, M_2, W be stably complex manifolds. In above notations the *complex (unitary) cobordism* between M_1 and M_2 is a manifold W whose boundary is the disjoint union of M_1, M_2, $\partial W = M_1 + \overline{M}_2$ where the corresponding structure on ∂W is induced from W and $\overline{M}_2$ denotes the manifold with opposite structure.

Remark 6. Suppose we have the relation of complex cobordism. Then the relation divides stably complex manifolds on equivalence classes called classes of complex cobordisms.

Lemma 7. *The set of classes of complex cobordisms with operations of disjoint union and product of stable manifolds form commutative graded ring* $\mathbb{L} = \mathbb{Z}[v_1, v_2, \cdots]$.

Theorem 8 (A. S. Mishchenko). *Let $g(t)$ be the logarithm of Lazard universal formal group, and $[\mathbb{C}P^n]$ are classes of unitary cobordisms of complex projective spaces. Then*

$$g(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{[\mathbb{C}P^n]}{n+1} t^{n+1}, \ [\mathbb{C}P^0] = 1.$$

Formal groups in algebraic cobordism

Here we follow to [7]. Let k be a field of characteristic zero and $\mathbf{Sm}(k)$ be the full subcategory of smooth quasi-projective k-schemes of the category of separable finite-type k-schemes. Let A^* be an oriented cohomology theory on $\mathbf{Sm}(k)$ and let $c_1(L)$ be the first Chern class of line bundle L on $X \in \mathbf{Sm}(k)$.

Proposition 9 (Quillen, [7]). *Let L, M be line bundles on $X \in \mathbf{Sm}(k)$. There exists formal group law F_A with coefficients in A^* such that*

$$c_1(L \otimes M) = F_A(c_1(L), c_1(M)).$$

Theorem 10 (Levine-Morel). *There is a universal oriented cohomology theory Ω over k called algebraic cobordism. The classifying map $\phi_\Omega : \mathbb{L} \to \Omega^*(k)$ is an isomorphism , so F_Ω is the universal formal group law.*

Problem 11. It seems that very little is known about applying $n (n \geq 2)$-dimensional commutative formal groups to cobordism theory. For instance what is the application of a two-dimensional 1-bud ?

References

[1] M. Lazard. Sur les groupes de Lie formels à un paramètre, *Bull. Soc. Math. France*, 83(3): 251-274, 1955,

[2] S.P. Novikov. Homotopy properties of Thom complexes.*Mat. Sbornik*, vol. 57, no. 4, 407-442, 1962.

[3] Vi. Buchstaber, A. Mishchenko, S. Novikov. Formal groups and their role in the apparatus of algebraic topology. *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 26, no. 2, 131-154, 1971.

[4] S.P. Novikov. Algebraic topology at the Steklov mathematical institute of the academy of sciences of the USSR *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 169, 27-49, 1985.

[5] M. Hazewinkel. *Formal groups and applications*, New York : Academic Press, 1978.

[6] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Torus actions in topology and in combinatorics*, Moscow : MTcNMO, 2004.

[7] Mark Levine, Fabien Morel. *Algebraic cobordism*, *Monographs in Mathematics*. Berlin & New York : Springer, 2007.

[8] N. Glazunov. Duality in abelian varieties and formal groups over local fields. I. *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no.1, 44-56, 2018.

A note on tensor product of Archimedean vector lattices

Omer Gok
(Yildiz Technical University, Mathematics Department, Istanbul, Turkey)
E-mail: gok@yildiz.edu.tr

Let E ,F and G be Archimedean vector lattices. We say that a linear operator $T : E \to F$ is a lattice homomorphism if $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ for every $x, y \in E$. A bilinear map $\Phi : E \times F \to G$ is said to be positive if $|\Phi(x, y)| \leq \Phi(|x|, |y|)$ for all $x \in E$ and $y \in F$. The bilinear map $\Phi : E \times F \to G$ is said to be lattice bilinear map (or lattice bimorphism) whenever it is separately lattice homomorphisms for each variable or equivalently, $|\Phi(x, y)| = \Phi(|x|, |y|)$ for all $x \in E$ and $y \in F$. Let E and F be Archimedean vector lattices. Then, by [6] and [7] there exists an Archimedean vector lattice $E\bar{\bigotimes}F$ (called Fremlin tensor product) and a map $\bigotimes : E \times F \to E\bar{\bigotimes}F$ with the following well-known properties :

(i) $\bigotimes$ is a lattice bimorphism and represents $E \bigotimes F$ as a linear subspace of $E\bar{\bigotimes}F$.
(ii) If G is any Archimedean vector lattice, there is a one to one correspondence between lattice bimorphisms $\psi : E \times F \to G$ and lattice homomorphisms $\tau : E\bar{\bigotimes}F \to G$ given by $\psi = \tau \bigotimes$.
(iii) $E \bigotimes F$ is dense in $E\bar{\bigotimes}F$. It means that for any $u \in E \bigotimes F$ there exist $0 \leq x \in E$ and $0 \leq y \in F$ such that for every $\delta > 0$ there is a $v \in E \bigotimes F$ with $| u - v |\leq \delta x \otimes y$.
(iv) $E \bigotimes F$ is order dense in $E\bar{\bigotimes}F$. That is, if $0 < u$ in $E\bar{\bigotimes}F$ there exist $0 < x$ in E, $0 < y$ in F such that $0 < x \otimes y \leq u$.
(v) f $u \in E\bar{\bigotimes}F$ there exist $0 \leq x \in E$, $0 \leq y \in F$ such that $| u |\leq x \otimes y$.
(vi) If G is any Archimedean vector lattice and $\Phi : E \times F \to G$ is a lattice bimorphism such that $\Phi(x, y) > 0$ whenever $x > 0$ in E and $y > 0$ in F, then $E\bar{\bigotimes}F$ may be identified with the lattice subspace of G generated by $\Phi(E \times F)$.

Definition 1. Let E be a vector lattice and U be a subset of E. U is called a solid subset if $| x |\leq| y |$ and $y \in U$ imply $x \in U$. A solid subspace of E is called an order ideal. An order closed ideal is said to be a band.

In this talk, we deal with tensor product of two order ideals. Let E be a uniformly complete vector lattice and $x \in E$. An order ideal generated by x is given by

$$U_x = \{y :| y |\leq \lambda \mid x \mid \quad for \quad some \quad \lambda > 0\}.$$

Order unit norm on U_x is given by

$$\|y\| = inf\{\lambda > 0 :| y |\leq \lambda \mid x \mid\}.$$

U_x is algebraically and order isomorphic to an AM space with unit. Every AM space with unit is a $C(K)$ space for some compact Hausdorff space K with unit. Hence, Fremlin tensor product of two order ideals generated by single elements is an order ideal. For general case, we need the definition of orthomorphism. A linear operator $T : E \to E$ is called an orthomorphism if it is both band preserving and order bounded. By using orthomorphism, we can show that Fremlin tensor product of two order ideals is an order ideal.

Theorem 2. *Fremlin tensor product of two order ideals generated by single elements in a uniformly complete vector lattice is an order ideal.*

For this subject, we give the following references.

References

[1] C.D. Aliprantis, Owen Burkinshaw, *Positive Operators*. New York: Academic Press, 1985.

[2] Y.Azouzi, M.A. Ben Amor, J. Jaber, *The tensor product of f-algebras*, Quastiones Math., 41(3), (2018), 359-369.

[3] K.Boulabiar, M.A. Toumi, *Lattice bimorphisms on f-algebras*, Algebra Univers.,48(2002),103-116.

[4] K.Boulabair, *Extensions of orthosymmetric lattice bilinear maps revisted*, Proc. Am. Math. Soc., 135 (2007), 2007-2009.

[5] G.Buskes, A.G. Kusraev, *Representation and extension of orthoregular bilinear operators*, Vladikavkaz. Mat. Zh., 9, 1(2007), 16-29.

[6] D.H. Fremlin, *Tensor product of Archimedean vector lattices*, Amer. J. Math. vol. 94, (1972),777-798.

[7] D.H. Fremlin, *Tensor products of Banach lattices*,Math. Ann.211,(1974), 87-106.

[8] J.J. Grobler, C.C.A. Labuschagne G.Buskes,*The tensor product of Archimedean ordered vector spaces*,Math. Proc. Camb.Philos., Soc. 104 (1988), 331-345.

Trace Regularization Problem On a Banach Space

Erdal Gül
(Yildiz Technical University, Mathematics Department, Istanbul, Turkey)
E-mail: `gul@yildiz.edu.tr`

Let $\mathcal{H}$ be a separable Hilbert space and let $S_1[\mathcal{H}]$ be the trace class operators on $\mathcal{H}$ (First Schatten Class, [3]).

Consider $\mathcal{H}_1 = L^2(\mathcal{H};\ [0,\pi])$ and define an inner product on $\mathcal{H}_1$ by:

$$(f,g)_{\mathcal{H}_1} = \int_0^\pi (f(t),g(t))_{\mathcal{H}} dt$$

for all $f,g \in \mathcal{H}_1$.

- With this inner product, $\mathcal{H}_1$ is also a separable Hilbert space.

Here, we study the same problem in [2], with $\mathcal{H}$ replaced by a arbitrary separable Banach space $\mathcal{B}$, under the following conditions:

(1) $Q(t)$ has a weak second-order derivative in $[0,\pi]$ and for $t \in [0,\pi]$, $Q^{(i)}(t)$ $(i = 0,1,2)$ is a self adjoint trace class operator on $\mathcal{B}$.
(2) $\|Q\|_{\mathcal{H}_1} < 1$.
(3) $\mathcal{H}_1$ has an o.n.b. $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} \|Q\varphi_n\|_{\mathcal{H}_1} < \infty$.
(4) $\left\|Q^i(t)\right\|_{S_1[\mathcal{B}]}$ $(i = 0,1,2)$ is a bounded measurable function on $[0,\pi]$.

It is clear from (4), that this is a nontrivial problem since, among other things, in the standard approach, there are a number of possible definitions of $S_1[\mathcal{B}]$ (see [3] and Pietsch [9]).
We assume that $\mathcal{B}$ is a continuous dense embedding in a separable Hilbert space $\mathcal{H}$ and for each $f,g \in \mathcal{B}$, $(f,g)_h = (f,g)_{\mathcal{H}}$ is the Hilbert functional on $\mathcal{B}$.

Theorem 1 (Polar Representation Theorem)**.** *Let $\mathcal{B}$ be a separable Banach space. If $A \in \mathbb{C}[\mathcal{B}]$, then there exists a partial isometry U and a self-adjoint operator T, with $D(T) = D(A)$ and $A = UT$. Furthermore, $T = [A^*A]^{1/2}$ in a well-defined sense.*

Def. If $A \in \mathbb{S}_1[\mathcal{B}]$, we called it a trace class (or nuclear) operator on $\mathcal{B}$.
 * Since $\mathbb{S}_p[\mathcal{H}]$ is a two sided *ideal, it follows that the same is true for $\mathbb{S}_p[\mathcal{B}]$.
 * For $1 \le p < \infty$, $A \in \mathbb{S}_p[\mathcal{B}]$ and $B \in \mathcal{L}[\mathcal{B}]$ then $AB, BA \in \mathbb{S}_p[\mathcal{B}]$ and

$$\|AB\|_{\mathbb{S}_p[\mathcal{B}]} \le \|B\|_{\mathcal{L}[\mathcal{B}]} \|A\|_{\mathbb{S}_p[\mathcal{B}]}$$
$$\|BA\|_{\mathbb{S}_p[\mathcal{B}]} \le \|B\|_{\mathcal{L}[\mathcal{B}]} \|A\|_{\mathbb{S}_p[\mathcal{B}]}$$

Lemma 2. *If $\lambda \notin \sigma(L_0)$ then $QR_0(\lambda) \in \mathbb{S}_1[\mathcal{H}_1]$*

Lemma 3. *The operator valued function $R(\lambda) - R_0(\lambda)$ is analytic in $\rho(L)$, the resolvent set of L, with respect to the $\mathbb{S}_1[\mathcal{H}_1]$ norm.*

Theorem 4. *The regularized trace formula for operator L on B with the conditions on operator function $Q(t)$ is given by*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{mn} - \mu_m) - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi trQ(t)dt\right] = \frac{1}{4}[tr(Q(0) + trQ(\pi)$$

References

[1] A. Grothendieck, *Products tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Memoirs of the American Mathematical Society, **16** (1955).

[2] E. Gül, On the regularized trace of a second order differential operator, *Applied Mathematics and Computation* 198: 471-480, 2008.

[3] T. L. Gill and W. W. Zachary, *Functional Analysis and the Feynman operator Calculus*, Springer, New York, (2016).

[4] J. Kuelbs, *Gaussian measures on a Banach space,* Journal of Functional Analysis **5** (1970), 354–367.

[5] P. D. Lax, *Symmetrizable linear tranformations,* Comm. Pure Appl. Math. **7** (1954), 633-647.

[6] G. Lumer, Spectral operators, Hermitian operators and bounded groups, *Acta. Sci. Math.* (Szeged) **25** (1964), 75-85.

[7] L. A. Lusternik and V. J. Sobolev, Elements of functional analysis, (English Translation) Fredrich Ungar, New York, (1979).

[8] G. Maksudov, M. Bayramoglu and E. E. Adıgüzelov, *On regularized trace of Sturm-Liouville operator on a finite interval with the unbounded operator coefficient*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30(1)**, (1984), 169-173.

[9] A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Operator Theory*, Birkhäuser, Boston, (2007).

[10] S. J. Szarek, *Banach space without a basis which has the bounded approximation property*, Acta Math. **159**, (1987), 81-98.

Centrally extended generalization of the superconformal loop Lie algebra and integrable heavenly type systems on supermanifolds

Oksana Ye. Hentosh
(Pidstryhach Inst. for Applied Problems of Mech. and Math., NASU, Lviv, Ukraine)
E-mail: ohen@ua.fm

Let us consider the semi-direct sum $\tilde{\mathcal{G}} \ltimes \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$ of the loop Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}} := \widetilde{diff}(\mathbb{T}^{1|N})$, consisting of the superconformal vector fields on a supertor $\mathbb{T}^{1|N}$ in the forms:

$$\tilde{a} := a\partial/\partial x + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{N} (D_{\vartheta_i} a) D_{\vartheta_i}, \quad a := a(x, \vartheta; \lambda), \tag{1}$$

where $a \in C^\infty(\mathbb{T}^{1|N} \times (\mathbb{D}^1_+ \cup \mathbb{D}^1_-); \Lambda_0)$, $(x, \vartheta) \in \mathbb{T}^{1|N} \simeq \mathbb{S}^1 \times \Lambda_1^N$, $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ is a infinite-dimensional Grassmann algebra over $\mathbb{C} \supset \Lambda_0$, $\vartheta := (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_N)$ and $D_{\vartheta_i} := \partial/\partial\vartheta_i + \vartheta_i \partial/\partial x$, $i = \overline{1, N}$, which are holomorphic in the "spectral" parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ on the interior $\mathbb{D}^1_+ \subset \mathbb{C}$ and exterior $\mathbb{D}^1_- \subset \mathbb{C}$ regions of the unit centrally located disk $\mathbb{D}^1 \subset \mathbb{C}$, and its regular dual space $\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$ with respect to the parity:

$$(\tilde{l}, \tilde{a})_0 = \operatorname{res} \lambda^{-1} \int_{\mathbb{T}^{1|N}} dx d^N\vartheta\, (la), \quad \tilde{l} := l(x, \vartheta; \lambda)(dx + \sum\nolimits_{i=1}^{N} \vartheta_i d\vartheta_i) \in \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}, \tag{2}$$

where $l \in C^\infty(\mathbb{T}^{1|(2k-1)} \times (\mathbb{D}^1_+ \cup \mathbb{D}^1_-); \Lambda_1)$ if $N = 2k-1$ and $l \in C^\infty(\mathbb{T}^{1|2k} \times (\mathbb{D}^1_+ \cup \mathbb{D}^1_-); \Lambda_0)$ if $N = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. The superconformal loop Lie algebra $\tilde{\mathcal{G}}$ possesses the commutator:

$$[\tilde{a}, \tilde{b}] = \tilde{c}, \quad \tilde{c} := c\partial/\partial x + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{N} (D_{\vartheta_i} c) D_{\vartheta_i},$$

$$c := a(\partial b/\partial x) - b(\partial a/\partial x) + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{N} (D_{\vartheta_i} a)(D_{\vartheta_i} b), \quad \tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{G}},$$

splits into the direct sum of its Lie subalgebras $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-$, for which the following dual spaces are identified: $\tilde{\mathcal{G}}^*_{+,reg} \simeq \tilde{\mathcal{G}}_-$, $\tilde{\mathcal{G}}^*_{-,reg} \simeq \tilde{\mathcal{G}}_+$. Here $\tilde{a}(\infty) = 0$ for any $\tilde{a}(\lambda) \in \tilde{\mathcal{G}}_-$. On $\tilde{\mathcal{G}} \ltimes \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$ one determines the commutator:

$$[\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, \tilde{b} \ltimes \tilde{m}] := [\tilde{a}, \tilde{b}] \ltimes (ad^*_{\tilde{a}} \tilde{m} - ad^*_{\tilde{b}} \tilde{l}), \quad \tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{\mathcal{G}}, \quad \tilde{l}, \tilde{m} \in \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg},$$

where ad^* is the co-adjoint action of $\tilde{\mathcal{G}}$ with respect to the parity (2) and

$$ad^*_a l = l_x a + \frac{4-N}{2} l a_x + \frac{(-1)^{N+1}}{2} \sum\nolimits_{i=1}^{N} (D_{\vartheta_i} l)(D_{\vartheta_i} a)$$

for any vector field $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{G}}$ and a fixed element $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$, as well as nondegenerate symmetric bilinear form:

$$(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, \tilde{b} \ltimes m) = (\tilde{l}, \tilde{b})_0 + (\tilde{m}, \tilde{a})_0.$$

One constructs the central extension $\hat{\mathfrak{G}} := \tilde{\mathfrak{G}} \oplus \mathbb{C}$ of the Lie algebra $\tilde{\mathfrak{G}} := \prod_{z \in \mathbb{S}^1} (\tilde{\mathcal{G}} \ltimes \tilde{\mathcal{G}}^*_{reg})$ by the 2-cocycle [1]:

$$\omega_2(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, \tilde{b} \ltimes m) = \int_{\mathbb{S}^1} dz((\tilde{l}, \partial\tilde{b}/\partial z)_0 - (\tilde{m}, \partial\tilde{a}/\partial z)_0), \quad (\tilde{a} \ltimes \tilde{l}), (\tilde{b} \ltimes \tilde{m}) \in \tilde{\mathfrak{G}}, \quad z \in \mathbb{S}^1.$$

The Lie algebra $\tilde{\mathfrak{G}}$ permits the standard splitting $\tilde{\mathfrak{G}} := \tilde{\mathfrak{G}}_+ \oplus \tilde{\mathfrak{G}}_-$ of the Lie algebra $\tilde{\mathfrak{G}}$ into the direct sum of its Lie subalgebras $\tilde{\mathfrak{G}}_+ := \prod_{z \in \mathbb{S}^1} (\tilde{\mathcal{G}}_+ \ltimes \tilde{\mathcal{G}}^*_{-,reg})$ and $\tilde{\mathfrak{G}}_- := \prod_{z \in \mathbb{S}^1} (\tilde{\mathcal{G}}_- \ltimes \tilde{\mathcal{G}}^*_{+,reg})$). Thus, by means of the $\mathcal{R}$-operator approach [2] one introduces the following Lie-Poisson bracket:

$$\begin{aligned}\{\mu, \nu\}_{\mathcal{R}} = {}& (\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, [R\nabla_r \mu(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}), \nabla_l \nu(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})] + [\nabla_r \mu(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}), R\nabla_l \nu(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})]) + \\ & + \omega_2(R\nabla_r \mu(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}), \nabla_l \nu(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})) + \omega_2(\nabla_r \mu(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}), R\nabla_l \nu(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})),\end{aligned} \tag{3}$$

where $\mu, \nu \in \mathcal{D}(\tilde{\mathfrak{G}}^*)$ are arbitrary smooth by Frechet functionals on $\tilde{\mathfrak{G}}^*$, $\mathcal{R} = (P_+ - P_-)/2$, P_+ and P_- are projectors on $\tilde{\mathfrak{G}}_+$ and $\tilde{\mathfrak{G}}_-$ respectively, on the dual space $\tilde{\mathfrak{G}}^* \simeq \tilde{\mathfrak{G}}$ to the Lie algebra $\tilde{\mathfrak{G}}$. Here $\nabla_l h(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) := (\nabla_l h_{\tilde{l}} \ltimes \nabla_l h_{\tilde{a}}) \in \tilde{\mathfrak{G}}$ and $\nabla_r h(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) := (\nabla_r h_{\tilde{l}} \ltimes \nabla_r h_{\tilde{a}}) \in \tilde{\mathfrak{G}}$ are left and right gradients of any smooth functional $h \in \mathcal{D}(\tilde{\mathfrak{G}}^*)$ at a point $(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) \in \tilde{\mathfrak{G}}^*$. Due to the Adler-Kostant-Symes theory [2] the Lie-Poisson bracket (3) generates the hierarchy of Hamiltonian flows:

$$\partial(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})/\partial t_p := -ad^*_{P_+\nabla_l h^{(p)}(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})}(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) = \{\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, h^{(p)}\}_{\mathcal{R}}, \quad (\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) \in \tilde{\mathfrak{G}}^*, \quad p \in \mathbb{Z}_+,$$

where $P_+\nabla_l h^{(p)}(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) = (\nabla_l h^{(p)}_{\tilde{l},+} \ltimes \nabla_l h^{(p)}_{\tilde{a},+})$, $\nabla_l h^{(p)}(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) = \lambda^p \nabla_l h(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})$, $\nabla_l h_{\tilde{l}} \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \nabla_l h_{\tilde{l},j}\lambda^{-j}$ and $\nabla_l h_{\tilde{a}} \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \nabla_l h_{\tilde{a},j}\lambda^{-j}$ as $|\lambda| \to \infty$, for any Casimir invariant $h \in I(\hat{\mathfrak{G}}^*)$, satisfying, by definition, the following relationship:

$$ad^*_{\nabla_l h(\tilde{a}\ltimes\tilde{l})}(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) = 0, \quad (\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) \in \tilde{\mathfrak{G}}^*.$$

Any two Hamiltonian flows on $\tilde{\mathfrak{G}}^*$ in the forms:

$$\partial(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})/\partial y = \{\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, h^{(y)}(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})\}_{\mathcal{R}}, \quad \partial(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})/\partial t = \{\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, h^{(t)}(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})\}_{\mathcal{R}},$$

where $\nabla_l h^{(y)} = \lambda^{p_y} \nabla_l h(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})$, $\nabla_l h^{(t)} = \lambda^{p_t} \nabla_l h(\tilde{a} \ltimes \tilde{l})$, $p_y, p_t \in \mathbb{Z}_+$, and $h \in I(\hat{\mathfrak{G}}^*)$, give rise to the separately commuting evolution equations:

$$\partial\tilde{a}/\partial y = -[\nabla_l h^{(y)}_{\tilde{l},+}, \tilde{a}] + \partial(\nabla_l h^{(y)}_{\tilde{l},+})/\partial z, \quad \partial\tilde{a}/\partial t = -[\nabla_l h^{(t)}_{\tilde{l},+}, \tilde{a}] + \partial(\nabla_l h^{(t)}_{\tilde{l},+})/\partial z, \tag{4}$$

and

$$\partial\tilde{l}/\partial y = -ad^*_{\nabla_l h^{(y)}_{\tilde{l},+}}\tilde{l} + ad^*_{\tilde{a}}\nabla_l h^{(y)}_{\tilde{a},+} + \partial(\nabla_l h^{(y)}_{\tilde{a},+})/\partial z,$$
$$\partial\tilde{l}/\partial t = -ad^*_{\nabla_l h^{(t)}_{\tilde{l},+}}\tilde{l} + ad^*_{\tilde{a}}\nabla_l h^{(t)}_{\tilde{a},+} + \partial(\nabla_l h^{(t)}_{\tilde{a},+})/\partial z.$$

Proposition 1. *The commutativity of evolutions* (4) *is equivalent to the relationship:*

$$[\nabla_l h^{(y)}_{\tilde{l},+}, \nabla_l h^{(t)}_{\tilde{l},+}] - \partial(\nabla_l h^{(y)}_{\tilde{l},+})/\partial t + \partial(\nabla_l h^{(t)}_{\tilde{l},+})/\partial y = 0, \tag{5}$$

which is reduced on every coadjoint orbit of the Lie algebra $\hat{\mathfrak{G}}$ to the Lax-Sato representation for some system of nonlinear heavenly type equations on a functional supermanifold. The relationship (5) *is a compatibility condition for the following linear vector equations:*

$$\partial\psi/\partial y + \nabla_l h^{(y)}_{\tilde{l},+}\psi = 0, \quad \partial\psi/\partial z + \tilde{a}\psi = 0, \quad \partial\psi/\partial t + \nabla_l h^{(t)}_{\tilde{l},+}\psi = 0,$$

where $(y, t; \lambda, z, x, \theta) \in (\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^{1|N}))$ and $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^{1|N})); \mathbb{C})$.

By use of the Lax-Sato compatibility condition (5) one can construct integrable systems of heavenly type equations on functional supermanifolds, which can be considered as generalizations of Lax-Sato integrable superanalogs [3] of the Mikhalev-Pavlov heavenly type equation, choosing the smooth functions $a := \sum_{k=1}^{K-1} w_{k,x}(x,\theta)\lambda^k - \lambda^K$ and $l := \sum_{k=1}^{K-1} \xi_{k,x}(x,\theta)\lambda^k$, $K \in \mathbb{N}$, in (1) and (2) respectively.

References

[1] Valentin Ovsienko, Claude Roger. Looped cotangent Virasoro algebra and non-linear integrable systems in dimension $2+1$. *Communications in Mathematical Physics*, 273(2) : 357–378, 2007.

[2] Ludwig D. Faddeev, Leon A. Takhtadjan. *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, *Classics in mathematics*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2007.

[3] Oksana Hentosh, Yarema Prykarpatsky Ya. The Lax-Sato integrable heavenly equations on functional supermanifolds and their Lie-algebraic structure. *European Journal of Mathematics*, 6(1) : 232–247, 2020.

Structure of functions on an oriented 2-manifold with the boundary

Bohdana Hladysh
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine)
E-mail: bohdanahladysh@gmail.com

Alexandr Prishlyak
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine)
E-mail: prishlyak@yahoo.com

Smooth functions are the tool of investigation in many scientific fields. Thus, their classification are important enough. There is a number of papers devoted to functions with non–degenerate singularities on a surface with the boundary [1–5]. Furthermore, there are significant results dedicated to topological structure of spaces of smooth functions with isolated critical points was presented in [6–10].

Let M (and N) be smooth compact connected oriented surface with the boundary ∂M. We consider the class of functions $\Omega(M) = \{f : M \to \mathbb{R} | CP(f) = NDCP(f) \supset CP(f|_{\partial M}) = NDCP(f|_{\partial M})\}$, where $CP(f)$ ($NDCP(f)$) is the set of (non-degenerated) critical points of f.

Theorem 1. *The following statements hold true:*

1) *for arbitrary function $f \in \Omega(M)$ there exists the m-function $g : M \to \mathbb{R}$ which is topologically equivalent to f;*
2) *for arbitrary m-function $g : M \to \mathbb{R}$ there exists the function $f \in \Omega(M)$ such that f and g are topologically equivalent.*

Definition 2. Smooth functions $f \in \Omega(M)$ and $g \in \Omega(N)$ are called *$\mathcal{O}$-equivalent* if there exists a homeomorphism $\lambda : M \to N$, which maps the components of the level sets of f onto the components of the level sets of g, preserve the growing directions of functions and preserve the orientation. The $\mathcal{O}$-equivalence class of the pair $(U, f|_U)$ is called and $\mathcal{O}$-atom for an oriented surface, where U is the union of connected component of the (small enough) neighborhood of critical level, which contain the critical points.

Let $f \in \Omega(M)$. The components of level lines of the function f are said to be layers. These layers are homeomorphic to the circle or to the line segment for regular values of the function. Then, the surface M can be considered as the union of layers and we get the foliation with singularities. We call a layer by the layer of the first (the second) type if it corresponds to the component homeomorphic to the line segment (circle). Let us consider the equivalence relation on M, such that points are equivalent if and only if they belong to the same layer. Thus, after examining of nature factor-topology we get the graph Γ_f with edges of two types. In such a way we get the classification of edges being called *edges division* of graph Γ_f.

Definition 3. The vertices with degrees 3 and 4 of graph Γ_f of function f, which are incident to the first type edges are said to be Y and X-*vertices* correspondingly.

Definition 4. *Equipped Reeb graph* of a function $f \in \Omega(M)$ is graph Γ_f with edges division, orientation and cycle order at Y and X-vertices.

Definition 5. Equipped Reeb graphs Γ_f and Γ_g of functions $f, g \in \Omega(M)$ are said to be *equivalent* by means of the isomorphism $\varphi : \Gamma_f \to \Gamma_g$ (denote by $\Gamma_f \sim \Gamma_g$ or $\Gamma_f \sim_\varphi \Gamma_g$) if φ satisfies the following statements:

(1) preserve the division of the edges;
(2) preserve the cycle orders of the edges at each X and Y-vertex;
(3) preserve the edges orientation.

Theorem 6. *Let M, N be smooth compact surfaces (with the boundaries), such that $f \in \Omega(M)$, $g \in \Omega(N)$. Then f and g are $\mathcal{O}$-equivalent if and only if their equipped Reeb graphs Γ_f and Γ_g are equivalent.*

Further the first and the second type edges of the graph Γ_f are said to be I and O-edges correspondingly. To define the genus of the surface we consider the following designation: let E_{I} (E_{O}) be a number of I-edges (O-edges) and V_{I} (V_{O}) be a number of the vertices which are incident only with I-edges (O-edges). The number of components of the boundary of the surface M we denote by ∂.

Theorem 7. *Let graph Γ_f of a function $f \in \Omega(M)$ includes either O-edges, or I-edges. Then the genus of the surface can be calculated from the formulas (1) and (2) correspondingly, where*

$$g_{\mathsf{O}} = E_{\mathsf{O}} - V_{\mathsf{O}} + 1 \tag{1}$$

$$g_{\mathsf{I}} = \frac{E_{\mathsf{I}} - V_{\mathsf{I}} + 2 - \partial}{2} \tag{2}$$

Definition 8. A vertex with degree 2 (3) of the graph Γ_f of a function f, which are incident with the edges of both types, are said to be T-*vertex* (D-*vertex*).

Theorem 9. *The genus of a surface can be calculated from the following formula*

$$g = g_{\mathsf{O}} + g_{\mathsf{I}} + V_{\mathsf{D}} + V_{\mathsf{T}} - c_{\mathsf{O}} - c_{\mathsf{I}} + 1 \tag{3}$$

where g_{O} is a summary genus of the subgraph which consists only edge of the second type, such that the genus of each graph components is defined by the formula 1, g_{I} is a summary genus of the subgraph which consists only edge of the first type, such that the genus of each graph components is defined by the formula 2, V_{D} is the number of D-vertices and V_{T} is the number of T-vertices, c_{O} is the number of connected components of the subgraph which consists only edge of the second type and c_{I} is the number of connected components of the subgraph which consists only edge of the first type.

Corollary 10. *Let f be m-function. Then the formulas 1, 2 and 3 hold true.*

References

[1] A. Jankowski, R. Rubinsztein. Functions with non-degenerate critical points on manifolds with boundary. *Comment. Math.*, 16 : 99–112, 1972.

[2] S.I. Maksumenko. Classification of m-functions on surfaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, 51(8): 1129–1135 , 1999.

[3] B.I. Hladysh, A.O. Prishlyak. Functions with nondegenerate critical points on the boundary of the surface. *Ukrainian Mathematical Journal*, 68(1): 28–37, 2016.

[4] M. Borodzik, A. Némethi, A. Ranicki. Morse theory for manifolds with boundary. *Algebraic and Geometric Topology*, 16: 971–1023, 2016.

[5] B.I. Hladysh, A.O. Prishlyak. Simple Morse functions on an oriented surface with boundary. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 15(3): 354—368, 2019.

[6] V. V. Sharko. Smooth and topological equivalence of functions on surfaces. *Ukrainian Mathematical Journal*, 55(5): 832–846, 2003.

[7] A.O. Prishlyak. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface. *Topology and its Applications*, 119(3): 257–267, 2002.

[8] A.O. Polulyakh. *On the Pseudo–harmonic Functions Defined On a Disk*, volume 80 of *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* Kyiv: Inst. Mat. NAN Ukr., 2009.

[9] B.I. Hladysh, A.O. Prishlyak. Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 13(050): 2017.

[10] B.I. Hladysh. Functions with isolated critical points on the boundary of a nonoriented surface. *Nonlinear Oscillations*, 23(1): 26–37, 2020.

The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a multidimensional bounded domain

D. A. Juraev
(The Higher Military Aviation School of the Republic of Uzbekistan, Karshi city, Uzbekistan)
E-mail: juraev_davron@list.ru

It is known that the Cauchy problem for elliptic equations is unstable relatively small change in the data, i.e., is incorrect (Hadamard's example). In unstable problems the image of the operator is not closed, therefore the solvability condition can not be written in terms of continuous linear functionals. Thus, in the Cauchy problem for elliptic equations with data on a part of the boundary of the region, the solution is usually unique, the problem is solvable for an everywhere dense set of data, but this set not closed. Consequently, the theory of solvability of such problems is essentially It is more difficult and deeper than the theory of solvability of the Fredholm equations. The first results in this direction appeared only in the mid-1980s in the works of L.A. Aizenberg, A.M. Kytmanov, N.N. Tarkhanov (See, for instance [1]).

Let $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ be are points of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ and $G \subset \mathbb{R}^m$ be a bounded simply-connected domain with piecewise smooth boundary consisting of the plane T: $y_m = 0$ and of a smooth surface S lying in the half-space $y_m > 0$, that i.s., $\partial G = S \bigcup T$.

We consider in the domain G a system of differential equations

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x) = 0, \tag{1}$$

where $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ is the matrix of first-order differential operators.

We denote by $A(G)$ the class of vector functions in a domain G continuous on $\overline{G} = G \bigcup \partial G$ and satisfying system (1).

Problem 1. Suppose that $U(y) \in A(G)$ and

$$U(y)|_S = f(y), \ y \in S.$$

Here, $f(y)-$ a given continuous vector-valued function on S.

It is required to restore the vector function $U(y)$ in the region G, based on its values $f(y)$ on S.

Theorem 2. *Let $U(y) \in A(G)$ it satisfy the inequality*

$$|U(y)| \leq M, \ y \in T.$$

If

$$U_\sigma(x) = \int_S N_\sigma(y, x) U(y) ds_y, \quad x \in G,$$

then the following estimate holds

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq C(x)\sigma e^{-\sigma x_m}, \ \sigma > 1, \ x \in G.$$

Here and below functions bounded on compact subsets of the domain G, we denote by $C(x)$.

Corollary 3. *The limiting equality*

$$\lim_{\sigma \to \infty} U_\sigma(x) = U(x),$$

holds uniformly on each compact set in the domain G.

In the future, we will construct the Carleman matrix for matrix factorizations of the Helmholtz equation in multidimensional bounded domain and based on it we will find an approximate solution to the Cauchy problem in explicit form, using the methodology of previous works (See, for instance [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13]).

In many well-posed problems for a system of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients, the factorizing operator of Helmholtz, the calculation of the value of the vector function on the whole boundary is inaccessible. Therefore, the problem of reconstructing, solving a system of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients, the factorizing operator of Helmholtz, is one of the topical problems in the theory of differential equations (See, for instance [9, 10, 11, 12, 14]).

References

[1] N.N. Tarkhanov, *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, volume 7 of *Mathematical topics*, Akad. Verl.: Berlin, 1995.

[2] D.A. Juraev, *Regularization of the Cauchy problem for systems of equations of elliptic type. LAP, Lambert Academic Publishing*, Saarbrucken: Germany, 2014.

[3] D.A. Juraev, The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 14: 752–764, 2017.

[4] D.A. Juraev, Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 69(10): 1364–1371, 2017.

[5] D.A. Juraev, On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 15: 11–20, 2018.

[6] D.A. Juraev, The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^3$. *Journal of Universal Mathematics*, 1(3): 312–319, 2018.

[7] D.A. Juraev, On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain in $\mathbb{R}^2$. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 15: 1865–1877, 2018.

[8] D.A. Juraev, On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. *Advanced Mathematical Models & Applications*, 4(1): 86–96, 2018.

[9] D.A. Juraev, On the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. *International Conference "Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations". Book of Abstracts. Ufa, Russia*, Pp. 41–42, 2019.

[10] D.A. Juraev, On the integral formula for the matrix factorization of the Helmholtz equation in $m-$dimensional bounded domain. *International Mathematical Conference "Complex Analysis and Approximation Theory". Book of Abstracts. Ufa, Russia*, Pp. 20–21, 2019.

[11] D.A. Juraev, On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in $m-$dimensional bounded domain. *International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis". Odessa. Ukraine. Book of abstracts*, Pp. 27–28, 2019.

[12] D.A. Juraev, On the Cauchy problem for matrix factorization of the Helmholtz equation. *Uzbek-Russian Scientific Conference "Non-classical equations of mathematical physics and their applications". Tashkent, Uzbekistan*, Pp. 563–565, 2019.

[13] D.A. Juraev, On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. *Journal of Universal Mathematics*, 2(2): 113–126, 2019.

[14] D.A. Juraev, The integral formula for matrix factorizations of the Helmholtz equation in multidimensional space. *Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations, Book of Abstracts of the International Conference. Ufa, Russia*, Pp. 30–31, 2020.

Fejer Sums and the von Neumann Ergodic Theorem

Alexander Kachurovskii
(Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)
E-mail: agk@math.nsc.ru

The Fejér sums of periodic measures and the norms of the deviations from the limit in the von Neumann ergodic theorem are calculated, in fact, using the same formulas (by integrating the Fejér kernels), so this ergodic theorem is a statement about the asymptotics of the growth of the Fejér sums at zero for the spectral measure of the corresponding dynamical system.

As a result, well-known estimates for the rates of convergence in the von Neumann ergodic theorem can be restated as estimates of the Fejér sums at the point for periodic measures. For example, natural criteria for the polynomial growth and polynomial decrease in these sums can be obtained.

On the contrary, available in the literature, numerous estimates for the deviations of Fejér sums at a point can be used to obtain new estimates for the rate of convergence in this ergodic theorem. For example, for many dynamical systems popular in applications, the rates of convergence in the von Neumann ergodic theorem can be estimated with a sharp leading coefficient of the asymptotic by applying S.N. Bernstein's more than hundred-year old results in harmonic analysis.

References

[1] Alexander G. Kachurovskii, Kirill I. Knizhov. Deviations of Fejer Sums and Rates of Convergence in the von Neumann Ergodic Theorem. *Dokl. Math*, 97(3) : 211–214, 2018.

[2] Alexander G. Kachurovskii, Ivan V. Podvigin. Fejer Sums for Periodic Measures and the von Neumann Ergodic Theorem *Dokl. Math.*, 98(1) : 344–347, 2018.

Mixed volumes/areas and distribution of zeros of holomorphic functions

Bulat N. Khabibullin
(Bashkir State University, Ufa, Bashkortostan, Russian Federation)
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Roman R. Muryasov
(Bashkir State University, Ufa, Bashkortostan, Russian Federation)
E-mail: romrumur@yandex.ru

We denote by $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^+_* := \mathbb{R}^+ \setminus 0$, and $\mathbb{C}$ the sets of *natural,* of *real,* of *positive,* of *strictly positive,* and of *complex* numbers, each endowed with its natural order ($\leq$, $\sup / \inf$), algebraic, geometric and topological structure.

Mixed areas/volumes. Let S be a bounded subset in $\mathbb{C}$ with the *support function* [1, Ch. 1], [2]

$$\mathsf{Sp}_S(z) \underset{z\,\in\,\mathbb{C}}{:=} \sup_{w \in S} \operatorname{Re}(z\bar{w}), \quad \mathsf{sp}_S(t) \underset{t\,\in\,\mathbb{R}}{:=} \mathsf{Sp}_S(e^{it}), \text{ and } \quad \Delta_S(t) \underset{t\,\in\,\mathbb{R}}{:=} (\mathsf{sp}_S)'_{\text{left}}(t) + \int_0^t \mathsf{sp}_S(x)\,\mathrm{d}x,$$

where $(\mathsf{sp}_S)'_{\text{left}}$ is the left derivative of sp_S. The *mixed area (of Minkowski)* $\mathsf{F}(S_1, S_2)$ of bounded sets $S_1, S_2 \subset \mathbb{C}$ is integrals [1, Ch. 1, 3], [2], [3, § 4]

$$\mathsf{F}(S_1, S_2) := \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathsf{sp}_{S_1}(t)\,\mathrm{d}\Delta_{S_2}(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Bigl(\mathsf{sp}_{S_1}\mathsf{sp}_{S_2} - (\mathsf{sp}_{S_1})'_{\text{left}}(\mathsf{sp}_{S_2})'_{\text{left}}\Bigr)(t)\,\mathrm{d}t = \mathsf{F}(S_2, S_1).$$

Convexity with respect to a pair of functions. Let $I \subset \mathbb{R}$ be an open interval, and let $f_1 \colon I \to \mathbb{R}$ and $f_2 \colon I \to \mathbb{R}$ be a pair of functions. A function $g \colon I \to \mathbb{R}$ will be called *convex with respect to the pair* f_1, f_2, or, briefly, (f_1, f_2)*-convex* if there is a number $d > 0$ such that for each $x_1, x_2 \in I$ with $|x_1 - x_2| < d$ and for each $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ such that

$$g(x_1) \leq C_1 f_1(x_1) + C_2 f(x_1), \quad g(x_2) \leq C_1 f_1(x_2) + C_2 f(x_2),$$

we have $g(x) \leq C_1 f_1(x) + C_2 f(x)$ for each $x \in (x_1, x_2)$ [4, Ch. I, § 1]. So, if $g \colon \mathbb{R}^+_* \to \mathbb{R}^+_*$ is (f_1, f_2)-convex for the pair $f_1 \colon x \underset{x\,\in\,\mathbb{R}^+_*}{\longmapsto} x$ and $f_1 \colon x \underset{x\,\in\,\mathbb{R}^+_*}{\longmapsto} 1/x$, then we say that g is $(x, 1/x)$-convex.

Entire functions in $\mathbb{C}$. Even the following special result develops [3, § 4], [5], [6, Ch. 3, 4.2].

Let $f \neq 0$ be an entire function of exponential type with the indicator of growth of f denoted by

$$\mathsf{Ind}_1[f](z) := \limsup_{0<r\to+\infty} \frac{\ln\bigl|f(rz)\bigr|}{r} \underset{z\,\in\,\mathbb{C}}{\in} \mathbb{R}.$$

The function $\mathsf{Ind}_1[f]$ is convex and positive homogeneous on $\mathbb{C}$. Therefore, there is a non-empty convex compact set $I_f \subset \mathbb{C}$ with $\mathsf{Sp}_{I_f} = \mathsf{Ind}_1[f]$ called the *indicator diagram* of this entire function f.

Theorem 1. *Let $f \neq 0$ be an entire function of exponential type with the indicator diagram I_f. Suppose that the function f vanish on a sequence $\mathsf{Z} = (\mathsf{z}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, i.e., $f(\mathsf{z}_k) = 0$ for each $k \in \mathbb{N}$. If K is a non-empty convex compact subset in $\mathbb{C}$, and $g \colon \mathbb{R}^+_* \to \mathbb{R}^+_*$ is an increasing $(x, 1/x)$-convex function on $\mathbb{R}^+_*$, such that*

$$0 < \liminf_{0<x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} \leq \limsup_{0<x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} < +\infty, \tag{1}$$

then

$$\limsup_{1<a\to+\infty}\limsup_{r\to+\infty}\frac{\pi}{\int\limits_r^{ar} g(1/x)\,\mathrm{d}x}\sum_{r<|\mathsf{z}_k|\leq ar} g\Big(\frac{1}{|\mathsf{z}_k|}\Big)\mathsf{sp}_K\Big(\frac{\mathsf{z}_k}{|\mathsf{z}_k|}\Big)\leq \mathsf{F}(I_f,K). \tag{2}$$

Besides, for the identity function $g\colon x \underset{x\,\in\,\mathbb{R}^+_*}{\longmapsto} x$ *and for any non-empty convex compact subsets* S *and* K *in* $\mathbb{C}$*, there is an entire function* $f\neq 0$ *of exponential type with zero sequence* $\mathsf{Z}=(\mathsf{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$ *and the indicator diagram* $I_f=S$ *such that we have the equality in* (2)*.*

Theorem 1 can be extended to entire functions of finite order $\rho\in\mathbb{R}^+$ of one or several complex variables with significant generalizations of mixed areas/volumes for ρ-convex sets. Thus, we obtain numerous exact results on the completeness of systems of entire functions in classical function spaces on sets in $\mathbb{C}^n$ for $n\in\mathbb{N}$ in terms of the *mutual indicator* of entire function and set [5], [6, Ch. 3, 4.2].

Here we note only the simplest version of the application of Theorem 1 to completeness questions.

Completeness of exponential systems. For a compact subset S of $\mathbb{C}$, we denote by $C(S)\cap\mathrm{Hol}(\mathrm{int}S)$ the normed space of all continuous functions $f\colon S\to\mathbb{C}$ such that the restriction f to the interior $\mathrm{int}S$ of S is holomorphic if this interior $\mathrm{int}S$ is non-empty, equipped with the norm $\|f\|_S:=\sup\limits_{s\in S}\big|f(s)\big|$.

Theorem 2. *Let* S *be a compact subset of the complex plane such that* $\mathbb{C}\setminus S$ *is connected. Let* $\mathsf{Z}=(\mathsf{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$ *be a sequence of pairwise distinct numbers. If there are a non-empty compact convex subset* $K\subset\mathbb{C}$ *and an increasing* $(x,1/x)$*-convex function* $g\colon\mathbb{R}^+_*\to\mathbb{R}^+_*$ *satisfying* (1) *such that*

$$\limsup_{1<a\to+\infty}\limsup_{r\to+\infty}\frac{\pi}{\int\limits_r^{ar} g(1/x)\,\mathrm{d}x}\sum_{r<|\mathsf{z}_k|\leq ar} g\Big(\frac{1}{|\mathsf{z}_k|}\Big)\mathsf{sp}_K\Big(\frac{\bar{\mathsf{z}}_k}{|\mathsf{z}_k|}\Big)> \mathsf{F}(I,K).$$

then the closure of the linear hull of $\big\{e^{\mathsf{z}_k s}\colon k\in\mathbb{N}\big\}$ *in* $C(S)\cap\mathrm{Hol}(\mathrm{int}S)$ *coincides with* $C(S)\cap\mathrm{Hol}(\mathrm{int}S)$*.*

Holomorphic functions in the unit disk/ball. In [7] and [8], we first used ρ-trigonometrically convex and ρ-subspherical functions to study zero sets of holomorphic functions on the unit disk in $\mathbb{C}$ and on the unit ball in $\mathbb{C}^n$, respectively. Some of these results can be obtained in a more general form in terms of mixed areas/volumes and Hausdorff measures of zero sets.

The research was supported by a Grant of the Russian Science Foundation, Project No. 18-11-00002.

References

[1] L. A. Santalo. *Integeral Geometry and Geometric Probability.* Addison-Wesley, 1976; Л. Сантало. *Интегральная геометрия и геометрическая вероятность.* М. : Наука, 1983.

[2] K. Leichtweiss. *Convex Sets.* Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenshaften, 1980; К. Лейхтвейс. *Выпуклые множества.* М. : Наука, 1985.

[3] Б. Н. Хабибуллин Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка. *Матем. сб.* 182(6) : 811–827, 1991. `http://www.mathnet.ru/rus/person/8650`; English transl. in: B. N. Khabibullin A uniqueness theorem for subharmonic functions of finite order *Math. USSR-Sb.* 73(1) : 195–210, 1992.

[4] И. И. Ибрагимов. *Методы интерполяции функций и некоторые их применения.* М. : Наука, 1971.

[5] Б. Н. Хабибуллин. Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций. *Матем. заметки*, 66(4) : 603–616, 1999. `http://www.mathnet.ru/rus/person/8650`; English. transl. in: B. N. Khabibullin. Completeness of systems of entire functions in spaces of holomorphic functions. *Math. Notes*, 66(4) : 495–506, 1999.

[6] Б. Н. Хабибуллин. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* Издание четвёртое, дополненное. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. `http://www.researchgate.net/publication/271841461`

[7] B. N. Khabibullin, F. B. Khabibullin. Zeros of holomorphic functions in the unit disk and ρ-trigonometrically convex functions. *Analysis and Math. Physics*, 9(3) : 1087–1098, 2019. See also `https://arxiv.org/abs/1811.10390v1`

[8] B. N. Khabibullin, F. B. Khabibullin. Zeros of Holomorphic Functions in the Unit Ball and Subspherical Functions. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 40(5) : 648–659, 2019. `https://arxiv.org/abs/1811.10391v1`

Leaf preserving isotopies of regular neighborhoods of singular leafs of foliations

O. O. Khokhliuk
(Kyiv, Ukraine)
E-mail: khokhliyk@gmail.com

S. I. Maksymenko
(Kyiv, Ukraine)
E-mail: maks@imath.kiev.ua

Definition 1. Let M be a n-manifold. A foliation of dimension p on M is a partition $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ of M into subsets of $\mathcal{F}_\alpha$ such that for each point $x \in M$ there exist a neighborhood U_x and a diffeomorphism $\phi\colon U_x \to \mathbb{R}^n$ with the following property: if $U_x \cap \mathcal{F}_\alpha \neq \emptyset$, then for each connected component K the set $U_x \cap \mathcal{F}_\alpha$, $\phi(K)$ coincides with the plane of the form $\{x_n = C\}$ for any $C \in \mathbb{R}$.

Let Σ be a smooth compact manifold and $p\colon E \to \Sigma$ a vector bundle over Σ. Denote by E_x the leaf $p^{-1}(x)$ above the point $x \in \Sigma$.

Definition 2. A partition $\mathcal{F}$ of the total space E will be called a singular foliation of class $\mathcal{Z}$, if it satisfies the following conditions:

1) Σ (as a zero section) is an element of $\mathcal{F}$ and the restriction $\mathcal{F}|_{E\setminus\Sigma}$ is a foliation (in the usual sense, see Definition 1);

2) there exists an open tubular neighborhood U of Σ in E such that for any points (x, v) and $(y, w) \in E$, belonging to the same leaf L and for any number $t > 0$, if (x, tv) and (y, tw) are contained in U, then they also belong to the same leaf.

Let $\mathcal{F}$ be a foliation of class Z on E. Denote by $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ the group of diffeomorphisms of E, which leave invariant each leaf of the foliation $\mathcal{F}$, and by $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \Sigma)$ the subgroup of diffeomorphisms $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ fixed on Σ. Let $Y = \{(x, v) \mid ||v||^2 \leq 1\} \subset E$ be a neighborhood Σ. We also denote by $\mathcal{D}^{lin}(\mathcal{F}, \Sigma; Y)$ the subgroup of $\mathcal{D}(\mathcal{F}, \Sigma)$, consisting of diffeomorphisms h having the following properties: $h(Y \cap E_x) \subset E_x$ for each point $x \in \Sigma$, and the corresponding mapping of the restriction on $Y \cap E_x$, i.e. $h|_{Y\cap E_x}\colon Y \cap E_x \to E_x$ is linear.

Theorem 3. *The following inclusion $\mathcal{D}^{lin}(\mathcal{F}, \Sigma; Y) \subset \mathcal{D}(\mathcal{F}, \Sigma)$ is a homotopy equivalence.*

On the behavior at infinity of one class of homeomorphisms

Bogdan Klishchuk
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine)
E-mail: kban1988@gmail.com

Ruslan Salimov
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine)
E-mail: ruslan.salimov1@gmail.com

Let Γ be a family of curves γ in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. A Borel measurable function $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ is called *admissible* for Γ, (abbr. $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$), if

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \ \geqslant \ 1$$

for any curve $\gamma \in \Gamma$. Let $p \in (1, \infty)$. The quantity

$$M_p(\Gamma) \ = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)$$

is called *p–modulus* of the family Γ.

For arbitrary sets E, F and G of $\mathbb{R}^n$ we denote by $\Delta(E, F, G)$ a set of all continuous curves $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ that connect E and F in G, i.e., such that $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ and $\gamma(t) \in G$ for $a < t < b$.

Let D be a domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$ and $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Set

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,,$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : \, |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1,\, 2\,.$$

Let a function $Q : D \to [0, \infty]$ be Lebesgue measurable. We say that a homeomorphism $f : D \to \mathbb{R}^n$ is ring Q-homeomorphism with respect to p-modulus at $x_0 \in D$ if the relation

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \ \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)$$

holds for any ring $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)\,,\ 0 < r_1 < r_2 < d_0,\ d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ and for any measurable function $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ such that

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1\,.$$

Denote by ω_{n-1} the area of the unit sphere

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \, |x| = 1\}$$

in $\mathbb{R}^n$ and by

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}\, r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0, r)} Q(x)\, d\mathcal{A}$$

the integral mean over the sphere

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \, |x - x_0| = r\},$$

where $d\mathcal{A}$ is the element of the surface area. Let $L(x_0, f, R) = \sup\limits_{|x - x_0| \leqslant R} |f(x) - f(x_0)|\,.$

Theorem 1. *Suppose that $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ is a ring Q-homeomorphism with respect to p-modulus at a point x_0 with $p>n$ where x_0 is some point in $\mathbb{R}^n$ and for some numbers $r_0>0$, $K>0$ the condition*

$$q_{x_0}(t)\leqslant K\,t^{\alpha}$$

holds for a.e. $t\in[r_0,+\infty)$. If $\alpha\in[0,p-n)$ then

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,f,R)}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}}\geqslant K^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}>0\,.$$

If $\alpha=p-n$ then

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,f,R)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}}\geqslant K^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}>0\,.$$

This work was supported by the budget program “Support of the development of priority trends of scientific researches” (KPKVK 6541230).

Automorphisms of cellular divisions of 2-sphere induced by functions with isolated critical points

Anna Kravchenko
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine)
E-mail: annakravchenko1606@gmail.com

Sergiy Maksymenko
(Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine)
E-mail: maks@imath.kiev.ua

In general, if $f : M \to \mathbb{R}$ is an arbitrary smooth function with isolated critical points, then a certain part of its "combinatorial symmetries" is reflected by a so-called *Kronrod-Reeb* graph Δ_f, see e.g. [6, 2, 5, 4, 14, 13, 12, 1]. Such a graph is obtained by shrinking each connected component of each level set $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, of f into a point.

Let $\mathcal{D}(M)$ the group of diffeomorphisms of M and

$$\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid f(h(x)) = f(x) \text{ for all } x \in M\}$$

be the group of diffeomorphisms h of M which "preserve" f in the sense that h leaves invariant each level set $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, of f. Hence it yields a certain permutation of connected components of $f^{-1}(c)$ being points of Δ_f, and thus induces a certain map $\rho(h) : \Delta_f \to \Delta_f$. It can be shown that $\rho(h)$ is a homeomorphism of Δ_f, and the correspondence $\rho : h \mapsto \rho(h)$ is a *homomorphism* of groups

$$\rho : \mathcal{S}(f) \to \mathcal{H}(\Delta_f),$$

where $\mathcal{H}(\Delta_f)$ is the group of homeomorphisms of Δ_f. One can also verify that the image of $\rho(\mathcal{S}(f))$ is a *finite* group.

Let also $\mathcal{D}_{id}(M)$ be the identity path component of $\mathcal{D}(M)$, and

$$\mathcal{S}'(f) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{id}(M)$$

be the group of f-preserving diffeomorphisms which are isotopic to the identity via an isotopy consisting of not necessarily f-preserving diffeomorphsms. We will be interested in the group

$$G_f = \rho(\mathcal{S}'(f))$$

of automorphisms of Δ_f induced by elements from $\mathcal{S}'(f)$.

Suppose that the set $\mathrm{Fix}(G_f)$ of common fixed points of all elements of G_f in Δ_f is non-empty. Let also $v \in \mathrm{Fix}(G_f)$ be a vertex of Δ_f fixed under G_f and $Star(v)$ be a *star* of v, i.e. a small G_f-invariant neighborhood of v. Then each $\gamma \in G_f$ induces a homeomorphism of $Star(v)$, and we can also define the group

$$G_v^{loc} = \{\gamma|_{Star(v)} \mid \gamma \in G_f\}$$

of restrictions of elements of G_f to $Star(v)$. We will call G_v^{loc} the *local stabilizer* of v.

Remark 1. We will give now an equivalent description of the group G_v^{loc}. Let K be the critical component of a level-set of f corresponding to the vertex $v \in \Delta_f$. Since $v \in \mathrm{Fix}(G_f)$, we obtain that $h(K) = K$ for all $h \in \mathcal{S}'(f)$. Let $c = f(K)$ be the value of f on K, and $\varepsilon > 0$ be a small number such that the segment $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ contains no other critical values of f except for c. Let also N_K be the connected component of $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ containing K. Notice that the quotient map p induces a bijection between connected components ∂N_K and edges of $Star(v)$. Moreover, $h(N_K) = N_K$ for all $h \in \mathcal{S}'(f)$, and hence h induces a permutation σ_h of connected components of ∂N_K. Then G_v^{loc} is the same as the group of permutations of connected components of ∂N_K induced by h.

In [9, 7, 8, 10, 11], the groups G_v^{loc} were calculated for all Morse functions on all orientable surfaces distinct from S^2. In the present paper, we give a complete description of the structure of the group G_v^{loc} to the case when $M = S^2$. For the convenience of the reader we present a general statement about the structure of the group G_v^{loc} for all orientable surfaces.

Theorem 2. *Let $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ be a Morse function and $v \in \mathrm{Fix}(G_f)$ be some vertex.*

(1) If $M \neq S^2, T^2$, then $G_v^{loc} \approx \mathbb{Z}_n$, for some $n \geq 1$, [9].

(2) If $M = T^2$, then $G_v^{loc} \approx \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_{mn}$, for some $m, n \geq 1$, [7, 8, 10].

(3) Let $M = S^2$. Then the following statements hold.

(a) For each vertex $v \in \mathrm{Fix}(G_f)$, the group G_v^{loc} is isomorphic to a finite subgroup of $SO(3)$, that is, to one of the following groups, see [3, pp. 21-23]:

$$\mathbb{Z}_n, \quad \mathbb{D}_n, \quad \mathbb{A}_4, \quad \mathbb{S}_4, \quad \mathbb{A}_5, \quad (n \geq 1). \tag{1}$$

(b) If $\mathrm{Fix}(G_f)$ has at least one edge, then for any vertex $v \in \mathrm{Fix}(G_f)$, the group G_v^{loc} is cyclic.

(c) If $\mathrm{Fix}(G_f)$ consists of a unique vertex v and G_v^{loc} is non-trivial and cyclic, then $G_v^{loc} \cong \mathbb{Z}_2$.

References

[1] E. B. Batista, J. C. F. Costa, and I. S. Meza-Sarmiento. Topological classifcation of circle-valued simple Morse-Bott functions. *J. Singul*, 17:388-402, 2018.

[2] A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko. *Vvedenie v topologiyu integriruemykh gamiltonovykh sistem (Introduction to the topology of integrable Hamiltonian systems)*. Nauka, Moscow, 1997.

[3] Felix C. Klein. Lectures on the ikosahedron and the solution of equations of the equations of the fiffth degree. *Cornel University Library* , 322:21-23, 1888.

[4] E. A. Kudryavtseva. Realization of smooth functions on surfaces as height functions. *Mat. Sb.*, 190(3):29-88, 1999.

[5] E. V. Kulinich. On topologically equivalent Morse functions on surfaces. *Methods Funct. Anal. Topology*, 4(1):59-64, 1998.

[6] A. S. Kronrod. On functions of two variables.5(1(35)):24-134, 1950. *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*,

[7] S. Maksymenko and B. Feshchenko. Orbits of smooth functions on 2-torus and their homotopy types. *Matematychni Studii* , 44(1):67-84, 2015.

[8] S. Maksymenko and B. Feshchenko. Smooth functions on 2-torus whose kronrod-reeb graph contains a cycle. *Methods Funct. Anal. Topology*, 21(1):22-40, 2015.

[9] Sergiy Maksymenko. Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity difeomorphisms. page arXiv:math/1311.3347, 2016.

[10] Sergiy Maksymenko and Bogdan Feshchenko. Homotopy properties of spaces of smooth functions on 2-torus. *Ukrainian Math. Journal*, 66(9):1205-1212, 2014.

[11] A. Kravchenko and S. Maksymenko. Automorphisms of Kronrod-Reeb graphs of Morse functions on compact surfaces. *European Journal of Mathematics*, page arXiv:1808.08746, 2018.

[12] 33] Lukasz Patryk Michalak. Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 52(2):749-762, 2018.

[13] E. A. Polulyakh. Kronrod-Reeb graphs of functions on noncompact two-dimensional surfaces. II. Ukrainian Math. J. , 67(10):1572-1583, 2016. Translation of Ukranian. *Mat. Zh.* 67 (2015), no. 10, 1398-1408.

[14] V. V. Sharko. Smooth and topological equivalence of functions on surfaces.*Ukr. Mat. Zh.*, 55(5):687-700, 2003.

Dynamics and exact solutions of linear PDEs

Alexei G. Kushner
(Lomonosov Moscow State University, GSP-2, Leninskie Gory, Moscow, Russia)
E-mail: `kushner@physics.msu.ru`

Elena N. Kushner
(Moscow State Technical University of Civil Aviation, 20 Kronshtadtsky blvd, Moscow, Russia)
E-mail: `ekushner@ro.ru`

Ruslan I. Matviichuk
(Lomonosov Moscow State University, GSP-2, Leninskie Gory, Moscow, Russia)
E-mail: `mathvich@gmail.com`

The report presents a new method for constructing exact solutions of the classical linear equations of mathematical physics of parabolic, hyperbolic, elliptic and variable types. The method is a generalization of the theory of finite-dimensional dynamics proposed for evolutionary differential equations [2, 5]. The theory of finite-dimensional dynamics is a natural development of the theory of dynamical systems. Dynamics make it possible to find families that depends on a finite number of parameters among all solutions of PDEs (see [3, 3]).

Consider the following class of second order linear partial differential equations

$$u_{tt} + 2b(x)u_{tx} + c(x)u_{xx} + h(x)u_t + g(x)u_x + f(x) = 0, \tag{1}$$

where b, c, h, g, f are functions of the class C^∞. Such equations are equivalent to the following evolutionary systems

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = -2b(x)v_x - c(x)u_{xx} - h(x)v - g(x)u_x - f(y). \end{cases} \tag{2}$$

We call the system of ordinary differential equations of order $k+1$

$$\begin{cases} y^{(k+1)} = Y\left(x, y, z, y', z' \ldots, y^{(k)}, z^{(k)}\right), \\ z^{(k+1)} = Z\left(x, y, z, y', z' \ldots, y^{(k)}, z^{(k)}\right) \end{cases} \tag{3}$$

a *dynamics* of equation (1) if the vector function

$$(\varphi, \psi) := (z_0, -2b(x)z_1 - c(x)y_2 - h(x)z_0 - g(x)y_1 - f(x))$$

is a generating function of infinitesimal characteristic symmetries of this system [2]. Here x, y_0, z_0, y_1, z_1, y_2, z_2 are canonical coordinates on the space of 2-jets $J^2(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2)$.

Theorem 1. *The vector field on* $J^k(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2)$

$$S = \varphi\frac{\partial}{\partial y_0} + \psi\frac{\partial}{\partial z_0} + \mathcal{D}(\varphi)\frac{\partial}{\partial y_1} + \mathcal{D}(\psi)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \mathcal{D}^k(\varphi)\frac{\partial}{\partial y_k} + \mathcal{D}^k(\psi)\frac{\partial}{\partial z_k} \tag{4}$$

is an infinitesimal characteristic symmetry of system (3) if the following conditions hold:

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{k+1}(\varphi) - S(Y) = 0, \\ \mathcal{D}^{k+1}(\psi) - S(Z) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Here

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y_0} + z_1\frac{\partial}{\partial z_0} + \cdots + y_k\frac{\partial}{\partial y_{k-1}} + z_k\frac{\partial}{\partial z_{k-1}} + Y\frac{\partial}{\partial y_k} + Z\frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Let $\Gamma^k \subset J^2(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2)$ be a k-graph of some solution of system (3) and let Φ_t be the shift along the vector field S. Then the surface $\Phi_t(\Gamma^k)$ is a k-graph of a solution of system (2).

Example 2. Consider the telegraph equation

$$u_{tt} - u_{xx} = au + bu_t + c, \tag{6}$$

where a, b, c are constants. This equation admits two types of dynamics:

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{y_1}{x+\alpha}, \\ z_2 = \dfrac{z_1}{x+\alpha} \end{cases} \tag{7}$$

and

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{2b\alpha - (x+\beta)\alpha^2}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times y_1 - \dfrac{4\alpha}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times z_1, \\ z_2 = -\dfrac{4a\alpha}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times y_1 - \dfrac{2b\alpha + \alpha^2(x+\beta)}{4b^2 + 16a - \alpha^2(x+\beta)^2} \times z_1. \end{cases} \tag{8}$$

Here α, β are arbitrary constants. The general solution of equation (7) is

$$\begin{cases} y(x) = C_3 + C_4(x+\alpha)^2, \\ z(x) = C_1 + C_2(x+\alpha)^2, \end{cases} \tag{9}$$

and the general solution of equation (8) is

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4, \\ z(x) = \dfrac{1}{8\alpha}\left(x(C_2\beta - C_3)(2\beta + x)\alpha^2 + + (8C_1 + 2bx^2C_2 + 4bC_3x)\alpha - 32\left(a + \dfrac{b^2}{4}\right)C_2x\right). \end{cases} \tag{10}$$

Here $C_1, \ldots, C_4$ are arbitrary constants. Applying the shift transformations Φ_t to the obtained general solutions, we obtain particular solutions of equation (6). For example, the function

$$\begin{aligned} u(t,x) = & -1 + \frac{1}{10}\left(\frac{5}{2}x^2 + 5 + (10x + 1 - t)\sqrt{5}\right)e^{-\frac{1}{2}(t\sqrt{5}-1)} + \\ & + \frac{1}{10}\left(\frac{5}{2}x^2 + 5 + (-10x - 1 + t)\sqrt{5}\right)e^{\frac{1}{2}(t\sqrt{5}-1)} \end{aligned} \tag{11}$$

is a solution of equation (6). It corresponds to solution (10) with $a = b = c = 1$, $\alpha = 1, \beta = 0$ and $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 0, C_4 = 0, C_5 = 0$.

This work is partially supported by Russian Foundation for Basic Research, project 18-29-10013 (A. Kushner).

References

[1] Kruglikov B. S., Lychagina O. V. Finite dimensional dynamics for Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov equation. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 19: 13–28, 2005.

[2] Kushner A. G., Matviichuk R.I. Exact solutions of the Burgers – Huxley equation via dynamics. *Journal of Geometry and Physics* 151, 2020.

[3] Kushner A. G., Matviichuk R.I. Finite Dimensional Dynamics of Evolutionary Equations with Maple. *Differential Geometry, Differential Equations, and Mathematical Physics* Springer (in press).

[4] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Cambridge: Cambridge University Press, xxii+496 pp., 2007.

[5] Lychagin V. V., Lychagina O. V. Finite Dimensional Dynamics for Evolutionary Eguations, *Nonlinear Dyn.*, 48: 29–48, 2007.

On the squares of diffeomorphisms of surfaces

Iryna Kuznietsova
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereshchenkivska str. 3, Kyiv, 01024, Ukraine)
E-mail: `kuznietsova@imath.kiev.ua`

Sergiy Maksymenko
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereshchenkivska str. 3, Kyiv, 01024, Ukraine)
E-mail: `maks@imath.kiev.ua`

Let M be a surface and $\mathcal{D}(M)$ be the group of C^∞-diffeomorphisms of M. There is a natural right action of the group $\mathcal{D}(M)$ on the space of smooth functions $C^\infty(M,\mathbb{R})$ defined by the following rule: $(h,f) \longmapsto f \circ h$, where $h \in \mathcal{D}(M)$, $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$.

Thus, the *stabilizer* of f with respect to the action

$$\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \mid f \circ\ h = f\}$$

consists of f-preserving diffeomorphisms of M.

Endow $\mathcal{D}(M)$ with Whitney C^∞-topology and its subspaces $\mathcal{S}(f)$ with induced one. Denote by $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ the identity path component of $\mathcal{S}(f)$.

Definition 1. Denote by $\mathcal{F}(M)$ the space of smooth functions $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ satisfying the following conditions:

(1) The function f takes constant value at each connected component of ∂M and has no critical points in ∂M.
(2) For every critical point z of f there is a local presentation $f_z\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ of f near z such that f_z is a homogeneous polynomial $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ without multiple factors.

Definition 2. A smooth vector field F will be called Hamiltonian-like for $f \in \mathcal{F}(M)$ if the following conditions hold:

(1) $F(x) = 0$ if and only if x is a critical point of f,
(2) f takes constant values on orbits of F,
(3) Let z be a critical point of f. Then there exists a local representation of f at z as a homogeneous polynomial $g\colon (\mathbb{R}^2,0) \to (\mathbb{R},0)$ without multiple factors such that in the same coordinates (x,y) near the origin 0 in $\mathbb{R}^2$ we have $F = -g'_y\frac{\partial}{\partial x} + g'_x\frac{\partial}{\partial y}$.

The smooth flow $\mathbf{F}\colon M \times \mathbb{R} \to M$ generated by a Hamiltonian-like vector field for f will be called Hamiltonian-like flow for f.

Denote by $\Delta^-(f)$ the set of diffeomorphisms from $\mathcal{S}(f)$ leaving invariant each regular connected component of each level-set of f and reverses its orientation.

Theorem 3. *Let D^2 be a 2-disk, $f \in \mathcal{F}(M)$. Suppose there exists $h \in \Delta^-(f)$, i.e. $\Delta^-(f) \neq \varnothing$. Then there exists another $g \in \Delta^-(f)$ such that $g = h$ in a neighborhood of ∂D and $g^2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$.*

Theorem 4. *Let M be an orientable connected compact surface and $f \in \mathcal{F}(M)$. If $\Delta^-(f) \neq \varnothing$, then there exists another $g \in \Delta^-(f)$ such that $g^2 \in \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$.*

A recurrent (CHR)-curvature tensor field in a trans-Sasakian manifold

Koji Matsumoto
(Yamagata University, 2-3-65 Nishi-Odori, Yonezawa, Yamagata, 992-0059, Japan)
E-mail: tokiko_matsumoto@yahoo.com

A tensor field T in a Riemannian manifold is called *recurrent* if it satisfies $\nabla_X T = A(X)T$ for a certain 1-form A which is called *recurrent 1-form*, where ∇ means the covariant differentiation with respect to the Riemannian metric.

Recently, we introduced the notion of (CHR)-*curvature tensor field* in an almost contact Riemannian manifold.

In this talk, we consider the (CHR)-curvature tensor field is recurrent in a trans-Sasakian manifold M, that is, $(\nabla_U(CHR))(X, Y, Z, W) = A(U)(CHR)(X, Y, Z, W)$ for any tangent vector fields U, X, Y, Z, W on M. Then, we show that the Riemannian curvature tensor (resp. (CHR)-curvature tensor) is written by A, α and β.

Spaces of probability measures and box dimension

Natalia Mazurenko
(Department of Mathematics and Computer Science, Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Shevchenka Str., 57, Ivano-Frankivsk,76025, Ukraine.)
E-mail: mnatali@ukr.net

Mykhailo Zarichnyi
(Department of Mechanics and Mathematics, Lviv National University, Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, Ukraine)
E-mail: zarichnyi@yahoo.com

The topology of hyperspaces of sets of given dimension is investigated in numerous publications (see, e.g., [3, 5, 2, 1]). In particular, in [7] the author described the topology of the hyperspace of sets of given Hausdorff dimension.

There are different definitions of dimension for the probability measures (see, e.g., [4, 6, 6]). The present talk is devoted to the spaces of probability measures of given box dimension.

Let us recall some necessary definitions.

Let (X, d) be a complete metric space. For $F \subset X$ and $r > 0$ denote by $\mathcal{N}_r(F)$ the least number of closed balls of radius r needed to cover the set F. The *lower* and *upper box dimensions* of a set F are defined as follows:

$$\underline{\dim}_{box}(F) = \underline{\lim}_{r\to 0}\frac{\log \mathcal{N}_r(F)}{\log(1/r)};$$

$$\overline{\dim}_{box}(F) = \overline{\lim}_{r\to 0}\frac{\log \mathcal{N}_r(F)}{\log(1/r)},$$

and the *box dimension* of a set F is defined as

$$\dim_{box}(F) = \lim_{r\to 0}\frac{\log \mathcal{N}_r(F)}{\log(1/r)}$$

whenever the last limit exists.

Note also that the lower (upper) box dimension of a set coincides with the lower (upper) box dimensions of its topological closure.

Additionally, let the quantity λ_0 be given by the formula

$$\lambda_0 = \lambda_0(X) = \inf\{\overline{\dim}_{box}(B_r(x)) \mid x \in X, r > 0\},$$

where $B_r(x)$ denotes the closed ball of radius r centered at x, is called the *smallest local upper box dimension* of X.

Now, let $P(X)$ denote the space of probability measures on X and $k > 0$. We endow $P(X)$ with the weak* topology. The *lower* and *upper box dimensions* of a measure $\mu \in P(X)$ are defined, respectively, by the formulae:

$$\underline{\dim}_{box}(\mu) = \lim_{k\to 0}\inf\{\underline{\dim}_{box}(F) \mid F \in \mathcal{B}(X),\ \mu(F) \geq 1-k\};$$

$$\overline{\dim}_{box}(\mu) = \lim_{k\to 0}\inf\{\overline{\dim}_{box}(F) \mid F \in \mathcal{B}(X),\ \mu(F) \geq 1-k\},$$

where $\mathcal{B}(X)$ denotes the set of Borel subsets in X.

Theorem 1. *Let X be an infinite complete separable metric space, then the set*

$$\{\mu\colon \underline{\dim}_{box}(\mu) = 0\}$$

is homeomorphic to the separable Hilbert space l^2.

Theorem 2. *Let X be an infinite complete separable metric space, then the set*

$$\{\mu\colon \inf\{\overline{\dim}_{box}(F)\colon F \in \mathcal{B}(X), \mu(F) > 0\} \geq \lambda_0\}$$

is homeomorphic to the separable Hilbert space l^2.

The proofs of these theorems are based on results by Myjak and Rudnicki [9]. They proved that the mentioned sets are residual in the space of probability measures. We also apply some characterization theorems from infinite-dimensional topology [8].

References

[1] T. Banakh, N. Mazurenko, *The topology of systems of hyperspaces determined by dimension functions*, Topology 48(2009), P.43–53

[2] R. Cauty R, *Suites $\mathcal{F}_\sigma$-absorbantes en theorie de la dimension*, Fund. Math. 159 (1999), N 2, 115–126.

[3] T. Dobrowolski, L. Rubin, *The hyperspace of infinite-dimensional compacta for covering and cohomological dimension are homeomorphic*, Pacific J. Math. **164** (1994) 15–39.

[4] Julia Genyuk, *A typical measure typically has no local dimension, Real Analysis Exchange*, Vol. 23(2), 1997–1998, P.525-–537.

[5] H. Gladdines, *Absorbing systems in infnite-dimensional manifolds and applications.* Amsterdam: Vrije Universiteit, 1994. – 117pp.

[6] Masakazu Tamashiro, *Dimensions in a separable metric space*, 1995, Volume 49, Issue 1, P.143–162.

[7] N. Mazurenko, *Uncountable absorbing systems related to the Hausdorff dimension*, Mat. Stud. **31** (2009) 195–203.

[8] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology. Prerequisites and Introduction (North-Holland Mathematical Library Volume 43)*, North Holland, 1988. – 402pp.

[9] Jozef Myjak, Ryszard Rudnicki, *On the Box Dimension of Typical Measures, Monatshefte fur Mathematik*, 136(2):143–150.

[10] L. Olsen, *A multifractal formalism*, Adv. in Math. 116 (1995), P.82–196.

Framed cobordism of systems of submanifolds in the classification of free quotients

Lukasz P. Michalak
(Adam Mickiewicz University in Poznań, Poznań, Poland)
E-mail: `lukasz.michalak@amu.edu.pl`

In this talk we will show how framed cobordism of systems of non-separating 2-sided submanifolds in a closed manifold can be used to classify epimorphisms onto free groups up to equivalence and strong-equivalence. Such a classification is known for surface groups and was done by Grigorchuk–Kurchanov–Zieschang by using other methods. We use an extended Pontryagin–Thom construction to associate for any system of submanifolds an induced homomorphism to a free group. We will present geometric operations on submanifolds which realize elementary Nielsen transformations on induced homomorphisms. These results are motivated by the notion of Reeb graph of a function on a manifold, which leads to both free quotient and system of submanifold.

The results are from joint work with Wacław Marzantowicz.

References

[1] R. I. Grigorchuk, P. F. Kurchanov and H. Zieschang, *Equivalence of homomorphisms of surface groups to free groups and some properties of 3-dimensional handlebodies*, Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 1 (Novosibirsk, 1989), 521–530, Contemp. Math. 131, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[2] W. Marzantowicz and Ł. P. Michalak, *Relations between Reeb graphs, systems of hypersufaces and epimorphisms onto free groups*, preprint (2020), arXiv:2002.02388.

The density and the $\tau-$placed of the $N_\tau^\varphi-$nucleus of a space X

F. G. Mukhamadiev
(National University of Uzbekistan, Uzbekistan)
E-mail: farhod8717@mail.ru

Let X be a topological space and let ξ be a system of closed subsets of X. The system ξ is called *linked*, if any two elements of it have nonempty intersection. A linked system ξ of closed subsets of X is called *complete*, if for any closed set $F \subset X$, the condition

$$\text{" any neighborhood } OF \text{ contains the set } \Phi \in \xi \text{ " } (\star)$$

implies that $F \in \xi$ [1]. The set of all complete linked systems (CLS) in the space X is denoted by NX.

Let $U_1, \ldots, U_k, V_1, \ldots, V_n$ be a set of nonempty open subsets of X. Set $O(U_1, \ldots, U_k)\langle V_1, \ldots, V_n\rangle = \{\xi \in NX :$ for any $i = 1, \ldots, k$ there exists $F_i \in \xi$ such that $F_i \subset U_i$, and for any $j = 1, \ldots, n$ and any $\Phi \in \xi$, the intersection $\Phi \cap V_j$ is nonempty $\}$. It is easily seen that the set of subsets of NX of the form $O(U_1, \ldots, U_k)\langle V_1, \ldots, V_n\rangle$ is an open basis of some topology on NX.

Definition 1. Let X be a T_1-space, φ be a cardinal-valued function, and τ be a cardinal number. The $N_\tau^\varphi-$nucleus of a space X is the space

$$N_\tau^\varphi X = \{\xi \in NX : \text{there exists } F \in \xi \text{ such that } \varphi(F) \le \tau\} \text{ [2]}.$$

Definition 2. A topological space X is said to be $N_\tau^\varphi-$nuclear if $N_\tau^\varphi X = NX$.

As φ, we take a density function d. Let $\tau = \aleph_0$.

The definition implies that any space X is N_τ^d-nuclear, where $\tau = d(X)$; in particular, any separable space X is $N_{\aleph_0}^\varphi-$nuclear.

Theorem 3. *Let X be an infinite T_1-space. Then*
1) $\pi w(N_{\aleph_0}^d X) = \pi w(X)$;
2) $d(N_{\aleph_0}^d X) = d(X)$ (taken from [2]).

A set $A \subset X$ is called *$\tau-$placed* in X if for each point $x \in X \setminus A$ there is a set P of type G_τ in X such that $x \in P \subset X \setminus A$ [3].

Put $q(X) = min\{\tau \ge \aleph_0 : X$ is $\tau-$placed in $\beta X\}$; $q(X)$ is called the *Hewitt-Nachbin number* of X. We say that X is a *$Q_\tau-$space* if $q(X) \le \tau$.

A space X is called an $m_\tau-$space, where τ is given cardinal, if for each canonical closed set F in X and each point $x \in F$ there is set P of type G_τ in X such that $x \in P \subset F$.

Clearly, X is an $m_\tau-$space for $\tau = |X|$. This allows us to give the following definition: put $m(X) = min\{\tau \ge \aleph_0 : X$ is an $m_\tau-$space $\}$. The space X is called a *Moscow space* if $m(X) \le \aleph_0$.

Theorem 4. *Let $q(N_{\aleph_0}^d X) \le \tau$ and $m(NX) \le \tau$, then $N_{\aleph_0}^d X$ is $\tau-$placed in NX.*

Theorem 5. *Let $m(NX) \le \tau = d(X)$, then an $N_{\aleph_0}^d-$nucleus $N_{\aleph_0}^d X$ is $\tau-$placed in NX.*

Theorem 6. *Let NX is a Moscow space and X is a separable, then $N_{\aleph_0}^d X$ is $\tau-$placed in NX.*

References

[1] A.V.Ivanov. A space of complete linked systems. // *Siberian Mathematical Journal*, 27 : 863–875, 1986.
[2] F.G.Mukhamadiev. On Certain Cardinal Properties of the $N_\tau^\varphi-$Nucleus of a Space X. // *Journal of Mathematical Sciences*. 245 : 411–415, 2020.
[3] A.V.Arkhangel'skii. *Topological Function Spaces*, volume 78 of *Mathematics and Its Applications*. Dordrecht / Boston / London : Kluwer Academic Publisher, 1992.

Ricci-flat Kähler metrics on tangent bundles of rank-one symmetric spaces of compact type

I. V. Mykytyuk
(Institute of Applied Problems of Mathematics and Mechanics, Naukova Str. 3b, 79601, Lviv, Ukraine.)
E-mail: mykytyuk_i@yahoo.com

We give an explicit description of all complete G-invariant Ricci-flat Kähler metrics on the tangent bundle $T(G/K) \cong G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ of rank-one Riemannian symmetric spaces G/K of compact type, in terms of associated vector-functions.

Over the latest decades there has been considerable interest in Ricci-flat Kähler metrics whose underlying manifold is diffeomorphic to the tangent bundle $T(G/K)$ of a Riemannian symmetric space G/K of compact type. For instance, a remarkable class of Ricci-flat Kähler manifolds of cohomogeneity one was discovered by M. Stenzel [1]. This has originated a great deal of papers. To cite but a few: M. Cvetič, G. W. Gibbons, H. Lü and C. N. Pope [2] studied certain harmonic forms on these manifolds and found an explicit formula for the Stenzel metrics in terms of hypergeometric functions. Earlier, T. C. Lee [3] gave an explicit formula of the Stenzel metrics for classical spaces G/K but in another vein, using the approach of G. Patrizio and P. Wong [4]. Remark also that in the case of the standard sphere $\mathbb{S}^2$, the Stenzel metrics coincide with the well-known Eguchi-Hanson metrics [5]. On the other hand, and as it is well known, Stenzel metrics continue being a source of results both in physics and differential geometry. We cite here only to G. Oliveira [6] and M. Ionel and T. A. Ivey [7].

We give an *explicit* description of all complete G-invariant Ricci-flat Kähler metrics on the tangent bundle $T(G/K)$ of rank-one Riemannian symmetric spaces G/K of compact type or, equivalently, on the complexification $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ of G/K. To this end, we use the method of our article [8], giving the result in terms of associated vector-functions (see below). It is also shown that this set of metrics contains a new family of metrics which are not $\partial\bar{\partial}$-exact if $G/K \in \{\mathbb{C}\mathbf{P}^n, n \geqslant 1\}$, and coincides with the set of $\partial\bar{\partial}$-exact Stenzel metrics for any of the latter spaces G/K.

Remark here that until now, in the case of the space $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ ($n \geqslant 1$), all known Ricci-flat Kähler metrics were Calabi metrics, so being hyper-Kählerian and thus automatically Ricci-flat (see O. Biquard and P. Gauduchon [9, 10] and E. Calabi [11]). Since by A. Dancer and M.Y. Wang [12, Theorem 1.1] any complete G-invariant hyper-Kählerian metric on $G/K = \mathbb{C}\mathbf{P}^n$ ($n \geqslant 2$) coincides with the Calabi metric, our new metrics are not hyper-Kählerian.

Note also, that in [12] the Kähler-Einstein metrics on manifolds of G-cohomogeneity one were classified but only under one additional assumption: It is assumed that the isotropy representation of the space G/H (see our notation below) splits into pairwise inequivalent sub-representations. This condition is crucial for the fact that the Einstein equation can be solved. But this assumption fails, for instance, for the symmetric space $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ ($n \geqslant 2$).

Let G/K be a rank-one symmetric space of a compact connected Lie group G. The tangent bundle $T(G/K)$ has a canonical complex structure J_c^K coming from the G-equivariant diffeomorphism $T(G/K) \to G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$. The latter space is the above-mentioned complexification of G/K. In our paper [8] we described, for such a G/K, all G-invariant Kähler structures $(\mathbf{g}, J_c^K)$ which are moreover Ricci-flat on the punctured tangent bundle $T^+(G/K)$ of $T(G/K)$. This description is based on the fact that $T^+(G/K)$ is the image of $G/H \times \mathbb{R}^+$ under certain G-equivariant diffeomorphism. Here H denotes the stabilizer of any element of $T(G/K)$ in general position. Such G-invariant Kähler and Ricci-flat Kähler structures are determined completely by a unique vector-function $\mathbf{a}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathfrak{g}_H$ satisfying certain conditions, $\mathfrak{g}_H$ being the subalgebra of $\mathrm{Ad}(H)$-fixed points of the Lie algebra of G.

References

[1] Stenzel, M. Ricci-flat metrics on the complexification of a compact rank one symmetric space. Manuscripta Math. **80**: 151–163, 1993.

[2] Cvetič, M., Gibbons, G.W., Lü, L., Pope, C.N. Ricci-flat metrics, harmonic forms and brane resolutions. Comm. Math. Phys. **232**: 457–500, 2003.

[3] Lee, T.C. Complete Ricci-flat Kähler metric on M_I^n, M_{II}^{2n}, M_{III}^{4n}. Pacific J. Math. **185**(2): 315–326, 1998.

[4] Patrizio, G., Wong, P. Stein manifolds with compact symmetric center. Math. Ann. **289**: 355–382, 1991.

[5] Eguchi, T., Hanson, A.J. Asymptotically flat self-dual solutions to Euclidean gravity. Phys. Lett. **B74**: 249–251, 1978.

[6] Oliveira, G.: Calabi-Yau monopoles for the Stenzel metric. Comm. Math. Phys. **341**(2), 699–728 (2016)

[7] Ionel, M., Ivey, T.A.: Austere submanifolds in $\mathbb{C}P^n$. Comm. Anal. Geom. **24**(4), 821–841 (2016)

[8] Gadea, P.M., González-Dávila, J.C., Mykytyuk, I.V. Invariant Ricci-flat Kähler metrics on tangent bundles of compact symmetric spaces. `http://arxiv.org/abs/1903.00044`

[9] Biquard, O., Gauduchon, P. Hyperkähler metrics on cotangent bundles of Hermitian symmetric spaces, in: J. E. Andersen, J. Dupont, H. Pedersen, A. Swann (Eds.), Geometry and Physics, Vol. 184, Lect. Notes Pure Appl. Math., Marcel Dekker, pp. 287–298, 1996.

[10] Biquard, O., Gauduchon, P. Géométrie hyperkählérienne des espaces hermitiens symétriques complexifiés. Séminaire de Théorie spectrale et Géométrie **16**: 127–173, 1998.

[11] Calabi, E. Métriques kählériennes et fibrés holomorphes. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12**: 269–294, 1979.

[12] Dancer, A., Wang, M.Y. Kähler-Einstein metrics of cohomogeneity one. Math. Ann. **312**(3): 503–526, 1998.

On the group of isometries of foliated manifolds

A. Y. Narmanov
(Faculty of Mathematics, National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Tashkent, Uzbekistan;)
E-mail: narmanov@yandex.ru

A. N. Zoyidov
(Faculty of Mathematics, National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Tashkent, Uzbekistan;)
E-mail: zoyid.azam.math@gmail.com

Let M be a connected Riemannian C^∞-manifold of dimension n. We will denote by (M, F) manifold M with k-dimensional foliation F on M.

Definition 1. If for the some C^r- diffeomorphism $\varphi : M \to M$ the image $\varphi(L_\alpha)$ of any leaf L_α of foliation F is a leaf of foliation F, we say that the φ is C^r- diffeomorphism of foliated manifold and write as $\varphi : (M, F) \to (M, F)$ [2].

Let's denote as $\mathrm{Diff}_F(M)$ the set of all C^r- diffeomorphisms of foliated manifold (M, F), where $r \geq 0$. The group $\mathrm{Diff}_F(M)$ is subgroup of $\mathrm{Diff}(M)$ and therefore it is topological group in compact open topology.

Recall a vector field X is called a foliated field if for every vector field Y, tangent to F, Lie brocket $[X, Y]$ also is tangent to F. It is known that flow of every foliated field consists of diffeomorphisms of foliated manifold (M, F) [1]. The set $L(M, F)$ of foliated vector fields is a Lie subalgebra of Lie algebra $V(M)$ [2]. It follows from here that the group $\mathrm{Diff}_F(M)$ contains the Lie group for which the Lie algebra is an algebra $L(M, F)$.

Let M be a smooth connected finite-dimensional Riemannian manifold.

Definition 2. An isometry $\varphi : M \to M$ is called an isometry of foliated manifold (M, F) if it is diffeomorphism of foliated manifold (M, F) [1].

We will denote by $\mathrm{Iso}_F(M)$ the set of all C^r-isometries of foliated manifold (M, F), where $r \geq 0$. We have that

$$\mathrm{Iso}_F(M) = \mathrm{Diff}_F(M) \bigcap \mathrm{Iso}(M).$$

Let us recall that vector field X on riemannian manifold (M, g) is called Killing field if its flow consists of isometries of Riemannian manifold (M, g), that is $L_X g = 0$, where g is riemannian metric, $L_X g$ denotes Lie derivative of the metric g with respect to X. If X is foliated Killing vector field, it's flow consists of isometries of foliated manifold (M, F).) The set $K(M, F)$ of foliated Killing vector fields is a Lie subalgebra of Lie algebra $L(M, F)$. It follows from here that the group $\mathrm{Iso}_F(M)$ contains the Lie group for which the Lie algebra is an algebra $K(M, F)$.

Theorem 3. *Let (M, F) be a foliated manifold where M is a smooth connected finite-dimensional Riemannian manifold. Then the group $\mathrm{Iso}_F(M)$ is closed subset of $\mathrm{Iso}(M)$ in compact open topology.*

Really Cartan's theorem states that on a closed subgroup of a Lie group there exists a differential structure with respect to which the closed subgroup is a Lie subgroup of a given Lie group.By using this fact we formulate following .

Theorem 4. *Let (M, F) be a foliated manifold where M is a smooth connected finite-dimensional Riemannian manifold. Then the group $\mathrm{Iso}_F(M)$ is Lie subgroup of Lie group $\mathrm{Iso}(M)$.*

References

[1] A. Narmanov and A.Sharipov. On the group of foliation isometries,*Methods of Functional Analysis and Topology*, 2009, vol. 15, pp. 195–2009.

[2] I. Tamura. *Topology of Foliations: An Introduction*, American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1992. http://bookre.org/reader?file=582002.

On boundary behavior by prime ends of solutions to Beltrami equations

Igor Petkov
(Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv, Ukraine)
E-mail: igorpetkov@i.ua

Vladimir Ryazanov
(Institute of Applied Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine; Bogdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Physics Dept., Lab. of Math. Physics)
E-mail: Ryazanov@nas.gov.ua, vl.ryazanov1@gmail.com

It is shown that each **homeomorphic** $W^{1,1}_{\rm loc}$ solution to the Beltrami equation is the so-called lower Q-homeomorphism with $Q(z) = K_\mu(z)$ where $K_\mu(z)$ is the dilatation quotient of this equation. It is developed on this basis, see e.g. [2], the theory of the boundary behavior of such solutions.

Let D be a domain in the complex plane $\mathbb{C}$ and let $\mu : D \to \mathbb{C}$ be a measurable function with $|\mu(z)| < 1$ a.e. in D. The **Beltrami equation** is the equation of the form

$$f_{\overline{z}} \;=\; \mu(z) f_z \tag{1}$$

where $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x+iy$, and f_x and f_y are partial derivatives of f in x and y, correspondingly. The function μ is called the **complex coefficient** and

$$K_\mu(z) \;=\; \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} \tag{2}$$

the **dilatation quotient** for the equation (1) that is **degenerate** if $\operatorname{ess\,sup} K_\mu(z) = \infty$.

In [2] and [3], we follow Caratheodory in the definition of the **prime ends** for bounded finitely connected domains in $\mathbb{C}$ and refer readers to Chapter 9 in [1]. In what follows, $\overline{D}_P$ denotes the completion of the domain D by its prime ends with the the **topology of prime ends**, see Section 9.5 in [1]. Further, we assume that K_μ is extended by 0 outside of D.

Theorem 1. *Let D and D' be bounded finitely connected domains in $\mathbb{C}$ and let $f : D \to D'$ be a homeomorphic $W^{1,1}_{\rm loc}$ solution of the Beltrami equation (1) with*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{||K_\mu||(z_0,r)} \;=\; \infty \qquad\qquad \forall\ z_0 \in \partial D \tag{3}$$

where $0 < \delta(z_0) < d(z_0) = \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$ and $||K_\mu||(z_0,r) := \int\limits_{|z-z_0|=r} K_\mu(z)\,|dz|$. Then f can be extended to a homeomorphism of $\overline{D}_P$ onto $\overline{D'}_P$.

References

[1] E.F. Collingwood, A.J. Lohwator. *The Theory of Cluster Sets*, volume 56 of *Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966.

[2] D. Kovtonyuk, I. Petkov, V. Ryazanov. Prime ends in theory of mappings with finite distortion in the plane. *Filomat*, volume 31 (5) : 1349–1366, 2017.

[3] I.V. Petkov. The boundary behavior of homeomorphisms of the class Wloc1,1 on a plane by prime ends. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, 6 : 19–23, 2015 [in Russian]. https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.06.019

Some topological obstructions for strong coloring of uniform hypergraphs

Leonid Plachta
(L'viv, Ukraine)
E-mail: `dept25@gmail.com`

A hypergraph $H = (V, E)$ based on the vertex set V and with the edge set E is called k-uniform if all its edges have cardinality k. A strong l-coloring of the hypergraph H is a map $h\colon V \to [l]$ where $[l] = \{1, 2, \ldots, l\}$ such that for each edge $e = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \in E$ the vertices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ are labeled with different colors. Note that a strong coloring of a uniform hypergraph H is just a proper coloring of its 1-skelethon $H^{(1)}$, which is covered by a collection of k-cliques.

Let $\mathbf{S}$ be a family of nonempty subsets of some base set X. The generalized Kneser hypergraph $Kg^k_m(\mathbf{S})$ where $m \leq k-1$ is defined as follows. The vertices of $Kg^k_m(\mathbf{S})$ are the elements S_i of $\mathbf{S}$ and there is a k-edge $e = \{S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}\}$ in $Kg^k_m(\mathbf{S})$ if and only if $S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_{m+1}} = \emptyset$ for any distinct sets $S_{i_1}, \ldots, S_{i_{l+1}}$ from $\mathbf{S}$ (see also [1, 12]).

In the present talk, we represent k-uniform hypergraphs H as generalized Kneser hypergraphs $Kg^k_{k-1}(\mathbf{S})$. For the given k, l with $l \geq k$ we define the generalized Kneser k-uniform hypergraph $Kg^k_{k-1}(\mathbf{T})$ which is called the testing hypergraph for l-coloring of k-uniform hypergraphs. Both $Kg^k_{k-1}(\mathbf{S})$ and $Kg^k_{k-1}(\mathbf{T})$ have the natural geometric interpretation as cell complexes, denoted by $B_k(Kg^k_{k-1}(\mathbf{S}))$ and $B_{k,l}(\mathbf{T})$, respectively. The cell complexes $B_k(Kg^k_{k-1}(\mathbf{S}))$ and $B_{k,l}(\mathbf{T})$ are enhanced with natural action of the symmetric grup S_k. The action of the group S_k is effective on both cell complexes. For each l-coloring of a k-uniform hypergraph H there is a natural homomorfizm $g\colon Kg^k_{k-1}(\mathbf{S}) \to Kg^k_{k-1}(\mathbf{T})$ of hypergraphs $Kg^k_{k-1}(\mathbf{S})$ and $Kg^k_{k-1}(\mathbf{T})$. The homomorfizm $g\colon Kg^k_{k-1}(\mathbf{S}) \to Kg^k_{k-1}(\mathbf{T})$ induces an S_k-equivariant cellular map $g'\colon B_k(Kg^k_{k-1}(\mathbf{S})) \to B_{k,l}(\mathbf{T})$. Therefore, the nonexistence of such S_k-equivariant map from $B_k(Kg^k_{k-1}(\mathbf{S}))$ to $B_{k,l}(\mathbf{T})$ is a topological obstruction for existence of strong l-coloring of the k-uniform hypergraph H. We discuss the conditions under which such topological obstructions do not vanish.

References

[1] C.E.M.C. Lange, and G. M. Ziegler, *Note on generalized Kneser Hypergraph coloring* , J. Comb. Theory, ser. A **114**, 2007, pp. 159-166.

[2] G. M. Ziegler, *Generalized Kneser coloring theorems with combinatorial proofs*, Inventiones Math., **147**, 2002, pp.671-–691.

On quotient spaces and their spaces of continuous maps

Sergiy Maksymenko
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereshchenkivska str. 3, Kyiv, 01024, Ukraine)
E-mail: maks@imath.kiev.ua

Eugene Polulyakh
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereshchenkivska str. 3, Kyiv, 01024, Ukraine)
E-mail: polulyah@imath.kiev.ua

Let $p : X \to Y$ be a factor map between topological spaces, that is p is surjective and a subset $A \subset Y$ is open if and only if $p^{-1}(A)$ is open in X.

Let $\Delta = \{p^{-1}(y) \mid y \in Y\}$ be the partition of X into the inverse images of points of Y. A continuous map $h : X \to X$ will be called a Δ-*map* if for each $\omega \in \Delta$ its image $h(\omega)$ is contained in some element ω' of Δ. Hence every Δ-map h induces a map $\psi(h) : Y \to Y$ making commutative the following diagram:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & X \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow{\psi(h)} & Y \end{array} \tag{1}$$

It is well known that $\psi(h)$ is continuous whenever h is so.

Let $\mathcal{E}(X, \Delta)$ be the monoid of all Δ-maps of X, and $\mathcal{E}(Y) = C(Y, Y)$ be the monoid of all continuous self-maps of Y. Let also $\mathcal{H}(X, \Delta)$ be the subgroup of $\mathcal{E}(X, \Delta)$ consisting of homeomorphisms and $\mathcal{H}(Y)$ be the group of homeomorphisms of Y.

Then the correspondence $h \mapsto \psi(h)$ is a well defined map

$$\psi : \mathcal{E}(X, \Delta) \to \mathcal{E}(Y) \tag{2}$$

being a homomorphism of monoids.

The following statement gives sufficient conditions under which ψ will be continuous with respect to compact open topologies on $\mathcal{E}(X, \Delta)$ and $\mathcal{E}(Y)$.

Lemma 1. *Let $p : X \to Y$ be a factor map having the following property:*

(K) for every compact subset $L \subset Y$ there exists a compact subset $K \subset X$ such that $p(K) = L$.

Then the homomorphism of monoids $\psi : \mathcal{E}(X, \Delta) \to \mathcal{E}(Y)$ is continuous with respect to compact open topologies.

Recall that a continuous map $p : X \to Y$

- is called *proper* if $p^{-1}(L)$ is compact for each compact $L \subset Y$;
- *admits local cross-sections* if for every $y \in Y$ there exists an open neighborhood V and a continuous map $f : V \to X$ such that $p \circ f = \mathrm{id}_V$.

Corollary 2. *Suppose Y is a locally compact Hausdorff space. Then each of the following conditions implies that the map $\psi : \mathcal{E}(X, \Delta) \to \mathcal{E}(Y)$ is continuous with respect to compact open topologies:*

(1) p is a proper map;
(2) p is an open map and admits local cross sections;
(3) p is a locally trivial fibration.

Let Y be a topological space. Say that two points $y, z \in Y$ are T_2-*disjoint* (in Y) if they have disjoint neighborhoods. Denote by $\mathrm{hcl}(y)$ the set of all $z \in Y$ that are *not T_2-disjoint from y*. Then

$z \in \mathrm{hcl}(y)$ if and only if each neighborhood of z intersects each neighborhood of y. We will call $\mathrm{hcl}(y)$ the *Hausdorff closure* of y.

We will say that $y \in Y$ is a *branch point* whenever $\mathrm{hcl}(y) \setminus y \neq \emptyset$, so there are points that are not T_2-disjoint from y. The set of all branch points of Y will be denoted by $\mathrm{Br}(Y)$.

Theorem 3. *Let X be a locally compact Hausdorff topological space, Y be a T_1-space whose set $\mathrm{Br}(Y)$ of branch points is locally finite, and $p : X \to Y$ be an open continuous and surjective map. Then for every compact $L \subset Y$ there exists a compact subset $K \subset X$ such that $p(K) = L$. In particular, due to Lemma 1, the map (2) $\psi : \mathcal{E}(X, \Delta) \to \mathcal{E}(Y)$ is continuous with respect to compact open topologies.*

Topology of flows with collective dynamics on surfaces

Alexandr Prishlyak
(Taras Shevchenko University of Kyiv)
E-mail: prishlyak@yahoo.com

Andrei Prus
(Taras Shevchenko University of Kyiv)
E-mail: asp00pr@gmail.com

We investigate the topological structure of flows with collective dynamics on the sphere. Flows with fixed points of hyperbolic type and focus in which there is one heteroclinic (or as a partial case homoclinic) cycle which divides a surface into two parts and contains all saddle points are considered. One part is connected, homeomorphic to the open disk and has Hamiltonian-type dynamics with focus inside, and the other is divided into regions that have gradient-like dynamics and the same properties as the Morse field. Namely: 1) all points of hyperbolic type; 2) there are no trajectories connecting the saddles, except for trajectories belonging to the selected heteroclinic cycle; 3) each trajectory begins and ends at a fixed point (sink, source, saddle). A complete topological invariant of these flows is constructed.

This invariant is a planar graph, which has the form of a circle with some segments drawn inside it. The circle (the selected cycle on the graph) corresponds to a closed trajectory in the Hamiltonian region, which is quite close to the selected heteroclinic cycle. The vertices correspond to the saddle points and sources, and the saddle lying on the boundary of the two components of the connectivity of the gradient region corresponds to two vertices. Segments (edges that do not belong to the selected cycle) correspond to separatrixes coming from a source and chords connecting vertices corresponding to one saddle. By sequentially numbering the vertices on the circle, we divide them into groups and selected pairs. One group includes those vertices of the saddle, which include separatrixes from one source (we mark it as (1,2,3)), the chords correspond to the numbers of pairs of vertices (we mark it as {1,2}). Using these invariants, all possible structures of such flows with no more than 6 saddles were found. Thus there is a single flow with one saddle: (1). Two flows with two saddles are 1): (1), (2) and 2): (1,2). Four flows with three saddles are: 1): (1), (2), (3); 2): (1,2), (3); 3): (1,2,3); 4): (1), (3), {2,4}. 18 flows with 5 saddles and 47 flows of different structure with 6 saddles were also found.

References

[1] О.О.Пришляк, А.А.Прус. Трикольоровий граф потоку Морса на компактній поверхні з межею. // Нелінійні коливання, 2019.

[2] Ошемков А.А., Шарко В.В. О классификации потоков Морса на двумерных многообразиях// Мат.сборник, 1998, Т. 189, №8. - С.93-140.

[3] В.Е. Круглов, Д.С. Малышев, О.В. Починка. Многоцветный граф как полный топологический инвариант для $\Omega-$устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях. Матем. сб., 2018, том 209, номер 1, 100–126 DOI: https://doi.org/10.4213/sm8797

On similarity of two families of matrices over a field

Volodymyr Prokip
(IAPMM NAS of Ukraine, L'viv, Ukraine)
E-mail: v.prokip@gmail.com

Let $\mathbb{F}$ be a field of characteristic zero. Denote by $M_{m,n}(\mathbb{F})$ the set of $m \times n$ matrices over $\mathbb{F}$ and by $M_{m,n}(\mathbb{F}[\lambda])$ the set of $m \times n$ matrices over the polynomial ring $\mathbb{F}[\lambda]$.

In the ring $\mathbb{F}[\lambda]$ we consider the operation of differentiation $\mathbf{D}$. Let $a(\lambda) = \sum_{i=0}^{l} a_i \lambda^{l-i} \in \mathbb{F}[\lambda]$. Put $\mathbf{D}\,(a(\lambda)) = \sum_{i=0}^{l} (l-i) a_i \lambda^{l-i-1}$ and $\mathbf{D}^k(a(\lambda)) = \mathbf{D}(a^{(k-1)}(\lambda)) = a^{(k)}(\lambda)$ for every natural $k \geq 2$. The differentiation of a matrix $A(\lambda) = \left[\begin{array}{c} a_{ij}(\lambda) \end{array}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{F}[\lambda])$ is understood as its elementwise differentiation, i.e., $A^{(1)}(\lambda) = \mathbf{D}(A(\lambda)) = [\mathbf{D}(a_{ij}(\lambda))] = [a_{ij}^{(1)}(\lambda)]$ and $A^{(k)}(\lambda) = \mathbf{D}(A^{(k-1)}(\lambda))$

Let $b(\lambda) = (\lambda - \beta_1)^{k_1} (\lambda - \beta_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \beta_r)^{k_r} \in \mathbb{F}[\lambda]$, $\deg b(\lambda) = k = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$, and $A(\lambda) \in M_{m,n}(\mathbb{F}[\lambda])$. For the monic polynomial $b(\lambda)$ and the matrix $A(\lambda)$ we define the matrix

$$M[A,b] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_r \end{bmatrix} \in M_{mk,n}(\mathbb{F}), \quad \text{where } N_j = \begin{bmatrix} A(\beta_j) \\ A^{(1)}(\beta_j) \\ \vdots \\ A^{(k_j-1)}(\beta_j) \end{bmatrix} \in M_{mk_j,n}(\mathbb{F}), \; j = 1, 2, \ldots, r.$$

The Kronecker product of matrices $A = [a_{ij}]$ $(n \times m)$ and B is denoted by $A \otimes B = \left[\begin{array}{c} a_{ij} B \end{array}\right]$. Let nonsingular matrices $A(\lambda), B(\lambda) \in M_{n,n}(\mathbb{F}[\lambda])$ be equivalent and $S(\lambda) = \operatorname{diag}(s_1(\lambda), \ldots, s_{n-1}(\lambda), s_n(\lambda))$ be their Smith normal form (see [5], Chapter 1). For $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$ we define the matrix

$$D(\lambda) = \left(\Big(s_1(\lambda) s_2(\lambda) \cdots s_{n-1}(\lambda) \Big)^{-1} B^*(\lambda) \right) \otimes A^t(\lambda) \in M_{n^2,n^2}(\mathbb{F}[\lambda]),$$

where $A^t(\lambda)$ denote the transpose of $A(\lambda)$. It may be noted if $S(\lambda) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, s(\lambda))$ is the Smith normal form of the matrices $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$, then $D(\lambda) = B^*(\lambda) \otimes A^t(\lambda)$.

Definition 1. Two families of $n \times n$ matrices $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ and $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$ over a field $\mathbb{F}$ are said to be similar if there exists a matrix $T \in GL(n, \mathbb{F})$ such that $A_i = T B_i T^{-1}$ for all $i = 1, 2, \ldots, r$.

The task of classifying square matrices up to similarity is one of the core and oldest problems in linear algebra (see [1]– [7] and references therein), and it is generally acknowledged that it is also one of the most hopeless problems already for $r = 2$. Standard approaches for deciding similarity depend upon the Jordan canonical form, the invariant factor algorithm and the Smith form, or the closely related rational canonical form. In numerical linear algebra, this leads to deep algorithmic problems, unsolved even up to this date, that are caused by numerical instabilities in solving eigenvalue problems or by the inability to effectively compute sizes of the Jordan blocks or degrees of invariant factors, if the matrix entries are not known precisely. At present such problems are called wild ([2], [3]).

The families $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ we associate with monic matrix polynomials

$$A(\lambda) = I_n \lambda^r + A_1 \lambda^{r-1} + A_2 \lambda^{r-2} + \cdots + A_r \quad \text{and} \quad B(\lambda) = I_n \lambda^r + B_1 \lambda^{r-1} + B_2 \lambda^{r-2} + \cdots + B_r$$

over a field $\mathbb{F}$ of degree r respectively, where I_n is the identity $n \times n$ matrix. It is clear that the families $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are similar over $\mathbb{F}$ if and only if the matrices $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$ are similar over $\mathbb{F}$. The purpose of this report is to give a criterion of similarity of two families of matrices over a field.

Theorem 2. *Let matrices* $A(\lambda) = I_n\lambda^r + \sum_{i=1}^{r} A_i\lambda^{r-i}, B(\lambda) = I_n\lambda^r + \sum_{i=1}^{r} B_i\lambda^{r-i} \in M_{n,n}(\mathbb{F}[\lambda])$ *of degree* r *be equivalent, and let* $S(\lambda) = \mathrm{diag}\,(s_1(\lambda), \dots, s_{n-1}(\lambda), s_n(\lambda))$ *be their Smith normal form. Further, let* $s_n(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)^{k_1}(\lambda-\alpha_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\alpha_r)^{k_r}$, *where* $\alpha_i \in \mathbb{F}$ *for all* $i = 1, 2, \dots, r$.

The families $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ *and* $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_r\}$ *are similar over* $\mathbb{F}$ *if and only if* $\operatorname{rank} M[D, s_n] < n^2$ *and the homogeneous system of equations* $M[D, s_n]x = \bar{0}$ *has a solution* $x = [v_1, v_2, \dots, v_{n^2}]^t$ *over* $\mathbb{F}$ *such that the matrix*

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ v_{n+1} & v_{n+2} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n^2-n+1} & v_{n^2-n+2} & \dots & v_{n^2} \end{bmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{F})$$

is nonsingular. If $\det V \neq 0$, *then* $A_i = V^{-1}B_iV$ *for all* $i = 1, 2, \dots, r$.

Example 3. Let $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ be the field of rational numbers. Further, let $\mathbf{A} = \left\{A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ and $\mathbf{B} = \left\{B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$ be two families of 2×2 matrices over the field $\mathbb{Q}$.

Monic matrix polynomials $A(\lambda) = I_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 1 & 1 \\ -4\lambda + 1 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{bmatrix}$ and $B(\lambda) = I_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda & 0 \\ -4\lambda + 1 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{bmatrix}$ with entries from $\mathbb{Q}[\lambda]$ are equivalent and $S(\lambda) = \mathrm{diag}\,(1, (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 2\lambda))$ is their Smith normal form. It may be noted that $s_1(\lambda) = 1$ and $s_2(\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$. Construct the matrix

$$D(\lambda) = B^*(\lambda) \otimes A^t(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 0 \\ 4\lambda - 1 & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 1 & -4\lambda + 1 \\ 1 & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

and solve the system of equations $M[D, s_2]x = \bar{0}$. Crossing out zero rows in the matrix $M[D, s_2]$ and after elementary transformations over the rows of this matrix we get the following system of linear equations

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 2 & 6 \\ 7 & 49 & 6 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

From this system of equations we obtain $x_1 = -x_2 = t$, $x_3 = 0$ and $x_4 = t$. It is obvious that the matrix $V = \begin{bmatrix} t & -t \\ 0 & t \end{bmatrix}$ is nonsingular for nonzero $t \in \mathbb{Q}$. Thus, the families of matrices $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are similar, i.e., $A_i = V^{-1}B_iV$, $i = 1, 2$.

References

[1] Yu.A. Drozd. Representations of commutative algebras. *Functional Analysis and Its Appl.*, 6(4): 286–288, 1972.

[2] Yu. A. Drozd *On tame and wild matrix problems.* Matrix Problems, Institute of Mathematics, Ukrainian Academy of Sciences, Kiev. 1977, pp.104–114. (in Russian)

[3] Yu. A. Drozd *Tame and wild matrix problems.* Lecture Notes in Math., 1980, 832, pp.242–258.

[4] S. Friedland. Simultaneous similarity of matrices. *Adv. Math.*, 50: 189–265, 1983.

[5] S. Friedland. *Matrices: Algebra, Analysis and Applications.* Singapore: World Scientific Publishing Co., 2015.

[6] K.D. Ikramov. How to check whether given square matrices are congruent? *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI.* 439: 99-106, 2015.

[7] V.V. Sergeichuk. Canonical matrices for linear matrix problems. *Linear Algebra Appl.*, 317: 53-102, 2000.

Some connections between invariant factors of matrix and its submatrix

Andriy Romaniv
(Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, Department of Algebra, 3 b, Naukova Str., L'viv, 79060, Ukraine)
E-mail: romaniv_a@ukr.net

Nataliia Dzhaliuk
(Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine, Department of Algebra, 3 b, Naukova Str., L'viv, 79060, Ukraine)
E-mail: nataliya.dzhalyuk@gmail.com

Invariant factors and their connections play an important role in the studying of matrix's structure [3, 5]. For instance, at augmented one matrix with a single row to obtain another matrix are used the relationships between the invariant factors of these matrices. B.W. Jones [2] state a fact that a unimodular $m \times n$ $(m < n)$ matrix A over a principal ideal domain may always be augmented with a single row to obtain a unimodular $(m+1) \times n$ matrix B. Some relationships between the invariant factors of an arbitrary matrix A and those of a one row prolongation B over the same area was established by R. Thompson [4]. D. Carlson [1] obtained similar results in terms of a finitely generated module.

In this paper, we give necessary and sufficient conditions that a matrix A may be augmented with a single row to obtain a matrix B over elementary divisor domains.

Let R be an elementary divisor domain [4] with $1 \neq 0$, i.e., every $m \times n$ matrix A over R have diagonal reduction, namely $A \sim E = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0)$, $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$, where the matrix E is called the Smith normal form, the diagonal elements ε_i are invariant factors of the matrix A. The notation $a|b$ means that the element a is the divisor of the element b, i.e., $b = ac$, where $c \in R$.

Theorem 1. *Let R be an elementary divisor domain, A be an $m \times n$ matrix over R, $A \sim \mathrm{E} = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0)$, $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Let also $\delta_1, \ldots, \delta_k \in R$ be nonzero elements such that $\delta_i | \delta_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Then the matrix A may be augmented with a single row to obtain an $(m+1) \times n$ matrix $B \sim \Delta = diag(\delta_1, \ldots, \delta_k, 0, \ldots, 0)$, $\delta_i | \delta_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$, if and only if*

$$\delta_1 | \varepsilon_1 | \delta_2 | \varepsilon_2 | \ldots | \delta_k | \varepsilon_k.$$

References

[1] Carlson D. Inequalities for the degrees of the elementary divisor of modules. *Linear Algebra and Appl.*, 5: 293–298, 1972.

[2] Jones B.W. *The arithmetic theory of quadratic forms.* Carus Monograph, No 10, Math. Assoc. Amer., 1950.

[3] Shchedryk V.P. On interdependence between invariant factors of a block-triangular matrix and its diagonal blocks. *Math Notes*, 90(4): 584–596, 2011.

[4] Thompson R. Interlacing inequalities for invariant factors. *Linear Algebra and Appl.*, 24 : 1–31, 1979.

[5] Zabavsky B.V. *Diagonal reduction of matrices over rings.* Lviv: Mathematical Studies, Monograph Series, V, XVI, VNTL Pulishers, 2012.

Conjugate time in sub-Riemannian problem on Cartan group

Yuri Sachkov
(Program Systems Institute, Russian Academy of Sciences, Pereslavl-Zalessky,152020, Russia)
E-mail: yusachkov@gmail.com

The Cartan group is the free nilpotent Lie group of rank 2 and step 3. We consider the left-invariant sub-Riemannian problem on the Cartan group defined by an inner product in the first layer of its Lie algebra. This problem gives a nilpotent approximation of an arbitrary sub-Riemannian problem with the growth vector (2,3,5).

In previous works we described a group of symmetries of the sub-Riemannian problem on the Cartan group, and the corresponding Maxwell time — the first time when symmetric geodesics intersect one another. It is known that geodesics are not globally optimal after the Maxwell time.

Now we study local optimality of geodesics on the Cartan group. We prove that the first conjugate time along a geodesic is not less than the Maxwell time corresponding to the group of symmetries. Geodesics for which the first conjugate time is equal to the Maxwell time are presented.

Earlier we conjectured that the Maxwell time is equal to the cut time — the time when geodesics lose optimality. Our result is an important step in the proof of this conjecture.

The density and the local density of the space of permutation degree

A. Kh. Sadullaev
(National University of Uzbekistan, Uzbekistan)
E-mail: anvars1997@mail.ru

F. G. Mukhamadiev
(National University of Uzbekistan, Uzbekistan)
E-mail: farhod8717@mail.ru

A permutation group X is the group of all permutations (i.s.one-one and onto mappings $X \rightarrow X$. A permutation group of a set X is usually denoted by $S(X)$. If $X = \{1, 2, 3, ...n\}$, $S(X)$ is denoted by S_n , as well [1].

Let X^n be the n-th power of a compact X. The permutation group S_n of all permutations, acts on the n-th power X^n as permutation of coordinates. The set of all orbits of this action with quotient topology we denote by SP^nX . Thus, points of the space SP^nX are finite subsets (equivalence classes) of the product X^n. Thus two points $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in X^n$ are considered to be equivalent if there is a permutation $\sigma \in S_n$ such that $y_i = x_{\sigma(i)}$.The space SP^nX is called the n -permutation degree of a space X. Equivalent relation by which we obtained space SP^nX is called the symmetric equivalence relation. The n-th permutation degree is always a quotient of X^n. Thus, the quotient map is denoted by as following: $\pi_n^s : X^n \rightarrow SP^nX$.

Where for every $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$, $\pi_n^s((x_1, x_2, ..., x_n)) = [(x_1, x_2, ..., x_n)]$ is an orbit of the point $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$.

The concept of a permutation degree has generalizations. Let G be any subgroup of the group S_n.Then it also acts on X^n as group of permutations of coordinates. Consequently, it generates a G -symmetric equivalence relation on X^n. This quotient space of the product of X^n under the G-symmetric equivalence relation is called G-permutation degree of the space X and it is denoted by SP^n_G. An operation $SP^n_G = SP^n$ is also the covariant functor in the category of compacts and it is said to be a functor of G -permutation degree. If $G = S_n$ then $SP^n_G = SP^n$. If the group G consists only of unique element then $SP^n_G = X^n$.

We say that the local density of a topological space X is τ at a point x, if τ is the smallest cardinal number such that x has a neighborhood of density τ in X.The local density at a point x is denoted by $ld(x)$. The local density of a topological space X is defined as the supremum of all numbers $ld(x)$ for $x \in X$ $ld(X) = sup\{ld(x) : x \in X\}$ [2].

It is known that, for any topological space we have $ld(X) \leq d(X)$.

Theorem 1. *Let X be an infinite T_1-space and Y is a dense in X. Then SP^nY is also dense in SP^nX.*

Theorem 2. *Let X be an infinite T_1-space and Y is a local dense in X. Then SP^nY is also local dense in SP^nX.*

References

[1] V.V.Fedorchuk, V.V.Filippov, Topology of hyperspaces and its applications. // *Mathematica, cybernetica.* Moscow: 4 (1989) - 48 p.

[2] R.B.Beshimov, N.K.Mamadaliev, F.G.Mukhamadiev. Some properties of topological spaces related to the local density and the local weak density. // *Mathematics and Statistics* 3(4): 101-105, 2015.

A short note on Hurewicz and $\mathcal{I}$-Hurewicz properties in topological spaces

Upasana Samanta
(Jadavpur University, Kolkata-700032, West Bengal, India)
E-mail: samanta.upasana@gmail.com

Theorem 1. *Let X be an ϵ-space and let $\mathcal{I}$ be an ideal having a pseudounoin, then X satisfies $S_{fin}(\Omega, \mathcal{O}^{\mathcal{I}\text{-}gp})$ if and only if X has Hurewicz property* [4].

Lemma 2. [1, Theorem 4.1.2] *(see also* [5]*) An ideal $\mathcal{I}$ of $\mathbb{N}$ is meager if and only if there is a partition $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ of $\mathbb{N}$ into finite sets such that each $A \in \mathcal{I}$ contains atmost finitely many $P_n's$.*

Proposition 3. *For a space X and a meager ideal $\mathcal{I}$, X satisfies $S_{fin}(\Lambda, \mathcal{O}^{\mathcal{I}\text{-}gp})$ if and only if X has Hurewicz property.*

Problem 4. Is there a Lindelöf non-ϵ-space such that $S_{fin}(\Omega, \mathcal{O}^{\mathcal{I}\text{-}gp})$ holds but $S_{fin}(\Lambda, \mathcal{O}^{\mathcal{I}\text{-}gp})$ fails?.

Definition 5. A space X is said to have $\mathcal{I}$-Hurewicz property (in short $\mathcal{I}$H) if for each sequence $(\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N})$ of open covers of X there is a sequence $(\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N})$ such that for each $n \in \mathbb{N}, \mathcal{V}_n$ is a finite subset of $\mathcal{U}_n$ and for each $x \in X$, $\{n \in \mathbb{N} : x \notin \cup \mathcal{V}_n\} \in \mathcal{I}$[2].

Theorem 6. *Let X be an ϵ-space satisfying $CDR_{sub}(\Lambda, \Lambda)$ and let $\mathcal{I}$ be a meager ideal of $\mathbb{N}$. If X has $\mathcal{I}$-Hurewicz property then X also has Hurewicz property.*

Theorem 7. *If a filter $\{$ does not have $\mathcal{I}$-Hurewicz property then $\chi(\mathcal{F}) \geq \mathfrak{b}(\mathcal{I})$.*

Remark 8. CH denotes the Continuum Hypothesis. Assume $\neg CH$. Let $\mathcal{I}$ be an ideal of $\mathbb{N}$ and let k be an infinite cardinal satisfying $\mathfrak{b} < k < \mathfrak{b}(\mathcal{I})$. There is $X \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ of size $\mathfrak{b}$ which is not a Hurewicz space. But X is $\mathcal{I}$-Hurewicz.

Example 9. There exists a non-$\mathcal{I}$-Hurewicz filter of character $\mathfrak{b}(\mathcal{I})$. Consider a set $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{b}(\mathcal{I})\}$ which is not $\mathcal{I}$-bounded. Let $\mathcal{F}$ be a filter on $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ generated by the family $\{F_\alpha : \alpha < b(\mathcal{I})\}$ where $F_\alpha = \{(n, m) : m \geq f_\alpha(n), n \in \mathbb{N}\}$. For each $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U} = \{U(n, m) : m \in \mathbb{N}\}$ is an open cover of $\mathcal{F}$ where for each $n, m \in \mathbb{N}$, $U(n, m) = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \min\{k \in \mathbb{N} : (n, k) \in A\}\}$.

References

[1] T. Bartoszyński and H. Judah, Set Theory, On the Structure of the Real Line, A.K. Peters, 1995.
[2] P. Das, Certain types of open covers and selection principles using ideals, Houston J. Math., 39(2) (2013), 637 - 650.
[3] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
[4] P. Das, U. Samanta and D. Chandra, Some observations on Hurewicz and $\mathcal{I}$-Hurewicz property, Topology Appl., 258 (2019), 202 - 214.
[5] M. Talagrand, Compacts de fontions measurables et filtres non measurables, Studia Math., 67 (1) (1980), 13 - 43.

About one class of Continual distributions with screw modes

Olena Sazonova
(V. N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine)
E-mail: olena.s.sazonova@karazin.ua

The kinetic equation Boltzmann is the main instrument to study the complicated phenomena in the multiple-particle systems, in particular, rarefied gas. This kinetic integro-differential equation for the model of hard spheres has a form [1, 2]:

$$D(f) = Q(f, f). \tag{1}$$

We will consider the continual distribution [3]:

$$f = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t, x, u) M(v, u, x) du, \tag{2}$$

which contains the local Maxwellian of special form describing the screw-shaped stationary equilibrium states of a gas (in short-screws or spirals) [4]. They have the form:

$$M(v, u, x) = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2} \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u-[\omega\times x])^2}. \tag{3}$$

Physically, distribution (3) corresponds to the situation when the gas has an inverse temperature $\beta = \frac{1}{2T}$, where $T = \frac{1}{3\rho} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (v-u)^2 f dv$ and rotates in whole as a solid body with the angular velocity $\omega \in R^3$ around its axis on which the point $x_0 \in R^3$ lies,

$$x_0 = \frac{[\omega \times u]}{\omega^2}, \tag{4}$$

The square of this distance from the axis of rotation is

$$r^2 = \frac{1}{\omega^2}[\omega \times (x - x_0)]^2 \tag{5}$$

and the density of the gas has the form:

$$\rho = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2} \tag{6}$$

(ρ_0 is the density of the axis, that is $r = 0$), $u \in R^3$ is the arbitrary parameter (linear mass velocity for x), for which $x||\omega$, and $u + [\omega \times x]$ is the mass velocity in the arbitrary point x. The distribution (3) gives not only a rotation, but also a translational movement along the axis with the linear velocity

$$\frac{(\omega, u)}{\omega^2}\omega,$$

Thus, it really describes a spiral movement of the gas in general, moreover, this distribution is stationary (independent of t), but inhomogeneous.

The purpose is to find such a form of the function $\varphi(t, x, u)$ and such a behavior of all hydrodynamical parameters so that the uniform-integral remainder [3, 4]

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv, \tag{7}$$

or its modification "with a weight":

$$\widetilde{\Delta} = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv, \tag{8}$$

tends to zero.

Also some sufficient conditions to minimization of remainder Δ and $\widetilde{\Delta}$ are found. The obtained results are new and may be used with the study of evolution of screw and whirlwind streams.

References

[1] C. Cercignani. *The Boltzman Equation and its Applications.* New York: Springer, 1988.
[2] M.N. Kogan. *The dinamics of a Rarefied Gas.* Moscow: Nauka, 1967.
[3] V.D. Gordevskyy, E.S. Sazonova. Continual approximate solution of the Boltzmann equation with arbitrary density. *Matematychni Studii.*, 45(2) : 194–204, 2016.
[4] V.D. Gordevskyy. Biflow Distributions with Screw Modes. *Theor. Math. Phys.*, 126(2) : 234–249, 2001.

Asymptotically best possible Lebesgue inequalities on the classes of generalized Poisson integrals

Anatoly S. Serdyuk
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 01024 Ukraine, Kiev-4, 3, Tereschenkivska st.)
E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua

Tetiana A. Stepanyuk
(University of Lubeck, Institut of Mathematics, Ratzeburger Allee 160, 23562 Lubeck, Germany)
E-mail: stepaniuk.tet@gmail.com

Denote by $C^{\alpha,r}_{\beta}C,\ \alpha>0,\ r>0$, (see, e.g., [1]) the set of all 2π–periodic functions, sucht that for all $x\in\mathbb{R}$ can be represented in the form of convolution

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\ \varphi\perp 1, \tag{1}$$

where $\varphi\in C$, and $P_{\alpha,r,\beta}(t)$ is a generalized Poisson kernel of the form

$$P_{\alpha,r,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big),\ \alpha>0,\ r>0,\ \beta\in\mathbb{R}.$$

If f and φ are connected with a help of equality (1), then the function f in this equality is called the generalized Poisson integral of the function φ and is denoted by $J^{\alpha,r}_{\beta}(\varphi)$. The function φ in the equality (1) is called the generalized derivative of the function f and is denoted by $f^{\alpha,r}_{\beta}$.

By $\rho_n(f;x)$ we denote the deviation of the function f from its partial Fourier sum of order $n-1$:

$$\rho_n(f;x):=f(x)-S_{n-1}(f;x),$$

where

$$S_{n-1}(f;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),$$

$$a_k=a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt,\quad b_k=b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ktdt,$$

and by $E_n(f)_C$ we denote the best uniform approximation of the function f by elements of the subspace τ_{2n-1} of trigonometric polynomials $t_{n-1}(\cdot)$ of the order $n-1$:

$$E_n(f)_C:=\inf_{t_{n-1}\in\tau_{2n-1}}\|f-S_{n-1}(f)\|_C.$$

The norms $\|\rho_n(f;\cdot)\|_C$ can be estimated via $E_n(f)_C$, using the Lebesgue inequality

$$\|\rho_n(f;\cdot)\|_C\le\left(\frac{4}{\pi^2}\ln n+\mathcal{O}(1)\right)E_n(f)_C,\ n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

On the whole space C the inequality (2) is asymptotically exact. At the same time for the sets of functions $C^{\alpha,r}_{\beta}C$ the inequality (2) is not asymptotically exact.

We establish the asymptotically best possible Lebesgue-type inequalities for the functions $f\in C^{\alpha,r}_{\beta}C$, in which for all n, starting from the number $n_1=n_1(\alpha,r)$, an additional term is estimated by absolute constant.

For arbitrary $\alpha > 0$, $r \in (0,1)$ we denote by $n_1 = n_1(\alpha, r)$ the smallest integer $n \in \mathbb{N}$, such that

$$\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}\Big(1+\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\Big)+\frac{\alpha r}{n^{1-r}} \leq \frac{1}{(3\pi)^3}. \tag{3}$$

Theorem 1. *Let $\alpha > 0$, $r \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$. Then, for any function $f \in C^{\alpha,r}_\beta C$ and all $n \geq n_1(\alpha, r)$ the following inequality holds*

$$\|\rho_n(f;\cdot)\|_C \leq e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\gamma_n\right)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C. \tag{4}$$

Moreover, for arbitrary function $f \in C^{\alpha,r}_\beta C$ one can find a function $F(x) = F(f,n,x)$ from the set $C^{\alpha,r}_\beta C$, such that $E_n(F^{\alpha,r}_\beta)_C = E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C$, such that for $n \geq n_1(\alpha, r)$ the equality holds

$$\|\rho_n(F;\cdot)\|_C = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\gamma_n\right)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C. \tag{5}$$

In (4) and (5) for the quantity $\gamma_n = \gamma_n(\alpha, r, \beta)$ the estimate holds $|\gamma_n| \leq 20\pi^4$.

References

[1] A.I. Stepanets Methods of Approximation Theory. VSP: Leiden, Boston, 2005.

Differential invariants of transformations group

Abdigappar Narmanov
(National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: narmanov@yandex.ru

Xurshid Sharipov
(National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Tashkent, Uzbekistan)
E-mail: sh_xurshid@yahoo.com

Definition 1. Let M, B be smooth manifolds and $p \in M$. Let $f, g : M \to B$ be smooth mappings satisfying the condition $f(p) = g(p) = q$.

1) f has a first-order tangency with g at the point p if $(df)_p = (dg)_p$ as the map $T_pM \to T_pB$.

2) f has a contact of k th order with g at the point p if the map $(df) : TM \to TB$ has a contact of order $(k-1)$ with map (dg) at each point T_pM. This fact can be written as follows: $f \sim_k g$ at the point p (k -positive number) [2].

We denote by $J^k(M,B)_{p,q}$ the sets of equivalence classes with respect to the "$\sim_k$ at the point p" in the space of mappings $f : M \to B$ satisfying the condition $f(p) = q$. We put $J^k(M,B) = \bigcup_{(p,q)\in M\times B} J^k(M,B)_{p,q}$.

Definition 2. The set $J^k(M,B)$ is called the space of k -jets.

The action of the group G on M gives rise to some action of the group on $J^k(M,B)$. This action is called the k -prolongation of the group G on $J^k(M,B)$.

We let $G^{(k)}$ denote the associated prolonged group action on the jet space $J^k(M,B)$. The infinitesimal generators of the k -th prolongation of the group G to $J^k(M,B)$ are k - prolongations of infinitesimal generators of the group G.

Definition 3. The function $I \in C^\infty(J^k(M,B))$ is called a differential invariant of order k of the group G if it is preserved under the action of the k -th prolongation G on $J^k(M,B)$, that is, $g(I) = I$ for any transformation $g \in G^{(k)}$.

Differential invariants of Lie group of transformations are studied in the papers [1], [3], [4].

Let G be a Lie group of transformations of the space of two independent u, v and three dependent x_1, x_2, x_3 variables, and following vector field

$$X = \xi_1(u,v,x)\frac{\partial}{\partial u} + \xi_2(u,v,x)\frac{\partial}{\partial v} + \sum_{i=1}^{3} \eta_i(u,v,x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1}$$

is infinitesimal generator of the group G.

It is known that any Lie group is similar to the group of translations. This property of the groups is remarkable and its use permits simplification of finding of differential invariants of the group.

In order to use this possibility we produce the replacement of variables.

Let us consider functions $F_1(u,x)$ and $F_2(v,x)$ which are solutions of following equation

$$X(F) = 1. \tag{2}$$

Let $I_1(u,v,x)$, $I_2(u,v,x)$ and $I_2(u,v,x)$ be are functionally independent invariant functions of the group G, i.e. they are satisfy following equations

$$X(I_i) = 0, i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

We will replace the variables in the space of (u, v, x_1, x_3, x_3) by putting

$$s = F_1(u, x), t = F_2(v, x), \tag{4}$$

$$y_i = I_i(u, v, x), \tag{5}$$

where $i = 1, 2, 3$. Using easy deductions, we can verify that in variables (s, t, y_1, y_2, y_3) the vector field (1) has the following form

$$X = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t}. \tag{6}$$

This form of the vector field X shows that the group G is similar to the group of translations. Moreover in the coordinates (s, t, y_1, y_2, y_3) for any $k \in N$ for $k - th$ prolongation $X^{(k)}$ of the vector field (6) it holds equality $X^{(k)} = X$.

Let us recall differentiation operator D is called invariant differentiation operator with respect group G if it holds $DX(F) = XD(F)$ for any smooth function F.

It follows from the form of the vector field (6) invariant differentiation operators for the group G are following operators of total derivatives: $D = D_s + D_t$.

If we put

$$p_{i,k} = \frac{\partial^k y_i}{\partial s^k}, q_{i,k} = \frac{\partial^k y_i}{\partial t^k}$$

then we can write total derivatives in following forms:

$$D_s = \frac{\partial}{\partial s} + \sum_{i=1}^{3} p_{i,1} \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{3} p_{i,2} \frac{\partial}{\partial p_{i,1}} + ... \tag{7}$$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} q_{i,1} \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{3} q_{i,2} \frac{\partial}{\partial q_{i,1}} + ... \tag{8}$$

We have the following equalities

$$D_s = \frac{1}{D_u F_1} D_u, D_t = \frac{1}{D_v F_2} D_v, \tag{9}$$

which will allow us to return to the old variables, where D_u, D_v- also operators of total derivatives with respect u, v.

Let denote by $D^k(F)$ derivatives $D_s^k + D_t^k(F)$ of order k.

Thus we have the following theorem.

Theorem 4. *Suppose I_1, I_2, I_3 are independent invariants of the group G, $F_1(u, x)$, $F_2(v, x)$, are solutions of the equation $X(F) = 1$. Then functions $I_i(u, v, x)$ and $D^k(I_i)$ are differential invariants of order k.*

References

[1] Alekseevsky D.V., Vinogradov A.M., Lychagin V.V. Basic ideas and concepts of differential geometry. The results of science and technology. Modern problems of mathematics. Fundamental directions. - Moscow: VINITI. 1988-28.-298 p.

[2] Golubitskii M., Guiyemin V. Stability maps and their singularities. Moscow publishing house. Mir -1977

[3] Narmanov A.Y., Sharipov X.F. Differential invariants of submersions. Uzbek mathematical Journal. 2018 N-3 pp. 132-138. DOI:10.29229/uzmj.2018-3-12.

[4] Sharipov X.F. Second order differential invariants of submersions. Uzbek mathematical Journal. 2019 N-3 pp. 146-154. DOI:10.29229/uzmj.2019-3-16.

Some remarks on the Metrizability of F-metric spaces

Sumit Som
(Department of Mathematics, National Institute of Technology Durgapur, India.)
E-mail: somkakdwip@gmail.com

Ashis Bera
(Department of Mathematics, National Institute of Technology Durgapur, India.)
E-mail: beraashis.math@gmail.com

Lakshmi Kanta Dey
(Department of Mathematics, National Institute of Technology Durgapur, India.)
E-mail: lakshmikdey@yahoo.co.in

In this talk, we will show that the newly introduced $\mathcal{F}$-metric spaces, introduced by Jleli and Samet in [1], are metrizable. Also, we deduce that the notions of convergence, Cauchy sequence, completeness due to Jleli and Samet for $\mathcal{F}$-metric spaces are equivalent to that of usual metric spaces. Moreover, we show that the Banach contraction principle in the context of $\mathcal{F}$-metric spaces is a direct consequence of its standard metric counterpart.

References

[1] M. Jleli and B. Samet. On a new generalization of metric spaces. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 20(3):128, (2018).

Triangle Cubics and Conics

Veronika Starodub
(American Univesity in Bulgaria, Blagoevgrad, Bulgaria)
E-mail: veronika.starodub01@gmail.org

Skuratovskii Ruslan
(The National Technical University of Ukraine Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute, Ukraine)
E-mail: r.skuratovskii@kpi.ua

This is a paper in classical geometry, namely about triangle conics and cubics. In recent years, N.J. Wildberger has actively dealt with this topic using an algebraic perspective. Triangle conics were also studied in detail by H.M. Cundy and C.F. Parry recently. The main task of the article was to develop an algorithm for creating curves, which pass through triangle centers. During the research, it was noticed that some different triangle centers in distinct triangles coincide. The simplest example: an incenter in a base triangle is an orthocenter in an excentral triangle. This was the key for creating an algorithm. Indeed, we can match points belonging to one curve (base curve) with other points of another triangle. Therefore, we get a new intersting geometrical object. We may observe the method through deriving one of the results:

One can consider as a base conic Jarabek Hyperbola [3]. It passes through circumcenter, orthocenter, Lemoine point, isogonally conjugated to the de Longchamps point, and vertices of a triangle. We may study this hyperbola in the excentral triangle. One can notice that all of the above points have correspondence with points in the base triangle: Bevan point, incenter, mittenpunkt, de Longchamps point, and centers of the excircles, respectively. Therefore, we got a new cubic, which passes through the above points. All of the properties of the base hyperbola could be analogically converted in a new view perspective.

Theorem 1. *As a consequence, one may apply the described above method to various curves and various constructed triangles, such as excentral, medial, mid-arc, Euler triangles, etc. The application yields the following results:*

Corollary 2. *The first obtained conic is ractangular conic that passes through centers of the excircles, Bevan point, incenter, mittenpunkt and de Longchamps point. The new hyperbola is isogonaly conjugate to the line, which passes through incenter, citcumcenter, Bevan point, isogonaly conjugated point to the mittenpunkt with respect to the base triangle, and isogonaly conjugate to the mittenpunkt with respect to the excentral triangle. Moreover, its center lies on the circumscribed circle.*

Corollary 3. *The second derived conic has vertices in the centroid and de Longchaps point, focus in the orthocenter. Directrix of the hyperbola is perpendicular to the Euler line and passes through circumcenter.*

Corollary 4. *The third derived conic is the rectangular hyperbola that passes through circumcenter, incenter, midpoint of mittenpunkt and incenter, Schiffler point, and isogonaly conjugate point to the Bevan point.*

Corollary 5. *The first obtained cubic passes through vertices of the triangle, bases of the altitudes, middles of the triangle sides in the orthic triangle, orthocenter, Euler point, centroid in orthic triangle, Lemoine point, and gomotetic center of the orthic and tangent triangles.*

Corollary 6. *The second constructed cubic passes through vertices of the triangle, bases of the altitudes, orthocenter, Euler center, and circumcenter.*

Corollary 7. *The third developed cubic passes through Speaker point, center of the Euler circle, circumcenter, orthocenter, complementary conjugate of orthocenter.*

Corollary 8. *The fourth obtained cubic passes through Lemoine point, centroid, circumcenter, mittenpunkt, incenter, and orthocenter.*

Corollary 9. *The fifth derived cubic passes through circumcenter, orthocenter, Euler center and midpoint of the incenter and the orthocenter.*

Jarabek and Yff hyperbole; Thomsom, Darboux,and Lucas cubics were taken for construction of the above curves. The properties of the invented curves and the algorithm of their construction are described in more details in the paper. The originality of the obtained results could be verified [4].

The beauty of the idea of the corresponding points lies in the fact that it can be applied to various geometric objects. Many wider results are obtained by applying this technique to straight lines passing through triangular centers. Also, one can apply this method to other curves.

The developed idea completely closes the question of curves passing through triangular centers. However, it opens up a number of new questions. What is the topological nature of these transformations? Is it possible to apply a similar idea to non-Euclidean objects? Could one use the same method over an arbitrary finite field? Can this idea be further generalized?

References

[1] N.J. Wildberger. Neuberg cubics over finite fields. *Algebraic Geometry and its Applications*, volume 5, 488-504, 2008.
[2] H.M. Cundy and C.F. Parry. Some cubic curves associated with triangle. *Journal of Geometry*, 53, 41-66, 2000
[3] Pinkernell, G. M. "Cubic Curves in the Triangle Plane." J. Geom. 55, 141-161, 1996.
[4] Kimberling, C. *Encyclopedia of Triangle Centers*. https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/.

On some fractal-based estimations of subsidence volume for various types of soils

Tatyana P. Mokritskaya
(Dnipro National University, Gagarin Avenue 72, Dnipro, 49050, Ukraine)
E-mail: mokritska@i.ua

Anatolii V. Tushev
(Dnipro National University, Gagarin Avenue 72, Dnipro, 49050, Ukraine)
E-mail: tushev@mmf.dnu.edu.ua

The idea of loess as a natural multi-fractal was formed in the works of Bird [1], Russell [2]. On the basis of the fractal characteristics of the pore and particle structure, there were obtained theoretical models describing diffusion, deformation of the compaction and the shift of the medium [3], [4]. In [2] the distribution function $N_s(L > d_s)$ of the particles sizes is defined as the number of particles of the size L such that $L > d_s$, where d_s runs over the real numbers. The fractal dimension of the particle size distribution function is defined as follows

$$D_s = \lim_{d_s \to 0} -\frac{\ln(N_s(L > d_s))}{\ln(d_s)}$$

In the presented paper we study subsidence of soils, which are eluvial, eluvial-deluvial loess-like deposits of the Middle-Upper Pleistocene age, lying on the Right-Bank Loess Upland Plain (Middle Dnieper, Ukraine).

On the basis of the fractal characteristics of the pore and particle structure, there were obtained theoretical models describing diffusion, deformation of the compaction and the shift of the medium [3], [4]. Under some additional conditions of fractal nature of the loess soil and developing methods introduced in [5, 6] we obtained certain predictive estimations of the coefficient of porosity after the disintegration of micro-aggregates. In this note we obtain some estimations of soil subsidence volume, based on the introduced above fractal dimension.

The particles forming the ground may have only a finite set of sizes. We denote these sizes $d_1, d_2, ..., d_{n-1}, d_n$ ranging in decreasing order from the largest. We assume that $\alpha = \alpha_j = d_j/d_{j-1}$, where $2 \leqslant j \leqslant n$, does not depend on j. This assumption corresponds to the idea of the self-similarity of fractal structures. In addition, all known mathematical fractals are constructed on this principle. As the structures formed by particles of a fixed size are self-similar, we also assume that all these structures have the same coefficient of porosity k_p as well as the same porosity $K_p = k_p/(1 + k_p)$. We discovered that under such conditions two different situations may occurred. Let k' be the coefficient of porosity and K' be the porosity of the soil after the disintegration of micro-aggregates.

Theorem 1. *In the above denotations we have :*

1. *If* $K_p > \alpha^{D_s}$, *then* $k' = \frac{(1+k_p)d_1^{3-D_s}}{\sum_{j=1}^n d_j^{3-D_s}} - 1$ *and* $K' = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n d_j^{3-D_s}}{(1+k_p)d_1^{3-D_s}}$;
2. *If* $K_p < \alpha^{D_s}$, *then* $k' = \frac{k_p d_n^{3-D_s}}{\sum_{j=1}^n d_j^{3-D_s}}$ *and* $K' = \frac{k_p d_n^{3-D_s}}{k_p d_n^{3-D_s} + \sum_{j=1}^n d_j^{3-D_s}}$.

The results of our experiments and calculations show that on the basis of a new theoretical models and the "Microstructure" technique, having the values of the fractal dimension of the particle size distribution by volume, it is possible to forecast the volume deformations after the disintegration of the micro-aggregates. Depending on the type of soils and the specific experimental conditions, this may be the amount of subsidence deformation, swelling or suffusion. The details of our experiments and techniques are described in [6].

References

[1] N.R.A. Bird, E. Perrier, M. Rieu. The water retention function for a model of soil structure with pore and solid fractal distributions. *Eur. J. Soil Sci.*, 51: 55–63, 2000.

[2] A. R. Russell, O. Buzzi. A fractal basis for soil-water characteristics curves with hydraulic hysteresis. *Geotechnique*, 62(3) : 269–274, 2012.

[3] A. N Anderson, J. W. Crawford, A. B. McCartney. On Diffusion in Fractal Soil Structures. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 64 : 19-24, 2000.

[4] Ce Wang Zhan, Zhang Yang Liu,· Shi-min Fan. Geometric and fractal analysis of dynamic cracking patterns subjected to wetting-drying cycles. *Soil and Tillage Research*, 170 : 1–13, 2017.

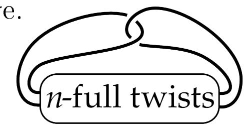
[5] Tatiana P. Mokritskaya, Anatoliy V. Tushev, Evgeny V. Nikulchev, Ksenia A. Samoylich. On the Fractal Characteristics of Loess Subsidence. *Contemporary Engineering Sciences*, 9(17) : 799–807, 2016.

[6] Mokritskaya T.P., Tushev A.V., Samoylich K.A. Baranov P.N. Deformations of loess soils caused by changes in the microaggregate structure. Bulletin of Engineering Geology and the Environment.2018. https://doi.org/10.1007/s10064-018-1361-z

Non-acyclic SL_2-representations of twist knots and non-trivial L-invariants

Jun Ueki
(Tokyo Denki University, 5 Senju Asahi-cho, Adachi-ku, 120-8551, Tokyo, Japan)
E-mail: uekijun46@gmail.com

In this talk on the joint work [TTU20] with **Ryoto Tange** in Kogakuin university and **Anh T. Tran** in the University of Texas at Dallas, we study irreducible SL_2-representations of twist knots. For each $n \in \mathbb{Z}$, *the twist knot* $J(2, 2n)$ is defined by the diagram below, the horizontal twists being right handed if n is positive and left handed if negative.



We have $J(2, 0) = 0_1$ (unknot), $J(2, 2) = 3_1$ (trefoil), $J(2, 4) = 5_2$, and $J(2, -2) = 4_1$ (figure-eight knot). Regarding a 1/2-full twist to be a half twist, $J(2, -2n)$ and $J(2, 2n + 1)$ are the mirror images to each other, hence we only consider $J(2, 2n)$. The knot group $\pi_n := \pi_1(S^3 - J(2, 2n))$ of $J(2, 2n)$ admits the presentation

$$\pi_n = \langle a, b \,|\, aw^n = w^n b\rangle , \quad w = [a, b^{-1}] = ab^{-1}a^{-1}b.$$

by [HS04, Proposition 1]. Since twist knots are 2-bridge knots, the Culler–Shalen theory of character variety together with Riley's calculation assures that conjugacy classes of $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_n, \mathrm{SL}_2(\mathrm{SL}))$ are parametrized by $x := \mathrm{tr}\,\rho(a)$ and $y := \mathrm{tr}\,\rho(ab)$. A representation ρ is said to be *acyclic* if $H_i(\pi, \rho) = 0$ holds for every i and *non-acyclic* if otherwise. Here is our first theorem.

Theorem 1. *Conjugacy classes of non-acyclic irreducible* $\mathrm{SL}_2(\mathrm{SL})$*-representations of* $J(2, 2n)$ *are exactly given by* $x = y = 1 - 2\cos\dfrac{2\pi k}{3n-1}$, $0 < k \leq \dfrac{|3n-1|-1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

This implies that every such representation corresponds to a point on the diagonal $x = y$ in $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{SL}^2$. In order to prove this assertion, we investigate the intersection of curves defined by Chebyshev-like polynomials $f_n(x, y)$, $\tau_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$. The polynomial $f_n(x, y)$ defines a component of the character variety and coincides with the Riley polynomial $\Phi_n(x, u)$ via $-u = y - x^2 + 2$. The polynomial $\tau_n(x, y)$ is the Reidemeister torsion regarded as a function so that $\tau_n(x, y) = 0$ iff a representation ρ with $(\mathrm{tr}\,\rho(a), \mathrm{tr}\,\rho(ab)) = (x, y)$ is non-acyclic. We first prove that the intersection of their zeros lie on $x = y$ and then determine all common roots of $f_n(x, x)$ and $\tau_n(x, x)$. We also introduce several Chebyshev-like polynomials g_n, h_n, $k_n \in \mathbb{Z}[x]$ and prove $f_n(x, x) = g_n k_n$, $\tau_n(x, x) = h_n k_n$, where k_n is the greatest common divisor. We in addition prove the following theorem, generalizing [Bén20, Remark 4.6].

Theorem 2. *The two curves* $f_n(x, y) = 0$ *and* $\tau_n(x, y) = 0$ *in* $\mathbb{R}^2$ *have a common tangent line at every intersection point, while the second derivatives of their implicit functions do not coincide. In other words, every zero of* $\tau_n(x, y)$ *on* $f_n(x, y) = 0$ *has multiplicity two in the function ring* $\mathrm{SL}[x, y]/(f_n(x, y))$.

The following theorems characterize non-acyclic representations.

Theorem 3. *The conjugacy class of an irreducible* $\mathrm{SL}_2(\mathrm{SL})$*-representation* ρ *of* $J(2, 2n)$ *is on the line* $x = y$ *if and only if* ρ *factors through the* -3*-Dehn surgery.*

Theorem 4. *The conjugacy class of an irreducible* $\mathrm{SL}_2(\mathrm{SL})$*-representation* ρ *of* $J(2, 2n)$ *on* $x = y$ *is non-acyclic if and only if* $\rho(a^{-1}w^n)$ *is of order 3.*

Our study is indeed motivated by a problem in arithmetic topology. We finally investigate the L-invariants of universal deformations of residual representations, which was introduced in [KMTT18] in a perspective of the Hida–Mazur theory. Let $\overline{\rho} : \pi_n \to \mathrm{SL}_2(F)$ be a representation over a field F with char $= p > 2$ and a completed discrete valuation ring (CDVR) O with the residue field F. A *deformation* (or a *lift*) of $\overline{\rho}$ over a complete local O-algebra R is a representation $\rho : \pi_n \to \mathrm{SL}_2(R)$ with the residual representation $\overline{\rho}$. A *universal deformation* $\boldsymbol{\rho} : \pi_n \to \mathrm{SL}_2(\mathcal{R})$ of $\overline{\rho}$ over O is a deformation such that any deformation over any R uniquely factors through $\boldsymbol{\rho}$ up to strict equivalence. If $\boldsymbol{\rho}$ is absolutely irreducible, then $\boldsymbol{\rho}$ uniquely exists up to O-isomorphism and strict equivalence.

When $\mathcal{R}$ is a Noetherian UFD and the group homology $H_1(\pi_n, \boldsymbol{\rho})$ with local coefficients is a finitely generated torsion $\mathcal{R}$-module, the L-invariant $L_{\boldsymbol{\rho}} \in \mathcal{R}/\doteq$ is defined to be the order of $H_1(\pi_n, \boldsymbol{\rho})$, where $\doteq$ denotes the equality up to multiplication by units in $\mathcal{R}$. Let $\Delta_{\boldsymbol{\rho},i}(t)$ denote the i-th $\boldsymbol{\rho}$-twisted Alexander polynomials. Then we have $L_{\boldsymbol{\rho}} \doteq \Delta_{\boldsymbol{\rho},1}(1)$. A general theory of twisted invariants yields $L_{\boldsymbol{\rho}} \doteq \tau_{\boldsymbol{\rho}} \Delta_{\boldsymbol{\rho},0}(0)$. For most cases we have $\Delta_{\boldsymbol{\rho},0} \doteq 1$, so that we have $L_{\boldsymbol{\rho}} \not\doteq 1$ if and only if $\tau_{\overline{\rho}} = 0$, that is, $\overline{\rho}$ is non-acyclic. Now B. Mazur's Question 2 in [Maz00, page 440] may be varied as follows:

Problem 5. *Investigate the L-invariants $L_{\boldsymbol{\rho}}$ of the universal deformations $\boldsymbol{\rho}$ over O of absolutely irreducible non-acyclic residual representations $\overline{\rho}$.*

The following theorem completely answers to this problem, that is, it determines all residual representations with non-trivial L-invariants, as well as explicitly determine the L-invariants themselves.

Theorem 6. Every absolutely irreducible representation $\overline{\rho} : \pi_n \to \mathrm{SL}_2(F)$ of a twist knot corresponds to a root of k_n in F. Suppose that $\overline{\rho}$ corresponds to a root $\overline{\alpha}$ of k_n with multiplicity m and that $\alpha_1 = \alpha, \cdots, \alpha_m$ are distinct lifts of $\overline{\alpha}$ with $k_n(\alpha_i) = 0$ and $\alpha \in O$. If $\dfrac{\partial f_n}{\partial y}(\overline{\alpha}, \overline{\alpha}) \neq 0$ holds, so that there is a universal deformation $\boldsymbol{\rho} : \pi_n \to \mathrm{SL}_2(O[[x - \alpha]])$ over O, then the equalities

$$L_{\boldsymbol{\rho}} \doteq k_n(x)^2 \doteq \prod_i (x - \alpha_i)^2$$

in $\mathcal{R} = O[[x - \alpha]]$ hold. If in addition $p \nmid 3n - 1$, then $m = 1$ and $L_{\boldsymbol{\rho}} \doteq (x - \alpha)^2$ holds.

If instead $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(\overline{\alpha}, \overline{\alpha}) \neq 0$, then a similar equality holds in $\mathcal{R} = O[[y - \alpha]]$.

We remark that our work is derived from the scope of the following dictionary of analogy between knots and prime numbers (cf. [MT07, MTTU17, KMTT18], [Mor12, Chapter 14]).

Low dimensional topology	Number theory
Deformation space of hyperbolic structures	Universal p-ordinary modular deformation space
Dehn surgery points with $\mathbb{Z}$-coefficient	Arithmetic points

References

[Bén20] Léo Bénard, *Torsion function on character varieties*, to appear in Osaka J. Math. arXiv:1711.08781v2, 2020.

[HS04] Jim Hoste and Patrick D. Shanahan, *A formula for the A-polynomial of twist knots*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), no. 2, 193–209. MR 2047468

[KMTT18] Takahiro Kitayama, Masanori Morishita, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On certain L-functions for deformations of knot group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), 3171–3195.

[Maz00] Barry Mazur, *The theme of p-adic variation*, Mathematics: frontiers and perspectives, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 433–459. MR 1754790 (2001i:11064)

[Mor12] Masanori Morishita, *Knots and primes*, Universitext, Springer, London, 2012, An introduction to arithmetic topology. MR 2905431

[MT07] Masanori Morishita and Yuji Terashima, *Arithmetic topology after Hida theory*, Intelligence of low dimensional topology 2006, Ser. Knots Everything, vol. 40, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, pp. 213–222. MR 2371728

[MTTU17] Masanori Morishita, Yu Takakura, Yuji Terashima, and Jun Ueki, *On the universal deformations for* SL_2*-representations of knot groups*, Tohoku Math. J. (2) **69** (2017), no. 1, 67–84. MR 3640015

[TTU20] Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Non-acyclic* SL_2*-representations of twist knots*, preprint.

Mappings with finite length distortion and prime ends on Riemann surfaces

Sergei Volkov
(Donetsk National Technical University, Pokrovsk, Ukraine)
E-mail: serhii.volkov@donntu.edu.ua

Vladimir Ryazanov
(Institute of Applied Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine; Bogdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Physics Dept., Lab. of Math. Physics)
E-mail: Ryazanov@nas.gov.ua, vl.ryazanov1@gmail.com

The class of mappings with finite length distortion was introduced in [2] for $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, see also [3]. This class is a natural generalization of the classes of isometries and quasi–isometries.

Here we follow Caratheodory in the definition of the **prime ends** for finitely connected domains on Riemann surfaces and $\overline{D}_P$ denotes the completion of the domain D by its prime ends with the the **topology of prime ends**, cf. Chapter 9 in [1]. We prove criteria in terms of dilatations K_f for the homeomorphic extension to the boundary of these mappings f between domains in **compactifications by Kerekjarto-Stoilow** of Riemann surfaces by prime ends, see definitions and notations in [4]–[5]. Further, we assume that K_f is extended by 0 outside of D.

Theorem 1. *Let $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}^*$ be Riemann surfaces, D, D^* be finitely connected domains on $\overline{\mathbb{S}}$, $\overline{\mathbb{S}^*}$, $\partial D \subset \mathbb{S}$, $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$. Suppose that $f : D \to D^*$ is a homeomorphism with finite length distortion and, for all $p_0 \in \partial D$,*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(p_0)} \frac{dr}{||K_f||\,(p_0,r)} \;=\; \infty\;, \qquad ||K_f||\,(p_0,r)\;:=\int\limits_{h(p,p_0)=r} K_f(p)\;ds_h(p). \tag{1}$$

Then f can be extended to a homeomorphism of $\overline{D}_P$ onto $\overline{D'}_P$.

References

[1] E.F. Collingwood, A.J. Lohwator. *The Theory of Cluster Sets*, volume 56 of *Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1966.
[2] Olli Martio, Vladimir Ryazanov, Uri Srebro, Eduard Yakubov. Mappings with finite length distortion. *J. Anal. Math.*, 93 : 215–236, 2004.
[3] Olli Martio, Vladimir Ryazanov, Uri Srebro, Eduard Yakubov. *Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics*. New York : Springer, 2009.
[4] Sergei Volkov, Vladimir Ryazanov. Prime ends in the Sobolev mapping theory on Riemann surfaces. *Mat. Stud.* 48(1) : 24–36, 2017.
[5] Sergei Volkov, Vladimir Ryazanov. On the boundary behavior of mappings in the class W1,1loc on Riemann surfaces. *Complex Anal. Oper. Theory*, 11 (7) : 1503–1520, 2017.

Minimal generating set and structure of a wreath product of groups and the fundamental group of an orbit of Morse function

Skuratovskii Ruslan
(The National Technical University of Ukraine Igor Sikorsky Kiev Polytechnic Institute, Ukraine)
E-mail: r.skuratovskii@kpi.ua

Aled Williams
(Cardiff University, Cardiff, UK)
E-mail: williamsae13@cardiff.ac.uk

The quotient group of the restricted and unrestricted wreath product by its commutator is found. The generic sets of commutator of wreath product were investigated.

We generalize the results presented in the book of Meldrum J. [1] about commutator subgroup of wreath products since, as well as considering regular wreath products, we consider those which are not regular (in the sense that the active group $\mathcal{A}$ does not have to act faithfully). The fundamental group of orbits of a Morse function $f : M \to \mathbb{R}$ defined upon a Möbius band M with respect to the right action of the group of diffeomorphisms $\mathcal{D}(M)$ has been investigated.

Denote the set of all the orbits of $\mathcal{A}$ on X by $\mathcal{O}$, if this set is finite then by $\mathcal{O}_f$. Recall that the direct product indexed by infinite set consists of all infinite sequences, and the direct sum consists only of sequences with finitely many elements distinct from zero. Denote by $Z(\tilde{\triangle}(\mathcal{B}))$ the subgroup of diagonal subgroup [2] $Fun(X, Z(B))$ of functions $f : X \to Z(B)$ which are constant on each orbit of action of A on X for unrestricted wreath product, and denote by $Z(\triangle(\mathcal{B}^n))$ the subgroup of diagonal $Fun(X, Z(\mathcal{B}^n))$ of functions with the same property for restricted wreath product, where n is number of non-trivial coordinates in base of wreath product.

Theorem 1. *A centre of the group $(\mathcal{A}, X) \wr \mathcal{B}$ is direct product of normal closure of centre of a diagonal of $Z(\mathcal{B}^n)$ i.e. $(E \times Z(\triangle(\mathcal{B}^n)))$, trivial an element, and intersection of $(\mathcal{K}) \times E$ with $Z(\mathcal{A})$. In other words,*

$$Z((\mathcal{A}, X) \wr \mathcal{B}) = \langle (1;\ \underbrace{h, h, \ldots, h}_{n}),\ e,\ Z(\mathcal{K}, X) \wr \mathcal{E} \rangle \simeq (Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}) \times Z(\triangle(\mathcal{B}^n)),$$

where $h \in Z(\mathcal{B})$, $|X| = n$.

For restricted wreath product with n non-trivial coordinate: $Z((\mathcal{A}, X) \wr \mathcal{B}) =$
$\langle (1;\ \ldots, h, h, \ldots, h, \ldots),\ e,\ Z(\mathcal{K}, X) \wr \mathcal{E} \rangle \simeq (Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}) \times Z(\triangle(\mathcal{B}^n)) \simeq$
$\simeq \bigoplus\limits_{j \in O_f} (Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}) \times Z(\mathcal{B})$.

In case of unrestricted wreath product we have: $Z((\mathcal{A}, X) \wr \mathcal{B}) =$
$\langle (1;\ \ldots, h_{-1}, h_0, h_1, \ldots, h_i, h_{i+1}, \ldots,),\ e,\ Z(\mathcal{K}, X) \wr \mathcal{E} \rangle \simeq (Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}) \times Z(\tilde{\triangle}(\mathcal{B}))$
$= \prod\limits_{j \in O} (Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}) \times Z(\mathcal{B})$.

Theorem 2. *If $W = (\mathcal{A}, X) \wr (\mathcal{B}, Y)$, where $|X| = n$, $|Y| = m$ and active group $\mathcal{A}$ acts on X transitively, then*

$$d\left(G'\right) \leq (n-1)d(\mathcal{B}) + d(\mathcal{B}') + d(\mathcal{A}').$$

Theorem 3. *The quotient group of a restricted wreath products $G = Z \wr_X Z$ by a commutator subgroup is isomorphic to $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. In previous conditions if $G = A \wr_X B$ then, $G/G' = A/A' \times B/B'$. If $G = Z_n \wr Z_m$, where $(m,\ n) = 1$, then $d(G/G') = 1$. If $G = Z \wr Z$ is an unrestricted regular wreath product then $G/G' \simeq Z \times E \simeq Z$.*

References

[1] John DP Meldrum. Wreath products of groups and semigroups, volume 74. CRC Press, London, 1995.

[2] *J.D. Dixon, B. Mortimer*. Permutation Groups. Springer-Verlag, New York 1996.

[3] Skuratovskii R. V. The commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of alternating group, commutator width of wreath product [Source: Arxiv.org], access mode: https://arxiv.org/pdf/1903.08765.pdf.

[4] Ruslan Skuratovskii. Minimal generating sets for wreath products of cyclic groups, groups of automorphisms of ribe graph and fundumental groups of some morse functions orbits. In *Algebra, Topology and Analysis*, Odessa, Ukraine, 2016, 121–123.

[5] Skuratovskii R. V., Aled Williams, Minimal Generating Set and a Structure of the Wreath Product of Groups, and the Fundamental Group of the Orbit Morse Function. [Source: Arxiv.org], 3 Sep 2019, access mode: https://arxiv.org/pdf/1901.00061.pdf

[6] Skuratovskii R. V. Involutive irreducible generating sets and structure of sylow 2-subgroups of alternating groups. // *ROMAI J.* Vol 13, № 1 (13): 117–139, 2017.

Functors and fuzzy metric spaces

Aleksandr Savchenko
(Kherson State Agrarian University, 23 Stretenska str., 73006 Kherson, Ukraine)
E-mail: savchenko.o.g@ukr.net

Mykhailo Zarichnyi
(Ivan Franko National University of Lviv, 1 Universytetska str., 79000 Lviv, Ukraine)
E-mail: zarichnyi@yahoo.com

H. Toruńczyk and J. West [11] considered the construction of (completed) infinite iteration of the hyperspace functor and established some of its geometric properties. A counterpart of this construction for the superextension functor was investigated in [12]. Later, V. Fedorchuk [3] introduced a general notion of perfectly metrizable functor and obtained generalizations of results from [12].

Having in mind increasing interest to the fuzzy metric spaces we are going to extend the notion of perfectly metrizable functor over the class of fuzzy metric spaces in the sense of George and Veeramani [5].

Let X be a set, $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ be a continuous t-norm. A GV-fuzzy metric on X is a mapping $m\colon X\times X\times\mathbb{R}_+\to(0,1]$ satisfies the following conditions for all $x,y,z\in X$, $s,t\in\mathbb{R}_+$:

(1GV) $m(x,y,t)>0$;
(2GV) $m(x,y,t)=1$ if and only if $x=y$;
(3GV) $m(x,y,t)=m(y,x,t)$;
(4GV) $m(x,z,t+s)\geq m(x,y,t)*m(y,z,s)$;
(5GV) the function $m(x,y,-)\colon\mathbb{R}_+\to[0,1]$ is continuous.

We will consider the class of (closed to) normal functors in the category **Comp** of compact Hausdorff spaces and continuous maps. For any such a functor F, there exists a natural transformation $\eta\colon 1_{\mathbf{Comp}}\to F$.

Suppose that to each compact fuzzy metric space $(X,m_X,*)$ a fuzzy metric $m_{F(X)}$ on the space $F(X)$ is assigned (with respect to the same triangular norm $*$). We will make the following assumptions:

(1) If $f\colon(X,m_X)\to(Y,m_Y)$ is an isometric embedding, then so is

$$F(f)\colon(F(X),m_{F(X)})\to(F(Y),m_{F(Y)}).$$

(2) The map $\eta_X\colon(X,m_X)\to(F(X),m_{F(X)})$ is an isometric embedding.
(3) $\operatorname{diam}(X,m_X)=\operatorname{diam}(F(X),m_{F(X)})$.

We suppose now that the mentioned functor F is a functorial part of a monad (F,η,ψ). Then we additionally require that the following holds.

(4) The map $\psi_X\colon(F^2(X),m_{F^2(X)})\to(F(X),m_{F(X)})$ is nonexpanding.

The condition in the definition from [3] that concerns the preservation of uniform continuity (this is equivalent to the preservation of (ε,δ)-continuity) does not have a unique counterpart in the case of fuzzy metric spaces, as in the latter case there are different notions of uniform continuity (see, e.g., [6, 4]).

In the talk, we discuss the question of completion of the metric direct limits of the form

$$F^+(X)=\varinjlim\{X\to F(X)\to F^2(X)\to\dots\},$$

with bonding maps $F^n(X)\to F^{n+1}(X)$ taken from the set $\{F^j(\eta_{F^{n-j}(X)})\mid 0\leq j\leq n\}$. Remark that the completion of fuzzy metric spaces does not necessarily exist [7].

Next, we consider the question of embedding of the (completions of the) spaces $F^+(X)$ in the spaces of the form

$$F^\omega(X) = \varprojlim\{F(X) \leftarrow F^2(X) \leftarrow F^3(X) \leftarrow \dots\}$$

As an example, we consider the hyperspace functor ([8]; see also [1]). Another example is the functor of idempotent measures; its fuzzy metrization is constructed in [2]. Recall that the idempotent measures are counterparts of the probability measures in idempotent mathematics, i.e., the part of mathematics in which at least one of arithmetic operations in $\mathbb{R}$ is replaced by an idempotent operation (e.g., max or min).

In the paper [10], a metrization of functors of finite degree is constructed. The considerations of this paper are significantly extended in [1], where the so called ℓ^p-metrics are defined on the sets of the form $F(X)$, where F is a functor with finite supports on the category of sets.

References

[1] T. Banakh, V. Brydun, L. Karchevska, M. Zarichnyi, The ℓ^p-metrization of functors with finite supports, Preprint, arXiv:2004.02017

[2] V. Brydun, A. Savchenko, M. Zarichnyi. Fuzzy metrization of the spaces of idempotent measures. *European Journal of Mathematics*, 6 (1) : 98–109, 2020.

[3] V. V. Fedorchuk. Triples of infinite iterates of metrizable functors. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 36(2):411–433, 1991.

[4] V. Gregori, S. Romaguera and A. Sapena, Uniform Continuity in Fuzzy Metric Spaces. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* Suppl. 2, Vol. XXXII : 81–88, 2001.

[5] A. George, P. Veeramani. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst.* 64 : 395–399, 1994.

[6] A. George, P. Veeramani. Some theorems in fuzzy metric spaces, *J. Fuzzy Math.* 3 : 933–940, 1995.

[7] V. Gregori, S. Romaguera. On completion of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems.* 130 (3) : 399–404, 2002.

[8] J. Rodríguez-López, S. Romaguera. The Hausdorff fuzzy metric on compact sets. *Fuzzy Sets and Systems.* 147 (2) : 273–283, 2004.

[9] A. Savchenko. Fuzzy hyperspase monad. *Mat. Stud.* 33 : 192—198, 2010.

[10] O. Shukel'. Functors of finite degree and asymptotic dimension zero. *Mat. Stud.* 29 : 101–107, 2008.

[11] H. Torunczyk, J. West. A Hilbert spacelimit for the iterated hyperspace functor. *Proc. Amer. Math. Soc.* 89 : 329–335, 1983.

[12] M. Zarichnyi. Iterated superextensions, in: General topology, 1986, Moscow, Moscow University, 45–59, (in Russian).

Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять добуток різного типу нелінійностей у правій частині

Чепок Ольга Олегівна
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна)
E-mail: olachepok@ukr.net

Розглядається диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1; 1\}, p\colon [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$, $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i \in \{0, 1\})$ – неперервні функції, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} – однобічний окіл Y_i.

Вважаємо також, що функція φ_1 є правильно змінною (див. [1], розділ 1.4, стор. 17) при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1, а функція φ_0 двічи неперервно диференційовна на Δ_{Y_0} та така, що

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(z)\varphi_0''(z)}{\left(\varphi_0'(z)\right)^2} = 1. \tag{2}$$

В силу умов (2) функція φ_0 та її похідна першого порядку є [1] швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_0. Таким чином, досліжуване диференціальне рівняння містить у правій частині добуток швидко та правильно змінних функцій.

Диференціальне рівняння (1) досліджується щодо умов існування у нього $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків, а також асимптотичних зображень таких розв'язків та їх похідних першого порядку.

Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язком, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[$ і задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t) y(t)} = 0.$$

Основні результати доводяться у припущенні існування для $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків скінченної чи нескінченної границі $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \dfrac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)}$ та викладені у [2]. За апріорними властивостями таких розв'язків маємо

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = -1, \tag{3}$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}.$$

Наразі уточнена кількість таких $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків рівняння (1). Було отримано, що у випадку, коли $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \dfrac{\pi_\omega(t) I_2'(t)}{I_2(t)} = c \in R$,

(1) при $c(1 - \sigma_1) > 0$ рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків,
(2) при $c(1 - \sigma_1) < 0$ та $\beta(1 - \sigma_1) < 0$ рівняння (1) має двопараметричну сім'ю таких розв'язків,
(3) при $c(1 - \sigma_1) < 0$ та $\beta(1 - \sigma_1) > 0$ — має принаймні один такий розв'язок, де

$$I_2(t) = \operatorname{sign}(y_1^0) \cdot \int_{B_\omega^2}^{t} \left| \pi_\omega(\tau) p(\tau) \theta_1 \left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(\tau)|} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau \text{ при } t \in [b; \omega[\subset [t_0, \omega[.$$

У випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_2'(t)}{I_2(t)} = \pm\infty$, рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків.

Література

[1] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L., *Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications*, Cambridge university press,Cambridge, 1987.

[2] Чепок О. О. *Асимптотичні зображення повільно змінних розв'язків двочленних диференціальних рівнянь другого порядку з нелінійностями різних типів* // Буковинський математичний журнал. – 2016. – **4**, №3-4. – С. 190-196.

Голоморфно-проективні перетворення локально конформно-келерових многовидів у симетричній F-зв'язності.

Є. В. Черевко
(Одеська національна академія харчових технологій, вул. Канатна, б. 112, м.Одеса, 65039, Україна)
E-mail: cherevko@usa.com

В. Є. Березовський
(Уманський национальний університет садівництва, вул. Інститутська, б. 1, м.Умань, Черкаськая обл., 20305, Україна)
E-mail: berez.volod@gmail.com

Й. Мікеш
(Університет Палацького в Оломоуце, вул. 17 Листопада, б. 12, м. Оломоуц, 77147, Чеська республіка)
E-mail: josef.mikes@upol.cz

Означення 1. Ермітовий многовид M_n, має назву *локально конформно-келерового* (коротше, ЛКК-) *многовидом*, якщо існує відкрите покриття $\mathfrak{U} = \left\{U_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ многовиду M та система

$$\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$$

гладких функцій таких, що $\left\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\right\}$ – келерова структура для будь якого $\alpha \in A$. Перехід від метрики $g|_{U_\alpha}$ до метрики $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ має назву *локально конформного перетворення структури*. Функція σ має назву *визначальною функцією* конформного перетворення[2].

На ЛКК-многовиді глобально визначено форма Лі(Lee):

$$\omega = \frac{2}{n-2}\delta\Omega \circ J$$

Відомо, що ЛКК-многовиди не допускають голоморфно-проективних передворень для зв'язності Леві-Чівіта [3]. Але можна на такому многовиді задати симетричну F-зв'язність, тобто таку, в якій комплексна структура є коваріантно сталою:

$$\overline{\nabla}_X J = 0.$$

Це не тільки відома зв'язність Вейля. Наприклад, симетричну F-зв'язність, можна побудувати іншим чином. Нехай шукана F-зв'язність задана формулою:

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + P^k_{ij},$$

де P^k_{ij} – тензор афіної деформації, а символом Γ^k_{ij} позначено компоненти зв'язності Леві-Чівіта, узгодженої з ЛКК-метрикою g_{ij}. Тензор афіної деформації для F-зв'язності будь-якого ермітового многовиду можна задати так [1]:

$$P^k_{ij} = -\frac{1}{4}(\nabla_j J^u_i + \nabla_i J^u_j)J^k_u + \frac{1}{4}(\nabla_j J^k_u - \nabla_u J^k_j)J^u_i. \tag{1}$$

Символом ∇ позначено коваріантну похідну у зв'язності Леві-Чівіта, узгодженої з ЛКК-метрикою. Враховуючи, що на ЛКК-многовиді

$$\nabla_j J^k_i = \frac{1}{2}\left(\delta^k_j J^t_i \omega_t - \omega^h J_{ij} - J^k_j \omega_i + J^k_t \omega^t g_{ij}\right),$$

з (2) отримуємо:

$$P_{ij}^{k} = -\frac{1}{4}\big(\delta_j^k\omega_i + \delta_j^k\omega_j + J_j^k J_i^t\omega_t + J_i^k J_j^t\omega_t - 2\omega^k g_{ij}\big).$$

Нехай голоморфно-проективних перетворяння породжуються майже аналітичним векторним полем ξ, тобто таким, для якого виконується

$$\mathfrak{L}_\xi J_i^h = 0.$$

Тоді похідна Лі об'єкту зв'язності Леві-Чівіта при голоморфно-проективних перетворяннях тоді матиме вигляд:

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma_{ij}^h = \frac{1}{4}\big(\delta_j^h\nabla_i\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big) + \delta_i^h\nabla_j\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big) + J_j^h J_i^t\nabla_t\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big) + J_i^h J_j^t\nabla_t\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)$$
$$-g^{hr}\nabla_r\big(\omega_\alpha\xi^\alpha\big)g_{ij} - \omega^h\mathfrak{L}_\xi g_{ij} + g^{h\beta}\omega^\alpha(\mathfrak{L}_\xi g_{\beta\alpha})g_{ij}\big) + \rho_j\delta_i^h + \rho_i\delta_j^h - \rho_t J_i^t J_j^h - \rho_t J_j^t J_i^h.$$

Доведено, що об'єкт

$$\Pi_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \frac{1}{2}\omega^h g_{ij} - \frac{1}{n+2}\Big(\big(\Gamma_{js}^s + \omega_j\big)\delta_i^h + \big(\Gamma_{is}^s + \omega_i\big)\delta_j^h$$
$$+\big(\Gamma_{ts}^s - \frac{n}{2}\omega_t\big)J_i^t J_j^h + \big(\Gamma_{ts}^s - \frac{n}{2}\omega_t\big)J_j^t J_i^h\Big)$$

є інваріантним при цих перетвореннях. Цікавим є те, що такий самий об'єкт буде інваріантним, якщо скористатися для голоморфно-проективних перетворень зв'язністю Вейля [4].

Література

[1] *K. Yano*, Differential geometry on complex and almost complex spaces. New York: Pergamon Press Book –New York: 326p. 1965.

[2] *В. Ф. Кириченко* Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия. *Матем. сб.*, Т. 51(5), 57—66 1992.

[3] *Zh. Radulovich, J. Mikeš* Geodesic and holomorphically-projective mappings of conformally-Kählerian spaces. Opava: Silesian Univ. Math. Publ. 1 (1993) pp. 151-156.

[4] *Є. В. Черевко* Інваріантні об'єкти конформно голоморфно-проективних перетворень ЛКК-многовидів. Proc. Inter. Geom. Center, v.10, № 3-4, 2017 с.29-43.

Графи Кронрода–Ріба функцій Морса на 2-торі та їх автоморфізми

Богдан Фещенко
(Лабораторія топології у складі відділу алгебри і топології, Інститут математики НАН України)
E-mail: fb@imath.kiev.ua

Нехай M – гладка орієнтована компактна поверхня. Група дифеоморфізмів $\mathcal{D}(M)$ діє на просторі гладких функцій $C^\infty(M)$ за таким правилом: $\gamma : C^\infty(M) \times \mathcal{D}(M) \to C^\infty(M)$, $\gamma(f, h) = f \circ h$. Відносно цієї дії визначимо стабілізатор $\mathcal{S}(f)$ та орбіту $\mathcal{O}(f)$ природним чином:

$$\mathcal{S}(f) = \{h \in \mathcal{D}(M) \,|\, f \circ h = f\}, \qquad \mathcal{O}(f) = \{f \circ h \,|\, h \in \mathcal{D}(M)\}.$$

Наділимо простори $\mathcal{D}(M)$ та $C^\infty(M)$ сильними топологіями Уїтні. Ці топології індукують деякі топології на просторах $\mathcal{S}(f)$ та $\mathcal{O}(f)$.

Нехай $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M)$ – зв'язна компонента тотожнього відображення простору $\mathcal{D}(M)$, $\mathcal{O}_f(f)$ – компонента зв'язності $\mathcal{O}(f)$, що містить f і $\mathcal{S}'(f) = S(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M)$ – група дифеоморфізмів M, що зберігають гладку функцію f.

Гомотопійні властивость компонент зв'язності просторів $\mathcal{S}(f)$ та $\mathcal{O}(f)$ для функцій Морса на компактних поверхнях досліджувались у роботах Е. Кудрявцевої, С. Максименка та його учнів. Зокрема, було встановлено, що $\mathcal{O}_f(f)$ є гомотопійно еквівалентною фактор-простору $(S^1)^m/G(f)$ у випадку коли $M \neq S^2$ і $\mathrm{SO}(3) \times (S^1)^m/G(f)$, якщо $M = S^2$, де $G(f)$ – група автоморфізмів графу Кронрода–Ріба функції Морса на M, що є індукованими дифеоморфізмами з $\mathcal{S}'(f)$, яка вільно діє на $(S^1)^m$, $m \in \mathbb{N}$, див. огляд у [4].

С. Максименко та А. Кравченко вивчали мінімальну множину класів ізоморфізмів груп $G(f)$ для функцій Морса на компактних поверхнях крім 2-тора та підмножини цієї множини для простих та загальних (generic) функцій Морса [1, 2, 3]. Ми дамо опис мінімальної множини класів ізоморфізму груп $G(f)$ для фунцій Морса на 2-торі. Матеріал тез базується на статті [4].

Для формулювання результатів ми нагадаємо означення вінцевого добутку з циклічними групами та розглянемо декілька класів груп, що визначаються за допомогою вінцевих добутків. Нехай G – група і $n, m \geq 1$ – натуральні числа. Розглянемо дві ефективні дії $\alpha : G^n \times \mathbb{Z}_n \to G^n$ і $\beta : G^{nm} \times (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m) \to G^{nm}$ груп $\mathbb{Z}_n$ та $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ на G^n та G^{nm} відповідно, що задані формулами:

$$\alpha((g_i)_{i=0}^{n-1}, a) = (g_{i+a})_{i=0}^{n-1}, \qquad \beta((g_{i,j})_{i,j=0}^{n-1,m-1}, (b, c)) = (g_{i+b,j+c})_{i,j=0}^{n-1,m-1},$$

де усі індекси взяті за модулями n та n, m. Напівпрямі добутки $G \wr \mathbb{Z}_n := G^n \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_n$ і $G \wr (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m) := G^{nm} \rtimes_\beta (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m)$, що відпоівдають цим діям, ми будемо називати вінцевими добутками G з $\mathbb{Z}_n$ та G з $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m)$ відповідно.

Для натурального n, нехай $\mathcal{P}_n$ – мінімальна множина класів ізоморфізму груп, що задовольняють таким умовам:

- одинична група $\{1\}$ належить до $\mathcal{P}_n$,
- якщо $A, B \in \mathcal{P}_n$, то $A \times B$ та $A \wr \mathbb{Z}_n$ належать до $\mathcal{P}_n$.

Нехай $\mathcal{P}$ мінімальна множина класів ізоморфізму груп, що містять $\mathcal{P}_n$ як підмножини для усіх $n \in \mathbb{N}$. Нехай також $\mathscr{E}_i$, $i = 0, 1, 2$ – мінімальні множини класів ізоморфізму груп таких, що

- $\mathscr{E}_0$ містить групу $A_0 \wr (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn})$, $n, m \geq 1$ для будь-якої $A_0 \in \mathcal{P}$,
- $\mathscr{E}_1$ містить групу $A_1 \wr \mathbb{Z}_n$, $n \geq 1$ для будь-якої $A_1 \in \mathcal{P}$,
- $\mathscr{E}_2$ містить групу $A_2 \wr \mathbb{Z}_n$, $n \geq 1$ для будь-якої $A_2 \in \mathcal{P}_2$.

Відомо, що граф Кронрода–Ріба функції Морса на 2-торі є або деревом, або містить цикл. Мінімальну множину класів ізоморфізму груп $G(f)$ для функцій Морса на 2-торі графи яких є деревами позначимо через $\mathscr{G}_0(T^2)$, а в іншому випадку через $\mathscr{G}_1(T^2)$. Позначимо через $\mathscr{G}^{smp}(T^2)$ мінімальну множину класів ізоморфізмів груп $G(f)$ для простих функцій Морса на 2-торі.

Основним результатом є така теорема.

Теорема 1 (Theorem 2.5 [4]). *Мають місце рівності:*

$$\mathscr{G}_0(T^2) = \mathscr{E}_0, \qquad \mathscr{G}_1(T^2) = \mathscr{E}_1, \qquad \mathscr{G}^{gen}(T^2) = \mathscr{E}_2.$$

Література

[1] A. Kravchenko and S. Maksymenko. Automorphisms of Kronrod-Reeb graphs of Morse functions on 2-sphere, *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 11 (2018), no. 4, pp. 72-79, arXiv:1903.09721

[2] A. Kravchenko and S. Maksymenko. Automorphisms of Kronrod-Reeb graphs of Morse functions on compact surfaces, *European Journal of Mathematics*, (2020), 18 pages, arXiv:1808.08746

[3] A. Kravchenko and S. Maksymenko. Automorphisms of cellular divisions of 2-sphere induced by functions with isolated critical points, (2019) 18 pages, arXiv:1911.10808

[4] A. Kravchenko and B. Feshchenko. Automorphisms of Kronrod-Reeb graphs of Morse functions on 2-torus, *Methods of Functional Analysis and Topology* vol. 26 (2020), no. 1, pp. 88–96, arXiv:1912.00624

Приклади поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю та сталою кривиною грассманового образу в просторі Мінковського

М. Гречнєва
(Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна)
E-mail: grechnevamarina@gmail.com

П. Стєганцева
(Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна)
E-mail: stegpol@gmail.com

Використання понять грассманового многовиду та грассманового образу поверхні дозволяє розширити коло задач диференціальної геометрії [1], [2]. В роботі [10] встановлено, що секційна кривина $\bar{K}(\sigma)$ грассманового многовиду $G(2,4)$ евклідового простору R_4 приймає значення з відрізку $[0,2]$, а для простору Мінковського в [6] доведено, що ця кривина може бути будь-яким дійсним числом. Досліджені в [9],[3] поверхні евклідового простору з мінімальним та максимальним значеннями кривини грассманового многовиду вздовж площин, дотичних до грассманового образу поверхні (кривини грассманового образу поверхні). Для простору Мінковського аналогічне дослідження проведено в [4].

В [5] досліджені багатовимірні поверхні евклідового простору з плоскою нормальною зв'язністю та постійною кривиною грассманового многовиду. В цій роботі для таких поверхонь простору Мінковського з метрикою сігнатури $(-+++)$ отримані наступні результати.

Теорема 1. *Нехай $V^2 \subset^1 R_4$ є регулярною часоподібною поверхнею з плоскою нормальною зв'язністю і невиродженим грассмановим образом сталої кривини $\bar{K}$. Тоді $\bar{K}$ приймає значення з відрізку $[0,1]$.*

Теорема 2. *Нехай $V^2 \subset^1 R_4$ є регулярною просторовоподібною поверхнею з плоскою нормальною зв'язністю і невиродженим грассмановим образом сталої кривини $\bar{K}$. Тоді значення цієї кривини належать множині $(-\infty,-1]\bigcup\{0\}$, якщо грассмановий образ просторовоподібний і множині $[0,-\infty)$, якщо грассмановий образ часоподібний.*

Для обчислення кривини грассманового образу часоподібної та просторовоподібної поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю використовуємо відповідно формули, які виведені з запропонованої в роботі [8] формули для секційної кривини грассманових многовидів псевдоевклідових просторів

$$\bar{K}(\sigma) = \frac{(L^2_{11}L^2_{22} + L^1_{22}L^1_{11})^2}{(L^2_{11}L^2_{22})^2 + (L^1_{22}L^2_{11})^2 + (L^1_{11}L^2_{22})^2 + (L^1_{11}L^1_{22})^2} \tag{1}$$

та

$$\bar{K}(\sigma) = -\frac{(L^2_{11}L^2_{22} - L^1_{22}L^1_{11})^2}{(L^2_{11}L^2_{22})^2 - (L^1_{22}L^2_{11})^2 - (L^1_{11}L^2_{22})^2 + (L^1_{11}L^1_{22})^2}, \tag{2}$$

в яких L^k_{ij} - коефіцієнти других квадратичних форм відповідних поверхонь.

Наведемо приклади, ідея яких взята з роботи [7].

Приклад 3. Часоподібна поверхня задана фундаментальними формами $ds^2 = -du^2 + dv^2$, $II^1 = a^2du^2 - b^2dv^2$, $II^2 = h(du^2 + dv^2)$, $a, b, h = const$. Кривина її грассманового образу задовольняє нерівності $0 \leq \bar{K}(\sigma) \leq 1$ при будь-яких значеннях a, b, h.

Приклад 4. Просторовоподібна поверхня, задана фундаментальними формами $ds^2 = du^2 + dv^2, II^1 = du^2 - 4dv^2, II^2 = du^2 + dv^2$, має просторовоподібний грассмановий образ. Кривина її грассманового образу дорівнює $\bar{K}(\sigma) = -\frac{25}{12}$. Просторовоподібна поверхня, задана фундаментальними формами $ds^2 = du^2 + dv^2$, $II^1 = du^2 + 4dv^2$, $II^2 = 2du^2 + 3dv^2$, має часоподібний грассмановий образ. Кривина її грассманового образу дорівнює $\bar{K}(\sigma) = \frac{4}{21}$.

Існування розглянутих поверхонь випливає з того, що коефіцієнти їх фундаментальних форм задовольняють рівнянням Гаусса-Кодацці-Річчі.

Література

[1] Аминов Ю.А. *Геометрия подмногообразий* // К.: Наукова думка, 2002

[2] Борисенко А.А. *Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий* // М.: Изд-во "Экзамен 2003

[3] Борисенко А.А., Николаевский Ю.А. *О поверхностях с максимальной кривизной грассманова образа* // Мат. заметки. – 1990.– **48**.– (3).– С.12-19

[4] Гречнева М.А., Стеганцева П.Г. *О поверхностях со стационарными значениями секционной кривизны грассманова образа*// Proceedings of the International Geometry Centre.– 2016.– **9**.– (2).–С.42–48

[5] Лисица В.Т. *Многомерные поверхности с плоской нормальной связностью с постоянной кривизной грассманова образа* // Известия вузов. Математика.– 2004.– **5**.– С.47–51

[6] Стеганцева П.Г., Гречнева М.А. *Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства* // Известия вузов. Математика.–2017.–(2).–С.65-75

[7] Фоменко В.Т. *Двумерные поверхности с плоской нормальной связностью в пространстве постоянной кривизны, несущие геодезические постоянной кривизны* // Мат. заметки. –2000.–**68**.–(4).–С.579-586

[8] Маазикас И. *К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства* // Ученые записки Тартусского университета.– 1974.– 342.– С.76-82

[9] Muto Y.*The Gauss map of submanifolds in a Euclidean space.* // J. Math. Soc. Japan.–1978.– **30**.–(1).– P.85-100.

[10] Wong Y. C. *Sectional curvatures of Grassmann manifolds.*// Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.–1968.–**60**–(1).– P.75-79

Про число топологічно нееквівалентних напівмінімальних гладких функцій на двовимірному кренделі

О. А. Кадубовський
(ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», Слов'янськ, Україна)
E-mail: kadubovs@ukr.net

Нехай M_g – замкнена гладка орієнтовна поверхня роду $g \geq 0$, а $C_n(M_g)$ – клас гладких функцій на M_g (з трьома критичними значеннями), які окрім локальних мінімумів та локальних максимумів мають лише одну (в загальному випадку *вироджену*) критичну точку типу сідла, індекс Пуанкаре якої становить $1 - n = 2 - 2g - \lambda$, де $\lambda \geq 2$ – сумарне число локальних мінімумів та максимумів (напр. [4], [5]).

Функції f_1 і f_2 з класу $C_n(M_g)$ називають топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : M_g \to M_g$ і $h' : R^1 \to R^1$ (h' зберігає орієнтацію), такі що $f_2 = h' \circ f_1 \circ h^{-1}$.

Якщо h зберігає орієнтацію, то функції f_1 та f_2 називають топологічно спряженими (напр. [4]) або ж O-топологічно еквівалентними (напр. [5]).

Через $C_{k,l}(M_g) \subset C_n(M_g)$ позначимо клас функцій на M_g, які мають точно k локальних мінімумів (максимумів), l локальних максимумів (мінімумів) та одну критичну точку типу сідла. Якщо $k = l = 1$, то функції з відповідного класу називають мінімальними; якщо ж $k = 1, l > 1$ (або $l = 1, k > 1$), то функції з відповідного класу будемо називати *напівмінімальними*.

Задачі про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класів $C_{1,1}(M_g)$ ($g \geq 0$) і $C_{k,l}(M_0)$ ($k, l \in N$) було повністю розв'язано лише у 2015 р. в роботах [5] та [6] відповідно.

В загальному випадку, для натуральних g, k, l (або ж k, l і $n = 2g+k+l-1$, тобто для функцій з фіксованим сингулярним типом), задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ виявилась досить важкою та нерозв'язаною до сьогодні проблемою.

Як з'ясувалося (в [2] з посиланням на роботу [1]), задача про перерахування одноклітинкових двокольорових карт з n ребрами (одне з яких є поміченим), k білими та l чорними вершинами тісно пов'язана із задачею про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$. Відомості про карти можна знайти, наприклад, в огляді [1] та роботі [2].

Явні формули для підрахунку числа O-топологічно нееквівалентих функцій з класу $C_n(T^2) \equiv C_n(M_1)$ анонсовано в [7]. Для фіксованих натуральних k і l задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(T^2)$ також залишається нерозв'язаною.

З урахуванням результатів робіт [2] і [3] встановлено справедливість наступних тверджень для двовимірного кренделя P^2.

Теорема 1. *Для довільного натурального $n = m + 4 \geq 5$ число $d^*(n)$ O-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,m}(P^2)$ можна обчислити за формулою*

$$d^*(n) = \frac{1}{n} \left(\frac{(3n^2 - n - 6)}{8} \cdot C_{n+1}^6 + \sum_{j|n,\ j \in \{2;3;4;5;6;8\}} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \tfrac{n}{j}\right) \right), \tag{1}$$

де: $\phi(q)$ – функція Ейлера; $\forall j \in N : \frac{n}{j} \notin N$ величини $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \equiv 0$, а

$\forall j \in \{2;3;4;5;6;8\} : \frac{n}{j} \in N$ величини $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$ визначаються за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} &\rho\left(n, \frac{n}{5}\right) = \frac{3n}{5}, && \rho\left(n, \frac{n}{6}\right) = \frac{n}{6}, && \rho\left(n, \frac{n}{8}\right) = \frac{n}{8}, \\ &\rho\left(n, \frac{n}{3}\right) = \frac{n(n-3)}{6}, && \rho\left(n, \frac{n}{4}\right) = \frac{n(n-4)}{32}, && \rho\left(n, \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)(n-4)(5n+2)}{384}. \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 2 (основна). *Для довільного натурального $n = m + 4 \geq 5$ число $d^{**}(n)$ топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,m}(P^2)$ можна обчислити за формулами*

$$d^{**}(n) = \frac{1}{2}\left(d^*(n) + S(n)\right), \tag{3}$$

де

$$S(n) = \begin{cases} \dfrac{(n-3)(n-1)(n+1)(5n+7)}{384}, & n = 2k+1 \\ \dfrac{(n-4)(n-2)\left(5n^2+34n+96\right)}{384}, & n = 2k. \end{cases} \tag{4}$$

n	$d(n)$	$d^*(n)$	$d^{**}(n)$	n	$d(n)$	$d^*(n)$	$d^{**}(n)$
5	8	4	4	**21**	12 087 306	575 592	288 951
6	84	16	13	**22**	17 968 566	816 858	409 959
7	469	67	44	**23**	26 212 571	1 139 677	571 516
8	1 869	237	140	**24**	37 589 475	1 566 377	785 361
9	5 985	667	366	**25**	53 068 015	2 122 723	1 063 721
10	16 401	1 649	883	**26**	73 854 495	2 840 739	1 423 367
11	39 963	3 633	1 894	**27**	101 437 245	3 756 943	1 881 702
12	88 803	7 417	3 836	**28**	137 637 045	4 915 841	2 461 957
13	183 183	14 091	7 203	**29**	184 664 025	6 367 725	3 188 185
14	355 355	25 405	12 945	**30**	245 181 573	8 173 019	4 091 833
15	654 654	43 650	22 112	**31**	322 377 804	10 399 284	5 205 312
16	1 154 062	72 166	36 503	**32**	420 045 164	13 126 768	6 570 279
17	1 958 502	115 206	58 086	**33**	542 668 764	16 444 518	8 229 569
18	3 215 142	178 678	90 018	**34**	695 524 060	20 457 020	10 237 300
19	5 126 010	269 790	135 660	**35**	884 784 516	25 279 560	12 649 062
20	7 963 242	398 242	200 162	**36**	1 117 639 908	31 046 082	15 534 091

Таблиця 2.1. Початкові значення величин $d(n)$, $d^*(n)$ та $d^{**}(n)$

Література

[1] Cori R., Machi A. Maps hypermaps and their automorphisms: a survey I, II, III. *Expositiones Mathematicae*, 10 : 403–427, 429–447, 449–467, 1992.

[2] Адрианов Н.М. Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. *Функциональный анализи его приложения*, 31(3) : 1–9, 1997.

[3] Goupil A., Schaeffer G. Factoring n-cycles and counting maps of given genus. *European Journal of Combinatorics*, 19(7) : 819–834, 1998.

[4] Prishlyak A.O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface. *Topologyand its Aplications*, 119(3) : 257–267, 2002.

[5] Кадубовський О.А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 12(6) : 105–145, 2015.

[6] Кадубовский А.А. О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II. *Труды международного геометрического центра*, 8(1) : 46–61, 2015.

[7] Кадубовський О.А. Про число топологічно нееквівалентних гладких функцій з однією критичною точкою типу сідла на двовимірному торі // Тези доповідей міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». Одеса, 28 травня – 3 червня 2019. С. 65-66. 94 с.

Геодезичні відображення просторів з $\varphi(Ric)$-векторними полями

В. Кіосак
(Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Didrihson st., 4, 65029 Odesa, Ukraine.)
E-mail: kiosakv@ukr.net

О. Лесечко
(Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Didrihson st., 4, 65029 Odesa, Ukraine.)
E-mail: lesechko@ukr.net

Виходячи з алгебраїчних міркувань були введені в розгляд $\varphi(Ric)$-векторні поля φ_i, які задовольняють рівнянням:

$$\varphi_{i,j} = sR_{ij}; \quad s_{,i} = 0,$$

де кома — знак коваріантної похідної, а R_{ij} — тезор Річчі. Деякі геометричні властивості таких векторних полів вивчені в роботах В. Кіосака та І. Гінтерляйтнер [1, 2]. Лінійна форма основних рівнянь теорії геодезичних відображень має вигляд [3, .c121]

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}. \tag{1}$$

$$n\lambda_{i,j} = \mu g_{ij} + a_{\alpha i}R^{\alpha}_{j} - a_{\alpha\beta}R^{\alpha\ \ \beta}_{.ij.},$$

тут $\mu = \lambda_{\alpha,\beta}g^{\alpha\beta}$; $R^i_j = R_{\alpha j}g^{\alpha i}$; $R^{h\ \ k}_{\ ij} = R^h_{ij\alpha}g^{\alpha k}$, g_{ij} — метричний тензор V_n, а g^{ij} — елементи матриці оберненої до нього.

Було доведено:

Теорема 1. *Якщо псевдоріманів простір V_n допускає нетривіальні геодезичні відображення, то для тензора a_{ij} та вектора λ_i виконуютьcя умови $\lambda_{i\alpha}a^{\alpha}_{j} - \lambda_{j\alpha}a^{\alpha}_{i} = 0$, де $\lambda_{ij} = \lambda_{i,j}$.*

Теорема 2. *При нетривіальному геодезичному відображенні псевдоріманових просторів, що допускають $\varphi(Ric)$-поля, вектор λ_i є власним вектором тензора a_{ij}:*

$$\lambda^{\alpha}a_{\alpha i} = u\lambda_i.$$

Теорема 3. *Якщо псевдоріманів простір V_n, що допускає $\varphi(Ric)$ векторні поля, допускає нетривіальні геодезичні відображення, то вектори φ_i та λ_i колінеарні, тобто $\varphi_i = \rho\lambda_i$, де ρ — деякий інваріант.*

Теорема 4. *Якщо псевдоріманів простір, що допускає $\varphi(Ric)$-поля, допускає і нетривіальні геодезичні відображення, то в ньому за необхідністю має розв'язок система рівнянь (1) та*

$$\lambda_{i,j} = Ag_{ij} + Ba_{ij},$$

де $B = \dfrac{1}{n}v_{\alpha}\xi^{\alpha}; A = \dfrac{1}{n}(\mu\lambda_{\alpha} - av_{\alpha})\xi^{\alpha}.$

Література

[1] I. Hinterleitner, V. Kiosak, *φ(Ric)-Vector Fields on Conformally Flat Spaces*, volume 1191 of *Proceedings of American Institute of Physics*, 98–103, 2009, https://doi.org/10.1063/1.3275604.

[2] I. Hinterleitner, V. A. Kiosak, *φ(Ric)–Vector Fields in Riemannian Spaces*, volume 44 of *Archivum-mathematicum*, Brno, 385–390, 2008.

[3] Р. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств. *Наука*, 1979.

Деякі питання теорії $2F$-планарних відображень псевдоріманових просторів з абсолютно паралельною f-структурою

Н. Г. Коновенко
(ОНАХТ, Одеса, Україна)
E-mail: ngkonovenko@gmail.com

І. М. Курбатова
(ОНУ, Одеса, Україна)
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Ми продовжуємо вивчення базових питань теорії $2F$-планарних відображень многовидів, які наділені афінорною структурою певного типу [1], [2], [3].

Раніше ми довели, що клас псевдоріманових просторів з абсолютно паралельною f -структурою замкнутий щодо розглянутих відображень, а також що за умовою коваріантної сталості афінора f-структури у відображуваних просторах нетривіальні $2F$-планарні відображення можуть бути трьох типів: повні і канонічні I, II типів. Зараз ми досліджуємо тільки повне $2F$-планарне відображення просторів з абсолютно паралельною f-структурою (V_n, g_{ij}, F_i^h) і $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$, яке в загальній за відображенням системі координат (x^i) характеризується основними рівняннями:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}\delta_{j)}^h + \phi_{(i}\overset{1}{F}{}_{j)}^h + \sigma_{(i}\overset{2}{F}{}_{j)}^h,$$

$$F_i^h(x) = \overline{F}_i^h(x),$$

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h = 0,$$

$$\overset{1}{F}_{ij} + \overset{1}{F}_{ji} = 0, \quad \overset{1}{\overline{F}}_{ij} + \overset{1}{\overline{F}}_{ji} = 0, \quad \overset{1}{F}_{ij} = g_{i\alpha}\overset{1}{F}{}_j^\alpha, \quad \overset{1}{\overline{F}}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}\overset{1}{F}{}_j^\alpha,$$

$$\overset{1}{F}{}_{i,j}^h = 0, \quad i, h, \alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, n,$$

де $\Gamma_{ij}^h, \overline{\Gamma}_{ij}^h$ - компоненти об'єктів зв'язності $V_n, \overline{V}_n$; $\psi_i(x), \phi_i(x), \sigma_i(x)$ - деякі ковектори, а дужками позначена операція симетрування, "," - знак коваріантної похідної в V_n.

Тут позначено

$$\overset{1}{F}{}_i^h = F_i^h, \quad \overset{2}{F}{}_i^h = F_\alpha^h F_i^\alpha.$$

$2F$ПВ вважається тривіальним, коли $\psi_i = \phi_i = \sigma_i = 0$.

В [3] було виділено класи просторів з абсолютно паралельною f-структурою, що допускають $2F$-планарне відображення на плоский простір, і знайдено їх метрики в спеціальній системі координат.

Далі виникає закономірне питання про те, чи існують інші класи таких просторів, які допускають $2F$-планарні відображення, і як їх знайти. Використовуючи методи, розроблені в теорії геодезичних відображень [4], ми зводимо основні рівняння $2F$-планарних відображень основного типу до виду, який допускає ефективне дослідження - це так звана нова форма основних рівнянь. Використовуючи цю нову форму, ми, зокрема, показали, що псевдоріманový простір з абсолютно паралельною f-структурою, в якому існує конціркулярне [4] або квазіконціркулярне [1] векторне поле, допускає нетривіальне $2F$-планарне відображення основного типу. Доведено теореми, які дають регулярний метод, що дозволяє для будь-якого псевдоріманового простору з абсолютно паралельною f-структурою (V_n, g_{ij}, F_i^h) або знайти всі простори $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$, на які V_n допускає $2F$-планарне відображення основного типу, або довести, що таких просторів немає.

Література

[1] Н. Г. Коновенко, И. Н. Курбатова. Основні теореми теорії $2F$-планарних відображень псевдоріманових просторів з f-структурою // Proc. Intern. Geom. Center, 13(1), 9-22, (2020).

[2] Н. Г. Коновенко, И. Н. Курбатова, Е. Цвентух. $2F$-планарные отображения псевдоримановых пространств с f-структурой // Proc. Intern. Geom. Center, 11(1), 39-51, (2018).

[3] Н. Г. Коновенко, И. Н. Курбатова. Специальные классы псевдоримановых пространств с f-структурой, допускающих $2F$-планарные отображения // Proc. Intern. Geom. Center, 11(4), 18-33, (2018).

[4] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств // М.:Наука: Москва, (1979), 487–489.

Фрактальні властивості неперервних перетворень квадрата, пов'язані з двосимвольними зображеннями дійсних чисел

І. М. Лисенко
(НПУ імені М.П. Драгоманова)
E-mail: iryna.pratsiovyta@gmail.com

М. В. Працьовитий
(НПУ імені М.П. Драгоманова, ІМ НАН України)
E-mail: prats4444@gmail.com

Нагадаємо, що *перетворенням множини* називається бієктивне (одночасне ін'єктивне і сюр'єктивне, тобто взаємно однозначне) відображення цієї множини на себе. З групової точки зору окрема геометрична теорія вивчає інваріанти певної групи перетворень простору. З цієї точки зору *фрактальна геометрія*[1] вивчає інваріанти групи перетворень простору, які зберігають фрактальну розмірність Гаусдорфа-Безиковича множин (мається на увазі, що образ і прообраз мають однакову розмірність).

Використовуючи різні зображення (кодування) дійсних чисел, у ряді робіт вивчались перетворення відрізка, які мають фрактальні властивості, самоподібності, автомодельності, зберігають чи трансформують міру, розмірність або інші числові характеристики борелівських множин або певні властивості зображення чисел. Комбінації таких перетворень (прямий добуток або інші «операції») приводять до цікавих перетворень квадратів та прямокутників з фрактальними властивостями. Часто в якості інваріантних множин таких перетворень виникають графіки неперервних локально складних функцій (сингулярних, ніде не монотонних, недиференційовних).

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних властивостей перетворень квадрата: $K = [0;1]\times[0;1]$ та $C = [0;g_0]\times[0;g_0]$, де параметр $g_0 \in (\frac{1}{2};1)$ які визначаються у термінах двосимвольних кодувань (зображень) дійсних чисел: Q_2-зображення і G_2-зображення. Нагадаємо їх зміст

$$[0;1] \ni x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\alpha_k q_{1-\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

$$[0;g_0] \ni x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\alpha_k g_{1-\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}\right) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

де $\alpha_k \in A = \{0,1\}$, q_0 — фіксоване число з інтервалу $(0;1)$, $q_1 \equiv 1-q_0$, $g_1 \equiv g_0 - 1$.

Лема 1. *Якщо φ_1 і φ_2 — неперервні перетворення одиничного відрізка, то формули*

$$\begin{cases} x' = \varphi_1(x), \\ y' = \varphi_2(y) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x' = \varphi_1(y), \\ y' = \varphi_2(x) \end{cases}$$

задають перетворення одиничного квадрата.

Більшість (у певному сенсі) неперервних перетворень одиничного відрізка мають складну локальну структуру, багаті множини різних особливостей, зокрема, диференціального характеру. Наприклад, перетворення задане формулою $I(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_k]\ldots}$, яке називається *інверсором* Q_2-зображення. Воно є неперервною строго спадною сингулярною функцією (має похідну рівну 0 майже скрізь у розумінні міри Лебега).

До іншого класу неперервних перетворень квадрата приводять перетворення, що зберігають хвости зображень дійсних чисел у різних системах кодування.

Приклад 2. Аналог «симетрія» відносно відрізка: $\begin{cases} x' = I(x), \\ y' = y. \end{cases}$

Інваріантні точки цього перетворення утворюють відрізок, який задається рівнянням $x = \Delta^{Q_2}_{0(1)} = \Delta^{Q_2}_{1(0)}$

Приклад 3. Аналог «симетрії» відносно точки $\gamma_1 : \begin{cases} x' = I(x), \\ y' = I(y); \end{cases}$ $\quad \gamma_2 : \begin{cases} x' = I(y), \\ y' = I(x). \end{cases}$

Інваріантною точкою цього перетворення є точка з координатами $(\Delta^{Q_2}_{1(0)}; \Delta^{Q_2}_{1(0)})$.

Більш цікавими є неперервні перетворення задані формулами $\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y), \end{cases}$ де $f_i(x, y)$ неперервна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах вище зазначених двосимвольних зображень чисел. У доповіді наводяться приклади таких функцій і висвітлюються деякі їх властивості.

Суттєво складнішими є аналогічні об'єкти означенні в термінах G_2-зображення чисел, яке використовує дві різнознакові основи g_0 і $g_1 \equiv g_0 - 1$. Інверсор для такого зображення є функцією ніде не монотонною і розривною в G_2-бінарних точках. Для моделювання перетворень, пов'язаних з цим зображенням використовуються оператори лівостороннього та правостороннього зсувів і специфічні функції.

Література

[1] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod.Th. & Dynam. Sys. – 2004, 24. – P. 1–16.

[2] Isaieva T. M., Pratsiovytyi M. V. Transformations of $(0, 1]$ preserving tails Δ^{μ}-representation of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 22 (2016). Number 1, pp. 102–115.

[3] Pratsiovytyi M. V., Lysenko I. M., Maslova Yu. P. Group of continuous preserving tails of G_2-representation of numbers Algebra and Discrete Math., 29 (2020). no 1, pp. 99–108.

[4] Pratsiovytyi M., Chuikov A. Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2-continued fraction representation of numbers // Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199–206.

[5] Лисенко І.М., Маслова Ю.П., Працьовитий М.В. Двоосновна система числення з різнознаковими основами і спеціальні функції, з нею пов'язані // Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2, — С. 50–62.

[6] Осауленка Р.Ю. Група перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр Q_s-зображення чисел// Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — Том 3. — С. 191–204.

[7] Працьовитий М.В., Климчук С.О. Середнє значення символів Q_s-зображення дробової частини дійсного числа і пов'язані з ним задачі // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2011.— №12. – С. 186-195.

[8] Працьовитий М.В., Климчук С.О., Макарчук О.П. Частота цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифри // Укр.мат.журн. 2014., Том 66, №3. — С. 302–310.

Про геометричну характеристику спеціальних майже геодезичних відображень просторів афінного зв'язку зі скрутом

Лада Павлівна Ладиненко
(ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», Одеса, Україна)
E-mail: kolyalada74@gmail.com

У роботі розглядаються простори афінного зв'язку A^n $(n \in N,\ n > 2)$ класу C^r $(r > 1)$ зі скрутом. Як відомо [1], криву γ називають майже геодезичною лінією простору A^n, якщо у A^n існує такий компланарний вздовж γ двовимірний розподіл, якому у кожній його точці належить вектор, дотичний до даної кривої. З точки зору теорії кривини кривих у просторах афінного зв'язку майже геодезичні лінії є кривими, перша кривина яких є довільною. а всі наступні кривини тотожньо дорівнюють нулю.

Для просторів афінного зв'язку A^n та $\overline{A}^n$ розглядають відображення $f : A^n \to \overline{A}^n$, згідно яких образом кожної геодезичної лінії простору A^n є майже геодезична лінія простору $\overline{A}^n$. Такі відображення для просторів A^n і $\overline{A}^n$ називають майже геодезичними [1].

Виокремлюють три типи майже геодезичних відображень просторів афінного зв'язку зі скрутом [2]. Мабуть, найбільш цікавими серед них представляються відображення Π_2 другого типу, які характеризуються тим, що, згідно них, кожна геодезична лінія простору A^n переходить у таку майже геодезичну лінію простору $\overline{A}^n$, для якої відповідне поле компланарного двовимірного розподілу визначається дотичним вектором λ^n і вектором $F^h_\alpha \lambda^\alpha$, де F^h_α — компоненти певного афінора F, у так звану F-криву [2, 3]. Π_2-відображення f називають таким, що задовольняє умову взаємності, якщо відображення, обернене до нього, також є відображенням типу Π_2, що відповідає тому ж самому афінору. Із сукупності тих відображень типу Π_2, що задовольняють умову взаємності, виділяють відображення типу $\Pi_2^n(e)$, $\ n \in N$, $\ n > 1$, що характеризуються співвідношеннями

$$F^{n\ h}_i = e\delta^h_i, \text{ де } F^{n\ h}_i = F^h_{\alpha_1} \cdot F^{\alpha_1}_{\alpha_2} \cdot ... \cdot F^{\alpha_n - 1}_i, \quad e = \pm 1.$$

На відміну від попередніх досліджень [2, 3], у даній роботі вдалося для довільного числа $n \in N$, $n > 1$ у явному вигляді отримати такі диференціально-алгебраїчного характеру обмеження на афінор F, що дозволяють охарактеризувати відображення типу $\Pi_2^n(e)$, $\ n \in N$, $\ n > 1$ геометрично, як відображення, за допомогою яких F-криві простору A^n переходять у F-криві простору $\overline{A}^n$.

Література

[1] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств.– М.: Наука, 256 с.,1979.

[2] Н. С. Синюков. Почти геодезические отображения афффинно-связных и римановых пространств. – *Проблемы геометрии. (Итоги науки и техники)*.– М.:ВИНИТИ АН СССР – Т. 13. – С. 3–26. 1982.

[3] Н. В.Яблонская. Инвариантные геометрические объекты почти геодезических отображений $\pi_2(e)$ общих пространств аффинной связности. – Одесса: Одесск. ун-т. – 24 с. 1980.(Рукопись деп. в ВИНИТИ 12 февр. 1980 г. № 543-80 Деп.)

Про квазі-геодезичні відображення узагальнено-рекурентних просторів

М. І. Пiструiл
(ОНУ, Одеса, Україна)
E-mail: margaret.pistruil@gmail.com

I. М. Курбатова
(ОНУ, Одеса, Україна)
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Розглянемо (псевдо-)рімановий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h), в якому існує афінор F_i^h, що задовольняє умовам

$$F^h_{(i,j)} + F^h_\alpha F^\alpha_{(i}\phi_{j)} = p_{(i}\delta^h_{j)} + q_{(i}F^h_{j)},$$

і

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta^h_i,$$

де $e = -1, +1$ або 0; p_i, q_i - деякі ковектори, а ”,” - знак коваріантної похідної відносно зв'язності Γ в V_n.

Будемо називати таку афінорну структуру *узагальнено-рекурентною* (еліптичного, гіперболічного або параболічного типу залежно від значення $e = -1, +1$ або 0.), а сам простір V_n - *узагальнено-рекурентним* відповідного типу. Афінорні структури з такими умовами виникли в [2] при дослідженні певного типу відображень афіннозв'язних просторів.

Розглянуто властивості узагальнено-рекурентної структури параболічного типу. Зокрема, доведено, що коли афінорна структура F_i^h узагальнено-рекурентного простору параболічного типу (V_n, g_{ij}, F_j^h) узгоджена з метричним тензором g_{ij} наступним чином:

$$g_{i\alpha}F^\alpha_j = -g_{j\alpha}F^\alpha_i,$$

то її диференціальні рівняння набувають вигляду

$$F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}q_{j)}.$$

Ми називаємо вектор q_i в цих рівняннях *вектором узагальненої рекурентності* структури F_i^h. Далі, доведено, що тензор Рімана узагальнено-рекурентного простору параболічного типу (V_n, g_{ij}, F_i^h) задовольняє співвідношенням

$$3(R_{\bar{h}jki} + R_{h\bar{j}ki} + R_{hj\bar{k}i} + R_{hjk\bar{i}}) = 2Q_{jhki} + Q_{jkhi} - Q_{hkji},$$

де

$$Q_{hjki} = q_{[h,j]}F_{ki} + q_{[k,i]}F_{hj}.$$

Нехай узагальнено-рекурентний простір параболічного типу (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускає нетривіальне квазі-геодезичне відображення [1] на простір $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$. Тоді в сумісній за відображенням системі координат (x^i) виконуються основні рівняння

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}(x)\delta^h_{j)} + \phi_{(i}(x)F^h_{j)}(x),$$

$$F_{ij} = -F_{ji}, \quad F_{ij} = g_{i\alpha}F^\alpha_j, \quad \overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}, \quad \overline{F}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}F^\alpha_j,$$

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = 0$$

$$F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}q_{j)}.$$

Розглянуто випадок, коли узагальнено-рекурентний простір параболічного типу з інтегровною афінорною структурою (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускає квазі-геодезичне відображення зі збереженням вектора узагальненої рекурентності на плоский простір $\overline{V}_n = E_n$, тобто $\overline{R}^h_{ijk} = 0$. Доведено, що тоді V_n буде Річчі-плоским:

$$R_{ij} = 0,$$

вектор q_i - градієнтним

$$q_i = \frac{\partial q(x)}{\partial x^i},$$

а тензор Рімана простору V_n необхідно має вигляд

$$R_{hijk} = Ce^{-2q(x)}\left(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}\right)$$

при деякій сталій C.

Для рекурентно-параболічного простору, тензор Рімана якого має означену структуру, отримано компоненти метричного тензора в околі деякої точки $M_\circ$ простору V_n в спеціальній системі координат.

Література

[1] А. З. Петров. Моделирование физических полей. *Гравитация и теория относительности*, No. 4-5 : 7–21, 1968.

[2] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановыйх пространств. Москва:Наука, 1979.

Мінімальні поверхні та їх деформації

Т. Ю. Подоусова
(ОДАБА, Одеса, Україна)
E-mail: tatyana_top@ukr.net

Н. В. Вашпанова
(ОНАХТ, Одеса, Україна)
E-mail: vasha_nina@ukr.net

Вивчення нескінченно малих (н.м.) деформацій поверхонь заключається у виявленні нетривіальних н.м. деформацій (вектор зміщення $\mathbf{y} \neq const$ на всій S). Якщо ж поверхня допускає тільки тривіальні н.м. деформації ($\mathbf{y} = const$), то вона зветься жорсткою по відношенню до цих деформацій.

У E_3-просторі будемо розглядати н.м. деформацію першого порядку однозв'язної поверхні класу C^3, на яку накладені певні обмеження:

1) лінії геодезичного скруту (LGT-лінії) стаціонарні (в головному) [1];

2) повна кривина S ($K \neq 0$) змінюється за умови

$$\delta K = 2K\mu \tag{1}$$

де δK-варіація повної кривини S,$\mu(x^1, x^2)$ - деяка невідома функція класу C^3.
Для мінімальних поверхонь ($H = 0$, H-середня кривина S) математичною моделлю поставленої задачі буде наступна система диференціальних рівнянь з частинними похідними відносно функцій $u^\alpha(x^1, x^2)$ і $\mu(x^1, x^2)$:

$$g^{ij} \left(u^\alpha\right)_{,ji} - \frac{K_s}{K} g^{\beta s} u^\alpha_{,\beta} - K u^\alpha = \mu_i \rho^{i\alpha}. \tag{2}$$

Тут комою позначено коваріантне диференціювання на базі метричного тензора $g_{ij}, \mu_\alpha = \frac{\partial \mu}{\partial x^\alpha}$, $\rho^{i\alpha} = c^{ij} b^\alpha_j - H c^{i\alpha}, c^{ij} = g^{i\alpha} g^{j\beta} c_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$ - дискримінантний тензор S.
Індекси набувають значень 1,2.
Через кожний розв'язок системи рівнянь (2) частинні похідні вектора зміщення даної деформації матимуть наступне представлення

$$\mathbf{y}_i = \mu \mathbf{r}_i + c_{i\alpha} u^\alpha \mathbf{n}, \tag{3}$$

де $\mathbf{r}_\alpha$,$\mathbf{n}$ (орт нормалі S) - базисні вектори.

Очевидно, що тільки у випадку $\mu = 0, u^\alpha = 0$ дана деформація буде тривіальною, а поверхня S-жорсткою. Зокрема, якщо $\mu = 0, u^\alpha \neq 0$, то матимемо А-деформації зі стаціонарними LGT-лініями мінімальних поверхонь, які вивчалися в роботі [2].

Отже, справедлива

Теорема 1. *Кожна мінімальна поверхня допускає нетривіальну н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарними LGT-лініями та повною кривиною, що змінюється за умовою (1), частинні похідні вектора зміщення якої при цьому мають вигляд (3), де функції u^α і μ є розв'язком системи рівнянь (2).*

Припустимо, що $\mu(x^1, x^2)$ заздалегідь задана функція точки поверхні класу C^3. Тоді кожне рівняння із (2) в замкненій області $\overline{G}$ задовольняє рівномірній еліптичності $\left(\frac{1}{g} \geq \Delta_0 > 0,\ \Delta_0 = const\right)$. Це означає, що (2) можна привести до наступного канонічного вигляду відносно u^α:

$$u^\alpha_{11} + u^\alpha_{22} + e^1 u^\alpha_1 + e^2 u^\alpha_2 - K u^\alpha = F^\alpha(\mu), \tag{4}$$

де $u_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$, e^1, e^2- відомі функції точок S.

Має місце

Теорема 2. *Будь-яка мінімальна поверхня допускає нетривіальну н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарними лініями геодезичного скруту та повною кривиною, що задовольняє умові (1), вектор зміщення якої виражаєтьcя через заздалегідь задану функцію* $\mu \in C^3(G)$*, довільну функцію* $\omega(x^1, x^2) \in C^3(\overline{G})$ *та функції* $u^\alpha(x^1, x^2) \in C^3(G)$*, які є розв'язком системи рівнянь (4).*

Припустимо тепер, що в системі рівнянь (2) заздалегідь задані функції u^α. Тоді отримаємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними гіперболічного типу відносно μ, яке набуває канонічного вигляду:

$$\mu_{11} - \mu_{22} + d\mu_1 + e\mu_2 = \Phi(u^1, u^2), \tag{5}$$

де d, e - відомі функції точок поверхні S.
Доведена наступна

Теорема 3. *Будь-яка мінімальна поверхня допускає нетривіальну н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарними лініями геодезичного скруту і повна кривина якої змінюєтьcя за умови (1). Вектор зміщення при цьому матиме представлення через заздалегідь задані функції* $u^\alpha \in C^3$*, дві довільні функції класу* C^2*, кожна від однієї змінної та функцію* $\mu \in C^3$*, яка є розв'язком рівняння (5).*

Нехай на площині x^1Ox^2 задана дуга кривої l, яка перетинається не більше ніж в одній точці з прямими, паралельними вісям координат і рівняння якої може бути записано у вигляді $x^2 = g(x^1)$.

Задамо вздовж кривої l значення μ та $\frac{\partial\mu}{\partial x^2}$:

$$\mu|_{x^2=g(x^1)=\omega_0(x^1)}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial x^2}|_{x^2=g(x^1)=\omega_1(x^1)} \tag{6}$$

та розглянемо задачу Коші (5), (6), розв'язок якої завжди існує і єдиний [3].
Отже, справедлива

Теорема 4. *Будь-яка мінімальна поверхня при граничній умові (6) допускає нетривіальну н.м. деформацію першого порядку зі стаціонарними* LGT*-лініями та повною кривиною, що змінюєтьcя за умови (1), вектор зміщення якої виражаєтьcя через дві довільні функції, кожна від однієї змінної та заздалегідь заданих* $u^\alpha \in C^3$*.*

Слід відзначити, що н.м. деформації першого порядку зі стаціонарними LGT-лініями і повною кривиною мінімальних поверхонь були розглянуті в роботі [4].

Література

[1] Т. Ю. Вашпанова, Л. Л. Безкоровайна. LGT-сітка поверхні та її властивості. *Вісник КНУ імені Т.Г. Шевченка, серія фіз.-мат. науки*, вип.2, с. 7–12, 2010.

[2] Т. Ю. Подоусова. А-деформации минимальной поверхности со стационарной LGT-сетью. *Материалы конф. "Математика, информатика, их приложения и роль в образовании"*, Тверь, с. 60, 2013.

[3] Н. С. Кошляков и др. Уравнения в частных производных математической физики. *Учебное пособие для мех.-мат.ун-тов*, М., "Высшая школа 712 с., 1970.

[4] Т. Ю. Подоусова, Н. В. Вашпанова. Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь. *Тези доповідей між.конф. "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу"*, Одеса, с. 81, 2018.

Про нескінченновимірні многовиди, модельовані на деяких k_ω-просторах

Орислава Поливода
(Українська академія друкарства, факультет Комп'ютерної поліграфічної інженерії, 79000, вул. Під Голоском 19, Львів)
E-mail: `shabor@ukr.net`

В останні десятиліття інтенсивно розвивається топологія многовидів, модельованих на деяких k_ω-просторах, тобто просторах, які є прямими (ін'єктивними) границями компактних просторів. Прикладами таких многовидів є $\mathbb{R}^\infty$-многовиди та Q^∞-многовиди ($\mathbb{R}^\infty = \varinjlim \mathbb{R}^n$, $Q^\infty = \varinjlim Q^n$, де Q означає гільбертів куб). Одержані в цьому напрямку результати використовуються для опису топології деяких просторів, що виникають у топологічній алгебрі та функціональному аналізі. Характеризаційні теореми для $\mathbb{R}^\infty$- та Q^∞-многовидів довів К. Сакаї [1]. Згодом Т. Банах та К. Сакаї [2] довели характеризаційну теорему для бітопологічних многовидів, модельованих на парах $(\mathbb{R}^\infty, \sigma)$ та (Q^∞, Σ), де σ — множина фінітних послідовностей, а Σ — лінійна оболонка стандартного гільбертового куба у сепарабельному гільбертовому просторі.

У зв'язку з результатами Т. Радула [3], що стосуються поглинаючих просторів для C-компактів, ми розглядаємо многовиди, модельовані на деяких k_ω-просторах, що є k_ω-аналогами для просторів, які означив Радул.

Більш детально, нехай $\dim_C$ означає трансфінітне розширення виміру Лебега $\dim$, яке запровадив П. Борст і яке характеризує властивість C у сенсі [4]. (Нагадаємо, що простір X має властивість C, якщо для для кожної послідовності $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ його відкритих покрить існує відкрите покриття вигляду $\mathcal{V} = \cup_{n=1}^\infty \mathcal{V}_n$, де кожна сім'я $\mathcal{V}_n$ складається з попарно диз'юнктних множин, що містяться в елементах сім'ї $\mathcal{U}_n$; див. [5].) Т. Радул довів, що для незліченної множини зліченних ординалів β існує передгільбертовий простір $\mathcal{D}_\beta$, який є поглинаючим простором для класу компактів X з $\dim_C X < \beta$. Ми показуємо, що існує аналог цього простору (позначається $\mathcal{D}'_\beta$) для класу k_ω-просторів.

Для $\mathcal{D}'_\beta$-многовидів доведено характеризаційні теореми, а також теореми про відкрите і замкнене вкладення у модельний простір $\mathcal{D}'_\beta$.

Розглядаються також задачі характеризації бітопологічних $\left(\mathcal{D}'_\beta, \mathcal{D}_\beta\right)$-многовидів та задачі збереження $\mathcal{D}'_\beta$-многовидів деякими функторами скінченного степеня.

Література

[1] K. Sakai, On R^∞-manifolds and Q^∞-manifolds, Topology Appl. 18 (1984) 69-–79.
[2] Taras Banakh, Katsuro Sakai, Characterizations of (R^∞, σ) -or (Q^∞, Σ)-manifolds and their applications, Topology and its Applications, 106 (2000), 115–134.
[3] T. Radul, Absorbing spaces for C-compacta, Topol. Appl. 83(1998), 127–133.
[4] P. Borst, Some remarks concerning C-spaces. Topology Appl. 154 (2007), no. 3, 665—674.
[5] D. F. Addis and J. H. Gresham, A class of infinite-dimensional spaces. Part 1: Dimension theory and Alexandroff's problem, Fund. Math.,101, 195–205 (1978).

Канторвал як множина неелементарних ланцюгових дробів

М. В. Працьовитий
(НПУ імені М.П. Драгоманова, ІМ НАН України)
E-mail: prats4444@gmail.com

Я. В. Гончаренко
(НПУ імені М.П. Драгоманова)
E-mail: yan_a@ukr.net

В. О. Дрозденко
(Білоцерківський національний аграрний університет)
E-mail: drozdenko0408@gmail.com

У геометрії числових рядів, яка бере свій початок з роботи Какея [4], однією з основних є задача про тополого-метричні властивості множини неповних сум (підсум) абсолютно збіжного ряду $a_1 + a_2 + ...$, а саме множини

$$E(\{a_n\}) = \{x : x = \sum_{n \in M \subset N} a_n, M \in 2^N\},$$

яка, як відомо, є обмеженою, континуальною, досконалою (замкнена і не має ізольованих точок).

Відносно недавно встановлено, що існує лише три топологічні типи множин неповних сум: 1) відрізок або скінченне об'єднання відрізків; 2) ніде не щільна множина; 3) канторвал.

Останній тип є своєрідною «сумішшю» двох попередніх типів. Перші прикладів рядів з такими множинами неповних сум побудовано не так давно (про це дивись в [1]). Одним з найпростіших з них є ряд

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + ... + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{4^n} + ...$$

Сьогодні в основному користуються наступним означенням канторвала. Канторвалом називається множина гомеоморфна множині $T \equiv C \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0;1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_{2n}$,

де $C = \{x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{3^k} = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \alpha_k \in \{0,1\}\}$ — множина Кантора,
$G_k = \bigcup\limits_{\alpha_1 \in \{0,2\}} ... \bigcup\limits_{\alpha_{k-1} \in \{0,2\}} (\Delta^3_{\alpha_1...\alpha_{k-1}1(0)}; \Delta^3_{\alpha_1...\alpha_{k-1}1(2)})$.

Ми пропонуємо альтернативне (еквівалентне) означення канторвала, наведене нижче.

Означення 1. *Валом* на числовій прямій називатимемо множину W, яка є таким об'єднанням нескінченного числа інтервалів, що
1) інтервали попарно не перетинаються;
2) між кожними двома інтервалами об'єднання лежить принаймні один інтервал цього об'єднання.

Прикладом валу на числовій прямій є об'єднання циліндричних інтервалів трійкового зображення чисел відрізка $[0;1]$ виду $\nabla^3_1, \nabla^3_{c_1c_2...c_{2k-1}c_{2k}1}$, де $c_i \in \{0,2\}$, $k \in N$.

Множиною канторівського типу називається обмежена ніде не щільна, досконала множина.

Означення 2. *Канторвалом* називається обмежена досконала множина K числової прямої, яка є об'єднанням множини канторівського типу C і валу W, кожен інтервал якого є суміжним з множиною C і при цьому доповнення $\overline{K}$ до K є валом. *Структурою канторвалу* K називається представлення (розклад): $K = C \cup W$.

Канторвали є популярним об'єктом сучасних математичних досліджень, але до цих пір критерія канторвальності множини підсум ряду не знайдено.

Канторвали виникають і у теорії ланцюгових дробів, де спостерігаються аналогічна картина з геометрії числових рядів.

Нагадаємо, що нескінченним ланцюговим дробом називається вираз виду

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + ...}} \equiv [a_0; a_1, a_2, ...]. \tag{1}$$

Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $\mathcal{A} = \{c_0, c_1, \ldots, c_{s-1}\}$ — множина дійсних чисел таких, що $0 < c_0 < c_1 < \ldots < c_{s-1}$, яка називається алфавітом; $L_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{A} \times \ldots$ —простір послідовностей елементів алфавіту $\mathcal{A}$. Нас цікавлять тополого-метричні властивості множини $G_{\mathcal{A}}$ значень нескінченних ланцюгових дробів виду $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, де $(a_n) \in L_{\mathcal{A}}$.

Випадок $s = 2$ заслуговує на окрему увагу, яка приділена йому у роботах [2, 3, 5, 6].

Теорема 3 ([2])**.** *Якщо $s = 2$, то $G_{\mathcal{A}}$ є відрізком $[a; b]$, де $a = [0; (c_1, c_0)]$, $b = [0; (c_0, c_1)]$, коли $c_0 c_1 \leq \frac{1}{2}$; ніде не щільною множиною, коли $c_0 c_1 > \frac{1}{2}$. При умові $c_0 c_1 > \frac{1}{2}$ кожне число $x \in G_{\mathcal{A}}$ має єдине зображення нескінченним ланцюговим дробом, при $c_0 c_1 = \frac{1}{2}$ числа зліченної щільної у відрізку $[\beta_0; \beta_1]$, де $\beta_0 = [0; (c_1, c_0)], \beta_1 = [0; (c_0, c_1)]$, множини мають два зображення, а решта — мають єдине зображення.*

Теорема 4. *Множина $G_{\mathcal{A}}$ значень нескінченних ланцюгових дробів виду $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, де $(a_n) \in L_{\mathcal{A}}$, є континуальною, досконалою і обмеженою, причому*

$$\min G_{\mathcal{A}} = [0; (c_{s-1}, c_0)] = \frac{\sqrt{c_0 c_{s-1}(c_0 c_{s-1} + 4)} - c_0 c_{s-1}}{2 c_{s-1}} \equiv d_0, \tag{2}$$

$$\max G_{\mathcal{A}} = [0; (c_0, c_{s-1})] = \frac{\sqrt{c_0 c_{s-1}(c_0 c_{s-1} + 4)} - c_0 c_{s-1}}{2 c_0} \equiv d_1. \tag{3}$$

Наслідок 5. *Якщо $\mathcal{A} = \{\frac{1}{2}, 1, 8\}$, то $\min G_{\mathcal{A}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}$, $\max G_{\mathcal{A}} = 4\sqrt{2} - 4 = 4(\sqrt{2} - 1)$.*

Теорема 6. *Множина всіх ланцюгових дробів з обмеженим алфавітом $\mathcal{A}$ містить відрізок тоді і тільки тоді, коли існують такі елементи алфавіту c_n і c_{n+1}, що $c_n \cdot c_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.*

Теорема 7 (Основний результат)**.** *Множина $G_{\mathcal{A}}$ значень ланцюгових дробів з обмеженим алфавітом $\mathcal{A}$ є обмеженою, континуальною, досконалаю і належить одному з тих трьох топологічних типів, що й множина неповних сум абсолютно збіжного ряду (є відрізком або скінченним об'єднанням відрізків, множиною канторівського типу, канторвалом).*

Література

[1] *Виннишин Я.Ф., Маркітан В.П., Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами. // Proceedings of the International Geometry Center. — 2019. — Vol.12, no. 2. P. 26–42.

[2] *Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В.* Ланцюгове A_2–зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. — 2009, том 61, № 4. — С.452–463.

[3] *Pratsiovytyi M., Chuikov A.* Continuous distributions whose functions preserve tails of an A_2-continued fraction representation of numbers // Random Operators and Stochastic Equations, 2019. Vol. 27(3), pp. 199-206.

[4] *Kakey S.* On the set of partial sums of aninfinite series. Tohoku Sci Rep., (4): 159–163, 1914.

[5] *Працьовитий М.В., Кюрчев Д.В.* Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2-дробом з незалежними елементами // Теор. ймов. та мат. стат. — 2009. — 81. — С. 139-154.

[6] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Random Oper. Stochastic Equations, 2009, Vol. 17., no. 1. — P.91-101.

Конус, надбудова та джойн в асимптотичних категоріях. Ліпшицева та груба еквівалентності деяких функторіальних конструкцій

Михайло Романський
(ДДПУ імені Івана Франка)
E-mail: Romanskiy.miha@ukr.net

Основи асимптотичної топології викладено в статті [2] Дранішнікова. Дранішников також розглядає різноманітні конструкції у асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ (тобто категорії власних метричних просторів і асимптотично ліпшицевих відображень), зокрема пропонує новий підхід до поняття добутку. Він також означує конус, надбудову і джойн.

Декартів добуток $(X \times Y, d_X + d_Y)$ не є категорним в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, оскільки проекції на множники не є морфізмами. В роботі [2] А. Дранішніков означив асимптотичний добуток

$$X \widetilde{\times} Y(x_0, y_0) = \{(x, y) | d_X(x_0, x) = d_Y(y_0, y), x \in X, y \in Y\},$$

де x_0, y_0 — фіксовані точки в метричних просторах X та Y відповідно. Метрика на $X \widetilde{\times} Y$ індукована вкладенням $X \widetilde{\times} Y \subset X \times Y$.

У статті [2] означено конус CX і надбудову $\sum X$ в асимптотичних категоріях для кожного метричного простору за аналогією: $CX = X \widetilde{\times} \mathbb{R}^2_+ / i_+(X)$ і $\sum X = X \widetilde{\times} \mathbb{R}^2_+ / i_\pm(X) = CX/i_- X$ де $i_\pm \colon X \to X \widetilde{\times} \mathbb{R}^2_+$ вкладення, означені формулами $i_\pm(x) = (x, \pm\|x\|, 0)$. В цій же статті стверджується, що для геодезійних просторів X конус можна задавати простою формулою $CX = X \times \mathbb{R}_+$, але у статті [5] в лемі 1 доведено, що конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^2_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$. Аналогічно можна довести, що надбудова $\sum \mathbb{R}$ не ізоморфна простору $\mathbb{R}^2$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Лема 1. *Конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^2_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.*

Теорема 2. *Простори $C(\mathbb{R}_+)$ і $\sum(\mathbb{R}_+)$ не є грубо еквівалентні.*

Для будь-яких двох метричних просторів X і Y з фіксованими точками можна означити букет $X \vee Y$. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ це підпростір простору $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ ймовірнісних мір, носіями яких є двоточкові множини. Формула для метрики Канторовича-Рубінштейна на джойні $X * \mathbb{R}_+$ між двома довільними ймовірнісними мірами $\mu = \alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y$ і $\nu = \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}$ має наступний вигляд

$$d_{KP}(\mu, \nu) = | \alpha - \beta | (y + y') + \min\{\alpha, \beta\} d(x, x') + (1 - \max\{\alpha, \beta\}) | y - y' | .$$

Лема 3. *Джойн $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^{n+1}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.*

У статті [5] аналогічний результат доведено для γ-слабо опуклих та δ-слабо вгнутих геодезійних просторів.

З лем 1 і 3 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 4. *Джойн $\mathbb{R} * \mathbb{R}_+$ не ізоморфний конусу $C\mathbb{R}$ в асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.*

Лема 5. *Нехай $X = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ не ізоморфний конусу CX в асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.*

Для метричного простору (X, ρ) через $\exp X$ позначають гіперпростір простору X, тобто множину непорожніх компактних підмножин в X, наділену метрикою Гаусдорфа ρ_H:

$$\rho_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 | A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через $\exp_n X$ позначимо підпростір $\exp X$, що складається з усіх множин потужності $\leq n$.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на степені X^n, що задається умовою $(x_1, ..., x_n) \sim (y_1, ..., y_n)$ тоді й тільки тоді, коли існує перестановка σ множини $\{1, ..., n\}$ така, що $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i = 1, ..., n$. Факторпростір простору X^n за таким відношенням еквівалентності називають симетричним степенем простору X і позначають $SP^n(X)$.

Теорема 6. *Гіперпростір* $\exp_3 \mathbb{R}_+$ *, симетричний степінь* $SP^3\,\mathbb{R}_+$ *та простір* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Теорема 7. *Гіперпростір* $\exp_3 \mathbb{R}$ *, симетричний степінь* $SP^3\,\mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

З теорем 6 і 7 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 8. *Гіперпростори* $\exp_3 \mathbb{R}_+$*,* $\exp_3 \mathbb{R}$*, симетричні степені* $SP^3\,\mathbb{R}_+$*,* $SP^3\,\mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Конус $\mathrm{Cone}(X)$ над компактним метричним простором (X, d) — це факторпростір добутку $(X \times \mathbb{R}_+)/\sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ задається умовою $(x, 0) \sim (y, 0)$, $x, y \in X$. Якщо (X, d) — метричний простір і $\mathrm{diam}(X) \leq 2$, то метрика $\hat{d}$ на $\mathrm{Cone}(X)$ задається формулою:

$$\hat{d}((x,t),(y,s)) = \min\{t,s\}d(x,y) + |t-s|.$$

Лема 9. *Якщо компактні метричні простори* (X, d) *і* (Y, ρ) *ліпшицево еквівалентні, то метричні простори* $\mathrm{Cone}(X)$ *і* $\mathrm{Cone}(Y)$ *також ліпшицево еквівалентні.*

Лема 10. *Півсфера* S^n_+ *та куб* I^n *ліпшицево еквівалентні.*

З лем 9 та 10, врахувавши, що $\mathrm{Cone}(\mathrm{S}^n_+) \simeq \mathbb{R}^{n+1}_+$, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 11. *Конус* $\mathrm{Cone}(\mathrm{I}^n)$ *та* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Наступну теорему можна вважати грубим аналогом одного результату Шорі [4].

Теорема 12. *Гіперпростір* $\exp_2 \mathbb{R}^m$ *ліпшицево еквівалентний* $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}\,(\mathbb{R}P^{m-1})$*, де* $\mathbb{R}P^{m-1}$ *— проєктивний простір.*

Теорема 13. *Простори* $\mathbb{R}^3_+$ *та* $P_2(\mathbb{R})$ *не є грубо еквівалентні.*

Зауваження 14. Аналогічний результат можна довести для суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R})$. Нагадаємо, що $\lambda_3(\mathbb{R})$ можна визначити як факторпростір $SP^3(X)$ за наступним відношенням еквівалентності $[x, x, y] \sim [x, x, z]$. Зауважимо, що простір $\lambda_3(S^1)$ гомеоморфний S^3 (див. [1]).

Зауважимо також, що простори $\mathbb{R}^3_+$ та $P_2(\mathbb{R})$ не гомеоморфні.

Література

[1] Заричный М.М. Фундаментальная група суперрасширения $\lambda_n(X)$. В кн.: Отображения и функторы. Под ред. П.С. Александрова. — Москва: МГУ,1984 - С. 24-31.

[2] Dranishnikov A. Asymptotic topology. Russian Math. Surveys., Vol. 55, №6 (2000), P. 71-116.

[3] Romanskyi M. Coarse equivalences of functorial constructions.Proceedings of the International Geometry Center Vol. 12, no. 3 (2019) pp. 69–77

[4] Scori R.M. Hyperspaces and symmetric products of topological spaces. Fund. Math. 63 (1968).

[5] Zarichnyi M., Romanskyi M. Cone and join in the asymptotic categories. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 34-41.

Асимптотика найкращих рівномірних наближень класів згорток періодичних функцій високої гладкості

А. С. Сердюк, І. В. Соколенко
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)
E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і L_p, $1 \leq p \leq \infty$, — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ та $\|\cdot\|_p$, відповідно.

Позначимо через $C^{\psi}_{\bar{\beta},p}$, $1 \leq p \leq \infty$, множину всіх 2π-періодичних функцій f, які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar{\beta}}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B_p^0 = \{\varphi \in L_p: \ \|\varphi\|_p \leq 1, \ \varphi \perp 1\},$$

із фіксованим твірним ядром $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_{p'}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$S[\Psi_{\bar{\beta}}](t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) > 0. \tag{1}$$

Оскільки $\varphi \in L_p$, а $\Psi_{\bar{\beta}} \in L_{p'}$, то функція f є неперервною функцією, тобто $C^{\psi}_{\bar{\beta},p} \subset C$.

Якщо $f \in C$, через $E_n(f)_C$ позначимо найкраще рівномірне набдиження функції f підпростором $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів T_{n-1} порядку не вищого ніж $n-1$

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}.$$

Якщо $\mathfrak{N}$ — деякий функціональний клас з простору C ($\mathfrak{N} \subset C$), то величину

$$E_n(\mathfrak{N})_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} E_n(f)_C \tag{2}$$

називають найкращим рівномірним наближенням класу $\mathfrak{N}$ підпростором $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів T_{n-1} порядку не вищого ніж $n-1$.

Розглядається задача про знаходження асимптотичних рівностей величин (2) при $n \to \infty$ у випадку, коли у ролі $\mathfrak{N}$ виступають класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},p}$, $1 \leq p \leq \infty$, а послідовності $\psi(k)$ спадають до нуля дуже швидко, зокрема коли

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) = o(1)\psi(n). \tag{3}$$

Зазначимо, що у випадку $p = \infty$ асимптотичні рівності і, навіть, точні значення величин $E_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},p})_C$ при окреслених обмеженнях на $\psi(k)$ відомі (див., наприклад, [2, 3]).

Позначимо через $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_C$ величини

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_C, \tag{4}$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинна сума Фур'є порядку $n-1$ функції f.

Оскільки

$$E_n(\mathfrak{N})_C \leq \mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_C, \quad \mathfrak{N} \subset C, \tag{5}$$

то величини (4) природньо використовувати для оцінок зверху найкращих наближень класів $\mathfrak{N}$.

Задача про знаходження сильної асимптотики величин (4) при $n \to \infty$ носить назву задачі Колмогорова–Нікольського для сум Фур'є. Вона має велику історію, познайомитись з якою можна, наприклад, по монографії [1]. Для швидко спадних $\psi(k)$ асимптотика величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C$ відома при усіх $1 \le p \le \infty$ і $\beta_k \in \mathbb{R}$ (див. [4]).

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Надалі будемо вимагати, щоб послідовність модулів коефіцієнтів Фур'є твірного ядра $\Psi_{\bar\beta}(t)$ задовольняла умову

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) < \psi(n). \tag{6}$$

Теорема 1. *Для довільних $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$ і $\psi(k)$, що задовольняють умову (2), виконуються наступні співвідношення*

$$\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}\Big(\psi(n) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k)\Big) \le E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C \le \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C \le \frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}\Big(\psi(n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k)\Big). \tag{7}$$

Якщо ж $\psi(k)$ задовольняє умову (3), то мають місце асимптотичні рівності

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C \quad (8) \\ E_n(C^{\psi}_{\bar\beta,p})_C \quad (9) \end{array}\right\} = \frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}\psi(n) + \mathcal{O}(1)\sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k),$$

в яких $\mathcal{O}(1)$ є рівномірно обмеженими відносно усіх розглядуваних параметрів.

Зазначимо, що асимптотичні рівності (8) і (9) при деяких співвідношеннях між параметрами випливають з робіт [1]-[6].

Література

[1] Степанец А.И. *Классификация и приближение периодических функций.* — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

[2] Степанец А.И., Сердюк А.С. Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // *Укр. мат. журн.* – 2000. – Т.52, №3. – С.375–395.

[3] Сердюк А.С. Найкращі наближення і поперечники класів згорток періодичних функцій високої гладкості // *Укр. мат. журн.* - 2005. - 57, № 7. - С. 946–971.

[4] Сердюк А. С. Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці // *Укр. мат. журн.* - 2005. - 57, № 8. - С. 1079 – 1096.

[5] Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // *Приближение функций полиномами и сплайнами, Сборник статей, Тр. МИАН СССР.* - 1980. - 145. - С. 126–151.

[6] Serdyuk, A. S., Sokolenko, I. V. Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness // *Methods of Functional Analysis and Topology.* Vol. 25 (2019), №4, pp. – 381-387.

Певні характеристики спеціальної геометрії дотичного розшарування простору афінної зв'язності, породженої інваріантною теорією наближень базового простору

Синюкова Олена Миколаївна
(ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», Одеса, Україна)
E-mail: olachepok@ukr.net

Розглядання у довільній точці $M(x^i), i = \overline{1,n}$, простору афінної зв'язності A^n, $n \in N$, $n > 2$, ріманової системи координат дозволяє для компонент $\Gamma^h_{ij}(x^1, ..., x^n)$ афінної зв'язності цього простору отримати інваріантні відносно вибору системи координат ряди типу рядів Тейлора, члени яких залежать не лише від координат поточної точки, а й від компонент $y^i, i = \overline{1,n}$, дотичного елемента у ній. Як результат нехтування у цих рядах доданками третього і більш високих порядків малості відносно компонент y^i, утворюються компоненти афінної зв'язності

$$\widetilde{\Gamma}^h_{ij}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n) = \Gamma^h_{ij}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n) - \frac{1}{3} R^h_{(ij)\alpha}(x^1, ..., x^n) y^\alpha,$$

де $h, i, j, \alpha = \overline{1,n}$, $R^h_{(ij)\alpha}(x^1, ..., x^n)$ — компоненти тензора кривини простору A^n, круглі дужки позначають симетрування без ділення за вміщеними у них індексами. Виходячи зі структури компонент $\widetilde{\Gamma}^h_{ij}$, можна стверджувати, що вони характеризують певний геометричний об'єкт простору дотичного розшарування $T(A^n)$, визначають на A^n деяку «поширену» афінну зв'язність $\widetilde{\Gamma}$, у певному сенсі подібну до зв'язностей Картана і Бервальда фінслерової геометрії.

За допомогою «поширеної» афінної зв'язності $\widetilde{\Gamma}$ для тензорних полів простору $T(A^n)$, вводиться [1] коваріантне диференціювання «;» за правилом

$$T^h_i(x;y)_{;j} = \frac{\partial T^h_i}{\partial x^j} - y^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha j} \frac{\partial T^h_i}{\partial y^\beta} + \Gamma^h_{j\alpha} T^\alpha_i - \Gamma^\alpha_{ji} T^h_\alpha$$

На підставі компонент $\widetilde{\Gamma}^h_{ij} y$ у просторі дотичного розшарування $T(A^n)$, за допомогою операції типу повного ліфту [2] побудовано зв'язність $\widehat{\Gamma}$, компоненти $\widehat{\Gamma}^h_{ij}, h, i, j = \overline{1, 2n}$ якої знаходяться згідно формул

$$\widehat{\Gamma}^h_{ij}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n) = \widetilde{\Gamma}^h_{ij}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n); \quad h, i, j = \overline{1,n};$$

$$\widehat{\Gamma}^h_{ij}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n) = \frac{\partial \widetilde{\Gamma}^{h-n}_{ij}}{\partial x^\alpha}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n) y^\alpha; \quad h = \overline{n+1, 2n}; \quad j, k, \alpha = \overline{1,n};$$

$$\widehat{\Gamma}^h_{ij}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n) = -\widetilde{\Gamma}^{h-n}_{i\ j-n}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n); \quad h, j = \overline{n+1, 2n}; \quad i = \overline{1,n};$$

$$\widehat{\Gamma}^h_{ij}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n) = -\widetilde{\Gamma}^{h-n}_{i-n\ j}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n); \quad h, i = \overline{n+1, 2n}; \quad j = \overline{1,n};$$

$$\widehat{\Gamma}^h_{ij}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n) = -\widetilde{\Gamma}^h_{i-n\ j-n}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n); \quad i, j = \overline{n+1, 2n}; \quad h = \overline{1,n};$$

$$\widehat{\Gamma}^h_{ij}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n) = 0, i = \overline{n+1, 2n}; h, j = \overline{1,n};$$

$$\widehat{\Gamma}^h_{ij}(x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^n) = 0, j = \overline{n+1, 2n}; h, i = \overline{1,n};$$

$$\widehat{\Gamma}_{ij}^{h}(x^1,...,x^n;y^1,...,y^n) = -\widetilde{\Gamma}_{n-in-j}^{n-h}(x^1,...,x^n;y^1,...,y^n),\ h,i,j=\overline{n+1,2n}.$$

За допомогою зв'язності $\widehat{\Gamma}$ у просторі $T(A^n)$ природним чином введено коваріантне диференціювання « | ».

Досліджено взаємозвязки між стандартним коваріантним диференціюванням «,» у просторі A^n, коваріантними диференціюваннями «;» і « | » у $T(A^n)$. При цьому мається на увазі, що простір A^n природним чином вкладено у простір $T(A^n)$.

Література

[1] Н. С. Синюков, Е. Н. Синюкова, Ю. А. Мовчан. Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и её обощений *Изв.вузов. Математика*, 3(382) : 76–80, 1994.

[2] K. Yano, Sh. Ishihara. Tangent and cotangent bundles: differential geometry – *Pure and applied mathematics*, New York : Dekker, 1973.

Дослідження T_0-топологій на n-елементній множині з вагою $k \in (2^{n-2}, 2^{n-1}]$

Стєганцева Поліна Георгіївна
(Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна)
E-mail: stegpol@gmail.com

Скрябіна Анна Вікторівна
(Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна)
E-mail: anna_29_95@ukr.net

Для дослідження T_0-топологій використовується їх описання вектором топології – неспадною послідовністю $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ невід'ємних цілих чисел, яке було запропоноване в роботі [4]. Вагою топології прийнято називати кількість відкритих множин в ній. Всі топології однакової ваги k утворюють *k-клас* топологій. Вектори всіх топологій з вагою $k \in (2^{n-1}, 2^n]$ знайдено в роботі [4]. В роботах [1]-[3] описані T_0-топології з вагою $k \geq 5 \cdot 2^{n-4}$.

В цій роботі показано, що всі *k-класи* топологій на n-елементній множині з вагою $k \in [5 \cdot 2^{n-4}, 2^{n-1}]$, містять принаймні одну T_0-топологію з наступною властивістю: існує $(n-1)$-елементна підмножина, на якій ця топологія індукує близьку до дискретної топологію (в цьому випадку говорять, що топологія узгоджена з близькою до дискретної). Ця властивість дозволяє вказати вектори таких топологій. Знайдено класи, в яких всі топології мають вказану властивість. Крім цього, ми досліджували помічені T_0-топології з вагою $k \in (2^{n-2}, 13 \cdot 2^{n-5})$. Термін двоїста використовується для топології, отриманої з заданої шляхом переходу до доповнень її елементів.

Теорема. У класах топологій з вагою $k \in [13 \cdot 2^{n-5}, 2^{n-1}]$, за виключенням T_0-топологій, узгоджених з близькими до дискретних та двоїстих до них, інших топологій немає. Існують класи топологій з вагою $k \in [5 \cdot 2^{n-4}, 13 \cdot 2^{n-5})$, які не вичерпуються T_0-топологіями, узгодженими з близькими до дискретних та двоїстими до них. Існують класи топологій з вагою $k \in (2^{n-2}, 5 \cdot 2^{n-4})$, в яких немає жодної топології, узгодженої з близькими до дискретної топологіями.

Література

[1] R.P. Stanley. On the number of open sets of finite topologies. *Journal of combinatorial theory*, 1971. Vol. 10. P. 74–79.
[2] Kolli M. Direct and elementary approach to enumerate topologies on a finite set. *Journal of Integer Sequences*, 2007. Vol. 10. Article 07.3.1.
[3] Kolli M. On the Cardinality of the T_0-Topologies on a Finite Set. *International Journal of Combinatorics*, 2014. Article ID 798074, 7 pages.
[4] Величко И. Г., Стеганцева П. Г., Башова Н. П. Перечисление топологий близких к дискретной на конечных множествах. *Известия вузов. Математика*, 2015. № 11. С. 23–31.

Про розщеплення парних функцій

Жук Оксана
(м. Дрогобич, в. Стрийська, 3, 82100)
E-mail: oksanalakomchak@gmail.com

Войтович Христина
(м. Дрогобич, в. Стрийська, 3, 82100)
E-mail: khrystyna.huk2711@gmail.com

Галь Юрій
(м. Дрогобич, в. Стрийська, 3, 82100)
E-mail: yuriyhal@gmail.com

Нехай W^p_σ, $\sigma > 0$, простір Пелі-Вінера цілих функцій f експоненціального типу $\leq \sigma$, що належать до $L^p(\mathbb{R})$. Він може бути визначений і як простір цілих функцій, для яких виконується умова

$$\sup_{\varphi\in(0;2\pi)} \left\{ \int_0^{+\infty} |(fre^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Нехай $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)], 0 < \beta - \alpha < 2\pi, 1 \leq p < +\infty$, є простором аналітичних функцій f в $\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$ для яких

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})| dr \right\} < +\infty.$$

Винницький Б., Дільний В. та Гіщак Т. розглядали наступну задачу розщеплення.

Задача 1. Чи кожна функція $f \in W^1_\sigma$ допускає розщеплення $f = \chi + \mu$, де функції χ та μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+ = \{z : Rez > 0\}$ і $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?

Т. Гіщак запропонувала шукати функцію χ у вигляді

$$\chi(z) = \chi_1(z) + i\chi_2(-iz), \tag{1}$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma \varphi(it)e^{itz}dt, \quad \chi_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^0 \varphi(it)e^{itz}dt.$$

Позначимо через $W^1_{\sigma,+}$ підпростір $f \in W^1_\sigma$, що складається з парних функцій.

Теорема 2. *Нехай $f \in W^1_{\sigma,+}$. Тоді функція χ, визначена рівністю (1), є розв'язком вищенаведеої проблеми.*

Доведення базується на наступному твердженні.

Лема 3. *Нехай $(c_k) \in l^2$ і $\sigma \geq 0$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) *послідовність (c_k) є парною;*
2) *функція $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}}$ є парною;*
3) *функція $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k c_k \frac{\pi sin\sigma z}{\sigma z - \pi k}$ є парною.*

Література

[1] Dilnyi V. M. *Splitting of some spaces of analytic functions*, volume 6 of *Ufa Mathematical Journal*. Ufa, 2014.

Группы Ли инфинитезимальных конформных преобразований второй степени в симметрическом римановом пространстве первого класса

И. И. Белокобыльский
(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: indalamar4200@gmail.com

С. М. Покась
(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: pokas@onu.edu.ua

П. А. Широковым в [1] были найдены все неприводимые симметрические римановы пространства $V_n(x;g(x))$ первого класса. Метрический тензор $g_{ij}(x)$ таких пространств в римановой системе координат с началом в точке $M_0(x^h=0)$ имеет следующий вид:

$$g_{ij}(x) = \underset{o}{g_{ij}} + \frac{1}{3}(\underset{o}{h_{i\alpha}}\underset{o}{h_{j\beta}} - \underset{o}{h_{ij}}\underset{o}{h_{\alpha\beta}})x^\alpha x^\beta, \tag{1}$$

$$(\underset{o}{g_{ij}}) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathrm{E} \\ \hline \mathrm{E} & 0 \end{array}\right), (\underset{o}{h_{ij}}) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} e_1 & \\ & e_n \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

где E – единичная матрица а, $e_i = \pm 1, i = 1, ..., n$

Для произвольного риманова пространства $V_n(x;g(x))$ С. М. Покась [2] ввел понятие пространства второго приближения $\tilde{V}_n^2(y;\tilde{g}(y))$:

$$\tilde{g}_{ij}(y) = \underset{o}{g_{ij}} + \frac{1}{3}\underset{o}{R}_{i\alpha\beta j}y^\alpha y^\beta, \tag{2}$$

$$\underset{o}{g_{ij}} = g_{ij}(M_0), \underset{o}{R}_{i\alpha\beta j} = R_{i\alpha\beta j}(M_0), M_0 \in V_n.$$

Сравнение (1) и (2) показывает, что риманово пространство второго приближения $\tilde{V}_n^2$ для симметрического риманова пространства первого класса изометрично исходному пространству V_n. Поэтому группа Ли инфинитезимальных преобразований $\tilde{G}_r$ пространства $\tilde{V}_n^2$ изоморфна группе Ли инфинитезимальных преобразований G_r симметрического риманова пространства первого класса V_n.

Изучение инфинитезимальных конформных преобразований в пространстве $\tilde{V}_n^2$ сводится к исследованию обобщенных уравнений Киллинга [4]

$$\tilde{\xi}_{(i,j)} = \psi(y)\tilde{g}_{ij}$$

Здесь был получени следующий результат [3].

Теорема 1. *В пространстве второго приближения $\tilde{V}_n^2$ для риманова пространства V_n ненулевой скалярной кривизны в точке M_0 существуют инфинитезимальные конформные преобразования с вектором смещения вида*

$$\tilde{\xi}^h = a^h + a^h_{.l}y^l + a^h_{.l_1 l_2}y^{l_1}y^{l_2}, \tag{3}$$

$$(a^h, a^h_{.l}, a^h_{.l_1 l_2} - const)$$

отличные от движений, тогда и только тогда, когда константы $a^h_{\cdot}$ *и* $a^h_{.l}$ *удовлетворяют алгебраическим уравнениям*

$$a^{\alpha}_{.i}\underset{o}{g}_j\alpha = 0 \tag{4}$$

$$a^{\alpha}_{.(i}\underset{o}{R}_{j)(l_1 l_2)\alpha} + a^{\alpha}_{.(l_1}\underset{o}{R}_{l_2)(ij)\alpha} = 0 \tag{5}$$

$$\underset{l_1 l_2 l_3}{C}\left[a^{\alpha}_{\cdot}\underset{o}{R}_{\alpha(l_1 l_2)\beta}\underset{o}{R}_{.(ij)l_3} - \frac{3}{2}\left(b_\alpha \underset{o}{R}^{\alpha}_{.(ij)l_1}\underset{o}{g}_{l_2 l_3} - b_{l_1}\underset{o}{R}_{i(l_2 l_3)j}\right)\right] = 0 \tag{6}$$

где $\underset{l_1 l_2 l_3}{C}$ *- означает циклирование по индексам* $l_1 l_2 l_3$,

$$a^h_{l_1 l_2} y^l_1 y^l_2 = a^{\alpha}_{\cdot}\frac{1}{3}\underset{o}{R}^h{}_{.l_1 l_2 \alpha} y^{l_1} y^{l_2} + \frac{1}{2}\left(\underset{1}{b}y^h - \frac{1}{2}b^h \underset{o}{g}_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2}\right) \tag{7}$$

$$\psi(y) = b_l y^l \tag{8}$$

Так как скалярная кривизна симметрического риманова пространства равна нулю, то аналогично Теореме 1 доказано утверждение.

Теорема 2. *В симметрическом римановом пространстве первого класса* V_n *существуют инфинитезимальные конформные преобразования с вектором смещения вида (3) тогда и только тогда, когда константы* $a^h_{\cdot}$ *и* $a^h_{.l}$ *удовлетворяют алгебраическим уравнениям*

$$a^{\alpha}_{.i}\underset{o}{g}_j\alpha = b\underset{o}{g}_{ij} \tag{9}$$

$$a_{\alpha\beta}\underset{o}{R}^{\alpha}{}_{.(ij).}{}^{\beta} = 0 \tag{10}$$

$$a^{\alpha}_{.(i}\underset{o}{R}_{j)(l_1 l_2)\alpha} + a^{\alpha}_{.(l_1}\underset{o}{R}_{l_2)(ij)\alpha} = 0 \tag{11}$$

$$\psi(y) = b + b_l y^l \tag{12}$$

Исследуя уравнения (9)-(11) при условии (1) приходим к такой теореме:

Теорема 3. *Инфинитезимальные конформные преобразования с вектором смещения вида (3) в симметрическом римановом пространстве первого класса по необходимости являются инфинитезимальными гомотетическими преобразованиями.*

Для $n = 4$ доказана

Теорема 4. *Симметрическое риманово пространство* V_4 *1-го класса допускает группу Ли гомотетических инфинитезимальных преобразований* G_{12}.

Найден базис этой группы и её структура.

Литература

[1] П. А. Широков. Избранные работы по геометрии. Казань, 1966.

[2] С. М. Покась. Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения, Известия Пензенского государственного педагогического университета им. Белинского №26, 2011, 173-183 с 1978.

[3] С. М. Покась. Бесконечно малые конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения, Vol. 7 of Proc. of the Intern. Geom. Center, №2, 2014, 36-50 p.

[4] Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. М, ИЛ, 1947.

Конечномерные динамики и точные решения уравнения возникновения молний

И. В. Жеребятников
(Московский Государственный Университет М. В. Ломоносова, Москва, Россия)
E-mail: zherebiatnikov.iv16@physics.msu.ru

В работе [1] была предложена математическая модель для объяснения возникающих в облаках скачков напряжённости электрического поля, приводящих к возникновению молний. В основе этого подхода лежит предположение о том, что заряженную часть облака можно описать с помощью основных уравнений гидродинамики заряженной среды, движущейся под действием внешних сил (потоки ветра, конвекция и т. д.). Там же приведено нелинейное дифференциальное уравнение для описания распределения электрического поля для одномерного движения заряженного газа:

$$\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial\xi^2}-(u(\xi,\tau)-\alpha)\,\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\xi}, \tag{1}$$

где $u(\xi,\tau)$ – безразмерная напряжённость электрического поля, ξ,τ – безразмерные пространственная и временная координаты, α – постоянная.

В докладе представлен метод построения точных решений уравнения (1) с использованием теории конечномерных динамик [2]. Правая часть этого уравнения порождает функцию

$$\varphi\,(y_0,y_1,y_2)=y_2-(y_0-\alpha)\,y_1 \tag{2}$$

на пространстве джетов $J^2(\mathbb{R})$ с каноническими координатами x,y_0,y_1,y_2. Эту функцию мы рассматриваем как производящую функцию симметрий для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (так называемой *динамики*) [2]. Будем искать такое ОДУ в виде:

$$F:=y_1-h(y_0)=0. \tag{3}$$

Применяя стандартную технику (см. [2, 3]), находим, что функция h имеет вид квадратичной функции

$$h(y_0)=\frac{1}{2}y_0^2+ay_0+b,$$

где a,b – произвольные постоянные. Решая уравнение (3), находим

$$y(\xi)=-a-\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}\sqrt{a^2-2b}\right)\sqrt{a^2-2b}, \tag{4}$$

где a, b, c – произвольные постоянные. Соответствующее эволюционное векторное поле, которое является инфитезимальной симметрией для уравнения (1), имеет вид

$$S=(a+\alpha)\left(\frac{1}{2}y_0^2+ay_0+b\right)\frac{\partial}{\partial y_0}. \tag{5}$$

Преобразование сдвига Φ_τ, отвечающее этому полю, имеет вид

$$\xi\longmapsto\xi,$$

$$y_0\longmapsto -a-\operatorname{th}\left[\frac{a+\alpha}{2}\tau\sqrt{a^2-2b}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2-2b}-a-y_0}{\sqrt{a^2-2b}+a+y_0}\right]\sqrt{a^2-2b},$$

где τ – параметр сдвига вдоль траектории. Применяя обратное преобразование Φ_τ^{-1} к решению уравнения (3), приходим к точному решению уравнения (1):

$$u(\xi,\tau) = (\Phi_\tau^{-1})^*(y(\xi)) = \frac{(a+d)\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]\mathrm{e}^{\tau(a+\alpha)d} + (a-d)\left[1-\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]}{\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]\mathrm{e}^{\tau(a+\alpha)d} + \left[1-\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]}, \qquad (6)$$

где $d=\sqrt{a^2-2b}$. Здесь произвольные постоянные выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $a^2-2b>0$. На рис. 0.1 представлен график решения уравнения (1). На нем выделена область,

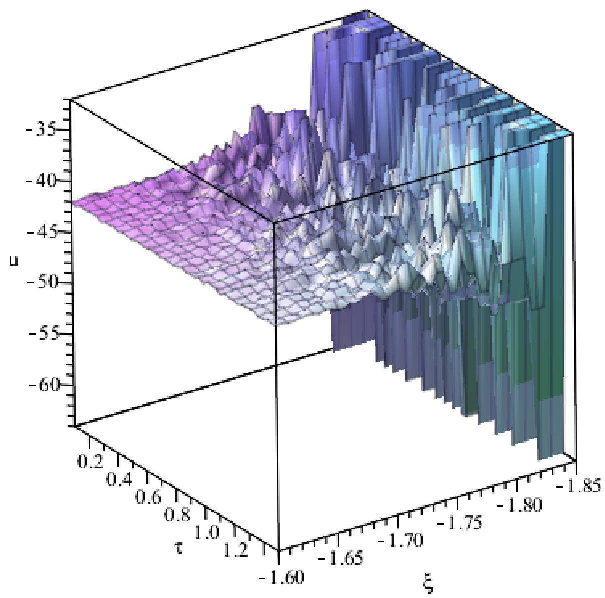


Рис. 0.1. График напряжённости электрического поля $u(\xi,\tau)$ при $a=22$, $b=42$, $c=0$, $\alpha=1$.

в которой наблюдаются резкие скачки напряжённости электрического поля в облаке, что может привести к возникновению разряда.

Литература

[1] V.I. Pustovojt. About the mechanism of lightning. Radio engineering and electronics, 2006. Vol. 51(8). P. 996-1002.

[2] Kruglikov B. S., Lychagina O. V. Finite dimensional dynamics for Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov equation. Lobachevskii Journal of Mathematics, 19: 13–28, 2005.

[3] Kushner A. G., Matviichuk R.I. Exact solutions of the Burgers – Huxley equation via dynamics. Journal of Geometry and Physics 151, 2020.

[4] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Contact geometry and nonlinear differential equations, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. **101**. Cambridge: Cambridge University Press, xxii+496 pp., 2007.

Поиск точных решений уравнений гидродинамической модели заряженного газа с помошью теории симметрий

С. М. Кляхандлер
(Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)
E-mail: kliakhandler.sm16@physics.msu.ru

Описание механизма возникновения разности электрических потенциалов, основанное на гидродинамической модели заряженного газа, было предложено В.И. Пустовойтом в работе [1]. Им было получено следующее нелинейное дифференциальное уравнение для описания распределения электрического поля при одномерном движении заряженного газа:

$$\frac{\partial^2 y(\xi,\tau)}{\partial\xi\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2 y(\xi,\tau)}{\partial\xi^2} - (y(\xi,\tau)-y_0)\frac{\partial y(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right), \tag{1}$$

где $y(\xi,\tau)$ – безразмерная напряженность электрического поля, ξ,τ – пространственная и временная координаты, y_0 – постоянная.

В докладе представлен метод построения точных решений уравнения (1), основанный на теории симметрий [2].

Теорема. Алгебра Ли точечных симметрий уравнения (1) бесконечномерна и порождена векторными полями

$$\begin{gathered}
X_1 = \left(F_1(\tau) + \frac{\tau\xi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial}{\partial\tau} + \left(\dot{F}_1(\tau) + \frac{\tau u_0}{2} - \frac{\tau y}{2} + \frac{\xi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y},\\
X_2 = \left(F_2(\tau) + \frac{\xi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\xi} + \tau\frac{\partial}{\partial\tau} + \left(\dot{F}_2(\tau) + \frac{u_0}{2} - \frac{y}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y},\\
X_3 = F_3(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\tau} + \dot{F}_3(\tau)\frac{\partial}{\partial y},
\end{gathered} \tag{2}$$

где $F_1(\tau), F_2(\tau), F_3(\tau)$ – произвольные функции, а точка – производная по τ.

Эта алгебра симметрий применяется для построения точных решений уравнения (1). Например, рассматривая симметрию X_2 и полагая $F_2(\tau)\equiv 1$, получим поток φ_t, порождаемый этим векторным полем. Он имеет следующий вид

$$\varphi_t = \{x \longrightarrow (x+2)e^{\frac{p}{2}} - 2, \tau \longrightarrow \tau e^p, y \longrightarrow (y-u_0)e^{-\frac{p}{2}} + u_0\}, \tag{3}$$

где p – параметр сдвига вдоль траекторий. Тогда инвариантное решение имеет вид

$$y(\tau,\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}}J(z) + u_0, \qquad z = \frac{x+2}{\sqrt{t}}, \tag{4}$$

где $J(z)$ – произвольная функция.

Получим редуцированное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое интегрируется в квадратурах, однако ввиду громоздкости общее решение записывать не будем. Одно из частных решений имеет вид

$$U(z) = \frac{-2(z+2)\exp\left(-\frac{(z+4)^2}{4}\right) - 6\mathrm{KummerM}\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{(z+4)^2}{4}\right)}{(z+4)\exp\left(-\frac{(z+4)^2}{4},\right)}, \tag{5}$$

где KummerM(μ,ν,z) – функция Куммера, решение вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z\frac{d^2y}{dz^2}+(\nu-z)\frac{dy}{dz}-\mu y=0. \tag{6}$$

Решение исходного уравнения получим, подставив выражение z через исходные переменные системы τ,ξ

$$y(\tau,\xi)=\frac{4\sqrt{\tau}+4\xi\sqrt{\tau}+\xi^2\sqrt{\tau}+6\tau^{3/2}+12\tau+6\xi\tau+4u_0\tau^2+2u_0\tau^{3/2}+u_0\xi\tau^{3/2}}{\tau^{3/2}(4\sqrt{\tau}+\xi+2)}. \tag{7}$$

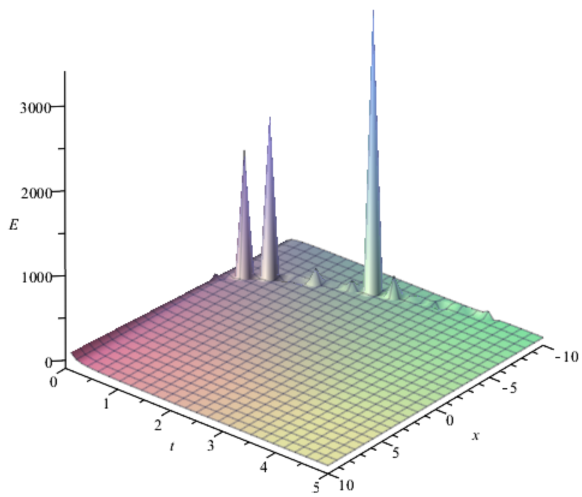


Рис. 0.1. График напряженности электрического поля

Можно увидеть, что на графике присутствует особенность в виде кривой, определяемой нулем знаменателя $4\sqrt{\tau}+\xi+2=0$. Именно на этой кривой напряженность поля стремится к бесконечности – скапливаются заряды и возможно появление молнии.

Литература

[1] Пустовойт В.И. О механизме возникновения молнии // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, №8. С. 996-1002.

[2] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Contact geometry and nonlinear differential equations, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications,* **101**. Cambridge: Cambridge University Press, xxii+496 pp., 2007.

Об одной алгебре операторов Бергмана с гиперболической группой сдвигов

Мозель В. А.
(Одесса, ул. Среднефонтанская, 19-Б, кв. 270, 65039, Одесса, Украина)
E-mail: mozel@ukr.net

Пусть D – открытый единичный круг комплексной плоскости. В гильбертовом пространстве $L^2(D)$ введем следующие операторы:

K – хорошо известный оператор Бергмана;

$W = W_g$ – унитарный (изометрический) оператор взвешенного сдвига, образованный гиперболическим дробно-линейным преобразованием $g \in G$ круга D в себя, где G – бесконечная циклическая коммутативная группа, порождённая отображением g, с двумя неподвижными и предельными точками всех сдвигов, лежащими на абсолюте.

В работе изучается коммутативная C^*-алгебра, которая порождена всеми операторами вида

$$B = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j W^j$$

где A_j – операторы коммутативной C^*-алгебры операторов без сдвига:

$$A_j = a_j(z)I + b_j(z)K + L_j$$

I – единичный, L_j – компактный, коэффициенты a_j, b_j являются автоморфными (т.е. удовлетворяющими условиям $a_j(g(z)) = a_j(z)$, $b_j(g(z)) = b_j(z)$) функциями, постоянными на гиперциклах – лучах, выходящих из одной неподвижной точки (отталкивающей) и приходящих в другую (притягивающую), – и непрерывными на дуге окружности, лежащей внутри единичного круга и ортогональной к абсолюту.

В работе строится алгебра символов и устанавливается критерий фредгольмовости для операторов указанной C^*-алгебры.

Об инвариантных решений двумерного уравнения теплопроводности

Нарманов Отабек Абдигаппарович
(Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, 100174, Узбекистан)
E-mail: otabek.narmanov@mail.ru

Пусть нам дано дифференциальное уравнение порядка

$$\Delta(x,u^{(m)})=0 \tag{1}$$

от n независимых $x=(x^1,x^2,...,x^n)$ и q зависимых переменных $u=(u^1,u^2,...,u^q)$, содержащее производные от u по x до порядка m.

Определение-1 Группа G преобразований, действующая на множестве M пространства независимых и зависимых переменных дифференциального уравнения называется группой симметрий уравнения (0.1) , если для каждого решения $u=f(x)$ уравнения (0.1) и для $g\in G$ такого, что определено $g\circ f$, то функция $\tilde u=g\circ f$, также является решением уравнения.

Нахождению групп симметрий дифференциальных уравнений и их применениям для исследований посвящены многочисленные исследования [1],[3],[2]. В работе [1] найдена алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности. Некоторые инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности найдены в работе [2].

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(k_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i})+Q(u) \tag{2}$$

где $u=u(x_1,x_2,t)\geq 0$ — температурная функция, $k_i(u)\geq 0$, $Q(u)$ — функции от температуры u. Функция $Q(u)$ описывает процесс тепловыделения, если $Q(u)>0$ и процесс теплопоглощения, если $Q(u)<0$.

Рассмотрим случай когда коэффициенты теплопроводности $k_1(u),k_2(u)$ в уравнении (1) являются экспоненциальными функциями температуры т.е. они имеют вид $k_1(u)=k_2(u)=exp(u)$.

Предположим, что $Q(u)=-exp(\alpha u)$, где $\alpha-$ действительное число. В этом случае уравнение (1) имеет следующий вид:

$$u_t=exp(u)\Delta u+exp(u)(\nabla u)^2-exp(\alpha u) \tag{3}$$

где $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа,$\nabla u=\{\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2}\}$ —градиент функции u.

Предположим, что $\alpha\neq 0$. В работе [1] показано, что следующее векторное поле является инфинитезимальней образующей группы симметрии уравнения (2):

$$X=2\alpha t\frac{\partial}{\partial t}-(\alpha-1)\frac{\partial}{\partial x_1}-(\alpha-1)\frac{\partial}{\partial x_2}-2\frac{\partial}{\partial u}.$$

Это означает, что поток этого векторного поля X порождает группу преобразований пространства переменных (t,x_1,x_2,u), элементы которого переводит решения уравнения (4) в его решения. Поток векторного поля X порождают следующую группу преобразований

$$(t,x_i,u)\to(te^{2\alpha s},x_ie^{(\alpha-1)s},u-2s),s\in R \tag{4}$$

Мы найдем решения уравнения (2), инвариантные относительно групп преобразований (4). Для этого сначала находим инвариантные функции этих преобразований.

Известно, что [3] гладкая функция $f : M \to R$ является инвариантной функцией группы преобразований G, действующей на многообразии M тогда и только тогда, когда $Xf = 0$ для каждой инфинитезимальной образующей X группы G.

Используя этот критерий мы находим, что функции

$$I = e^{\frac{u}{2}} t^{\frac{1}{2\alpha}}, \xi = \frac{x_1 - x_2}{t^\beta},$$

где $\beta = \frac{\alpha-1}{2\alpha}$, являются инвариантными фунциями группы преобразований (3), что вытекает из следущих равенств $X_1(I) = 0$, $X_1(\xi) = 0$. Решение уравнения (3) ищем в виде

$$u = \ln \frac{V(\xi)}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{5}$$

Подставляя функцию (5) в уравнение (3) получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции V :

$$2V'' + \beta\xi \frac{V'}{V} - V^\alpha + \frac{1}{\alpha} = 0 \tag{6}$$

В случае, когда $\alpha = 1$ уравнение (6) имеет слудющий вид

$$2\frac{d^2V}{d\xi^2} - V + 1 = 0. \tag{7}$$

Делая замену $p(V) = \frac{dV}{d\xi}$ получим линейно уравнение первого порядка

$$2p\frac{dp}{dV} + V + 1 = 0.$$

Решая это уравнение находим, что

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{V^2 - 2V + C_1}.$$

Теперь из уравнения

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{V^2 - 2V + C_1}$$

находим, что

$$V - 1 + \sqrt{V^2 - 2V + C_1} = C_2 e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Если $C_1 = 1$, то функцию можно написать в явной форме: $V = C_2 e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} + 1$. Таким образом в общем случае, когда $\alpha \neq 0$, мы имеем следующую теорему

Теорема 1. *Инвариантные решения уравнения (3) относительно группы преобразований (4) имеют следующий вид*

$$u = \ln \frac{V(\xi)}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{8}$$

где $V(\xi)-$ общее решение уравнения (6).

В случае $\alpha = 1$ поскольку в уравнении есть источник поглощения тепла, из вида решения (8) вытекает, что при $0 < t \leq 1$ температура в каждой точки плоскости увеличивается. Начиная с $t \geq 1$ температура уменшается и стремится к $u = \ln V(\xi)$ при $t \to \infty$.

Литература

[1] Dorodnitsyn V.A.,Knyazeva I.V.,Svirshchevskii S. R. Group properties of the heat equation with source in the two-dimensional and three-dimensional cases,Differential equations,1983,vol. 19,issue 7, 1215-1223.

[2] Narmanov O.A. Invariant solutions of the two-dimensional heat equation.Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 52-60

[3] Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer 1986, P. 513 p. Translated under the title *Prilojeyniya grupp Li k diiferentsialnim uravneniyam*, Moscow: Mir, 1989, 639 p.

Тождества кривизны обобщенных многообразий Кенмоцу

Вадим Федорович Кириченко
(МПГУ, Москва, Россия)
E-mail: highgeom@yandex.ru

Алигаджи Рабаданович Рустанов
(ИФО, НИУ МГСУ, Москва, Россия)
E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Светлана Владимировна Харитонова
(ОГУ, Оренбург, Россия)
E-mail: hcb@yandex.ru

Пусть $(M^{2n+1}, \Phi, \xi, \eta, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – почти контактное метрическое многообразие.

Определение 1. ([1], [2]). Класс почти контактных метрических многообразий, характеризуемых тождеством $\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi X - \eta(X)\Phi Y$; $X, Y \in X(M)$, называется обобщенными многообразиями Кенмоцу (короче, GK-многообразиями).

Определение 2. Назовем почти контактное метрическое многообразие многообразием класса R_1, если его тензор кривизны удовлетворяет равенству $R(\xi, X)\xi = 0$; $\forall X \in X(M)$.

Теорема 3. *GK-многообразие класса R_1 является пятимерным почти контактным метрическим многообразием, получаемым из точнейше косимплектического многообразия каноническим конциркулярным преобразованием точнейше косимплектической структуры размерности 5.*

Теорема 4. *Тензор римановой кривизны GK-многообразия удовлетворяет следующим тождествам:*

1) $R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\xi = R(\Phi X, \Phi Y)\xi = 0$;
2) $R(X, Y)\xi = \eta(X)F^2(Y) - \eta(Y)F^2(X) + \eta(Y)X - \eta(X)Y$;
3) $R(\xi, \Phi^2 X)\Phi^2 Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0$;
4) $R(\xi, X)Y - R(\xi, \Phi X)\Phi Y = \eta(Y)F^2(X) - \eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi; \forall X, Y \in X(M)$.

Назовем тождество $R(\xi, \Phi^2 X)\xi = F^2(\Phi^2 X) + \Phi^2 X$; $\forall X \in X(M)$ ***первым дополнительным тождеством кривизны GK-многообразия***. А тождество

$$R(\xi, \Phi^2 X)(\Phi^2 Y) + R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 2\langle F(X), F(Y)\rangle - \langle X, Y\rangle + \eta(X)\eta(Y)\xi\,;$$

$\forall X, Y \in X(M)$, назовем ***вторым дополнительным тождеством кривизны GK-многообразия***.

Определение 5. Назовем почти контактное метрическое многообразие многообразием класса R_2, если его тензор кривизны удовлетворяет равенству:

$$R(\xi, \Phi^2 X)(\Psi^2 Y) + R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0\,;$$

$\forall X, Y \in X(M)$.

Теорема 6. *GK-многообразие является многообразием класса R_2 тогда и только тогда, когда оно является многообразием класса R_1.*

Определение 7. Назовем почти контактное метрическое многообразие многообразием класса R_3, если его тензор кривизны удовлетворяет равенству:

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z - R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = 0\,;$$

$\forall X, Y \in X(M)$.

Теорема 8. *GK-многообразие является многообразием класса R_3 тогда и только тогда, когда оно является специальным обобщенным многообразием Кенмоцу II рода, для которого $C_{abcd} = 0$.*

Назовем тождество

$$R(\Phi^2X, \Phi^2Y)\Phi^2Z + R(\Phi^2X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2Z =$$
$$= -4A(Z, X, Y) + \nabla_{\Phi^2Y}(C)(\Phi^2Z, \Phi^2X) - \nabla_{\Phi^2Y}(C)(\Phi Z, \Phi X) + \nabla_{\Phi Y}(C)(\Phi^2Z, \Phi X) +$$
$$+\nabla_{\Phi Y}(C)(\Phi Z, \Phi^2X) - 2\Phi^2X\langle\Phi Y, \Phi Z\rangle - 2\Phi X\langle Y, \Phi Z\rangle; \forall X, Y, Z \in X(M)$$

четвертым дополнительным тождеством кривизны GK-многообразия.

Определение 9. Назовем почти контактное метрическое многообразие многообразием класса R_4, если его тензор кривизны удовлетворяет равенству:

$$R(\Phi^2X, \Phi^2Y)\Phi^2Z + R(\Phi^2X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2Z = 0\,;$$

$\forall X, Y \in X(M)$.

Теорема 10. *GK-многообразие является многообразием класса R_4 тогда и только тогда, когда*

$$A(Z, X, Y) = \frac{1}{4}\{\nabla_{\Phi^2Y}(C)(\Phi^2Z, \Phi^2X) - \nabla_{\Phi^2Y}(C)(\Phi Z, \Phi X) +$$
$$+\nabla_{\Phi Y}(C)(\Phi^2Z, \Phi X) + \nabla_{\Phi Y}(C)(\Phi Z, \Phi^2X) - 2\Phi^2X\langle\Phi Y, \Phi Z\rangle - 2\Phi X\langle Y, \Phi Z\rangle\}$$

$\forall X, Y, Z \in X(M)$.

Теорема 11. *GK-многообразие класса R_4 является SGK-многообразием II рода.*

Литература

[1] С. В. Умнова. Геометрия многообразий Кенмоцу и их обобщений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 2002. – 88 с.

[2] B. Najafi, N. H. Kashani *On nearly Kenmotsu manifolds*, volume 37 of *Turkish Journal of Mathematics*, 2013. p.1040 – 1047, http://journals.tubitak.gov.tr/ma th/.

О геометрии орбит векторных полей

Шамсиев Жахонгир
(Национальный университет Узбекистана, Ташкент, 100174, Узбекистан)
E-mail: jahongirshamsiyev455@gmail.com

Пусть M – гладкое многообразие размерности n, $V(M)$ – множество всех гладких векторных полей, определенных на M. Обозначим через $[X, Y]$ скобку Ли векторных полей $X, Y \in V(M)$. Относительно скобки Ли множество $V(M)$ является алгеброй Ли.

Гладкость в данной работе означает гладкость класса C^{∞}.

Рассмотрим множество $D \subset V(M)$, через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество D. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x) \subset R$, которая в общем случае зависит от поля X, и от начальной точки x.

В дальнейшем, всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$.

Определение 1. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_1 X_2, \ldots, X_k$ из D (где $k-$ произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(...(X_1^{t_1}(x))...)).$$

Изучению структуры множества достижимости и орбиты систем гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с ее важностью в теории оптимального управления, динамических системах, в геометрии и в теории слоений([1]-[3]).

В работах [2], [3] доказано, что каждая орбита семейства векторных полей (класса $C^r, r \geq 1$) с топологией Суссмана обладает дифференциальной структурой, по отношению которым она является гладким многообразием класса C^r, гладко погруженным в M.

Известно, что разбиение многообразия M на орбиты семейства D является сингулярным слоением [2].

Если размерности всех орбит одинаковы, то разбиение M на орбиты D является регулярным слоением. Известно, что для размерности орбиты имеет место $dim A_x(D) \leq dim L(x)$, где $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$ подпространство касательного пространства $T_x M$ [3].

Пусть $M = R^3(x_1, x_2, x_3)$, где (x_1, x_2, x_3) – декартовы координаты. Рассмотрим семейство D, состоящее из следующих векторных полей

$$X_1 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{1}$$

Теорема 2. *Орбиты семейства D, порождают двумерное слоение, слоями которого являются поверхности неотрицательной кривызни.*

Литература

[1] Азамов А.А.,Нарманов А. Я. О предельных множествах орбит систем векторных полей. Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, №2, С. 257-260.

[2] Stefan P. Accessible sets, orbits, and foliations with singularities. Proc. London Mathematical Society. 1974, v. 29, p. 694-713.

[3] Sussmann. H. Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, p. 197-199.

Аналог преобразования Лежандра в идемпотентной математике

М. В. Куркина, В. В. Славский
(Югорский государственный университет, ул. Чехова 16, Ханты-Мансийск, 628012, Россия)
E-mail: mavi@inbox.ru, slavsky2004@mail.ru

Известна классическая формула для преобразования Лежандра [1]:

$$f^*(p) = \max_{x \in R^n} \left[(p,x) - f(x) \right], \tag{1}$$

где R^n – евклидово n-мерное арифметическое пространство, (p,x) – скалярное произведение x, $p \in R^n$, $f(x)$ – выпуклая функция, $f^*(p)$ – двойственная к $f(x)$ или преобразование Лежандра функция $f(x)$. В работе [2] было введено аналогичное понятие для конформно-плоских метрик на единичной n-мерной сфере $S^n \subset R^{n+1}$;

$$f^*(y) = \max_{x \in S^n} \frac{\|y-x\|^2}{2f(x)}, \tag{2}$$

здесь $f(x)$ конформно-выпуклая функция на сфере [3], то есть функция для которой конформно-плоская метрика $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ имеет неотрицательную одномерную секционную кривизну, $\|y-x\|$ – хордовое расстояние между точками на сфере, $f^*(y)$ $y \in S^n$ функция задающая двойственную или полярную метрику $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$. В работе [5] было предложено назвать это преобразование также преобразованием Лежандра функции $f(x)$ $x \in S^n$. С вычислительной точки зрения формула (2) имеет дискретный вид;

$$f^*(y_j) = \max_{x_i \in S^n} \frac{\|y_j - x_i\|^2}{2f(x_i)}, \tag{3}$$

где $\{x_i\}$ конечная сетка точек на сфере. В данной работе предлагается абстрактное обобщение формулы (3) для идемпотентной математики.

Определение 1. Пусть $n > 1$, R_n^+ – множество наборов $f = \{f_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ положительных чисел, $A = \|A_{ji}\|$ $i,j = 1, \ldots, n$ симметричная квадратная матрица неотрицательных чисел с нулевой диагональю. Обозначим через L_A – отображение множества R_n^+ в себя $L_A : R_n^+ \to R_n^+$ определяемое формулой $L_A\left[\{f_i\}\right] = \{f_j^*\}$, где

$$f_j^* = \max_i \frac{A_{ji}}{f_i}. \tag{4}$$

Замечание 2. В формуле (4) участвуют только две операции над неотрицательными числами умножение (деление) и max (min), с помощью функции log это множество чисел можно отождествить с идемпотентным полукольцом $R_{\max} = R \cup \{-\infty\}$ см.[6], [4].

Теорема 3. *Преобразование (4) полукольца $R_{\max} = R \cup \{-\infty\}$ обладает свойствами:*

$$f_i^{**} \leq f_i, \quad f_i^{***} = f_i^* \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где $\{f_i^*\} = L_A\left[\{f_i\}\right]$, $\{f_i^{**}\} = L_A\left[\{f_i^*\}\right]$, $\{f_i^{***}\} = L_A\left[\{f_i^{**}\}\right]$.

Следствие 4. *В условиях теоремы 3 справедливо неравенство: $f_j^* \cdot f_i \geq A_{ji}$ – аналог неравенства Юнга—Фенхеля.*

Пример 5. Рассмотрим как выглядит L_A при $n = 3$, пусть матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $\{f_i^*\} = L_A[\{f_i\}]$, $\{f_i^{**}\} = L_A[\{f_i^*\}]$ имеют вид:

$$f_1^* = \max\left(\frac{a}{f_2}, \frac{b}{f_3}\right),\ f_2^* = \max\left(\frac{a}{f_1}, \frac{c}{f_3}\right),\ f_2^* = \max\left(\frac{b}{f_1}, \frac{c}{f_2}\right);$$

$$f_1^{**} = \max\left(a\min\left(\frac{f_1}{a}, \frac{f_3}{c}\right), b\min\left(\frac{f_1}{b}, \frac{f_2}{c}\right)\right),$$

$$f_2^{**} = \max\left(c\min\left(\frac{f_1}{b}, \frac{f_2}{c}\right), a\min\left(\frac{f_2}{a}, \frac{f_3}{b}\right)\right),$$

$$f_3^{**} = \max\left(c\min\left(\frac{f_1}{a}, \frac{f_3}{c}\right), b\min\left(\frac{f_2}{a}, \frac{f_3}{b}\right)\right).$$

Замечание 6. Как показали численные эксперименты если матрица A в теореме **3** не обладает требуемыми свойствами, то теорема не верна.

Гипотеза 7. *Теорема 3 справедлива в случае абстрактного полукольца.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 18-47-860016, 18-01-00620), при поддержке Научного Фонда ЮГУ № 13-01-20/10.

Литература

[1] В. С. Владимиров. Преобразование Лежандра выпуклых функций. Матем. заметки, 1:6 (1967), 675–682; Math. Notes, 1(6), : 448-–452, 1967.

[2] Е. Д. Родионов, В. В. Славский. Полярное преобразование конформно-плоских метрик. Матем. тр., 20:2 (2017), 120–138; Siberian Adv. Math., 28(2), : 101—114, 2018.

[3] M. V. Kurkina, V. V. Slavsky, E. D. Rodionov. Conformally convex functions and conformally flat metrics of nonnegative curvature. Докл. АН СССР, 91(3), : 287—289, 2015.

[4] Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, А. Н. Соболевский. Идемпотентная математика и интервальный анализ. Вычислительные технологии, 6(6), : 47–70, 2001.

[5] М. В. Куркина. Об изменении кривизны конформно-плоской метрики при преобразовании Лежандра. Известия алтайского государственного университета, 4(102), : 88–92, 2018.

[6] Serge Sergeev and Hans Schneider. CSR expansions of matrix powers in max algebra. Transactions of the American Mathematical Society, 364(11) : 5969—5994, 2012.

QA-деформація еліптичного параболоїда

Хомич Юлія
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)
E-mail: khomych.yuliia@gmail.com

В роботі досліджується нескінченно мала деформація поверхні вигляду

$$\overline{r}^*(u,v,t)=\overline{r}(u,v)+t\overline{U}(u,v),$$

де $\overline{r}(u,v)$ – її векторно-параметричне рівняння, а $\overline{U}(u,v)$ – поле зміщення, $t\longrightarrow 0$, при якій варіація елемента площі $\delta d\sigma$ є заданою функцією. Такі деформації називаються квазіареальними або коротко QA-деформаціями [1].

Варіація площі $\delta d\sigma$ при нескінченно малій деформації виражається через варіацію метричного тензора $2\varepsilon_{ij}\equiv\delta g_{ij}$ за формулою $\delta d\sigma=\varepsilon_{ij}g^{ij}d\sigma$. За допомогою рівностей $\frac{\delta d\sigma}{d\sigma}=\varepsilon_{ij}g^{ij}=-2\mu(u,v)$ вводимо функцію $\mu(u,v)$. Очевидно, задання функції $\delta d\sigma$ рівносильно заданню функції μ. Надалі будемо говорити, що функція μ виражає закон змінювання елемента площі при QA-деформації поверхні. При $\mu=0$ така деформація є ареальною.

Задача про існування зазначеної деформації поверхні $S(K\neq 0)$ в E_3-просторі зводиться до розв'язування наступної системи рівнянь [1]

$$\begin{cases}T^{\alpha\beta}_{,\alpha}-T^{\alpha}b^{\beta}_{\alpha}+\mu_{\alpha}c^{\alpha\beta}=0,\\ T^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}+T^{\alpha}_{,\alpha}=0,\\ c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}=0\end{cases}\tag{1}$$

відносно функції $\mu=\mu(u,v)$ та тензорних полів $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}(\alpha,\beta=1,2)$, через які виражаються частинні похідні вектора зміщення $\overline{U}$:

$$\overline{U_i}=\left(c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}-\mu\delta^{\beta}_{i}\right)\overline{r_\beta}+c_{i\alpha}T^{\alpha}\overline{n}.$$

Система рівнянь (1) представляє собою систему трьох диференціальних рівнянь відносно 6 невідомих функцій: $T^{11},T^{12}=T^{21},T^{22},T^1,T^2,\mu$.

Нехай $T^{\alpha\beta}=0$, тоді система рівнянь (1) є системою трьох рівнянь відносно трьох невідомих функцій

$$\begin{cases}-T^{\alpha}b^{\beta}_{\alpha}+\mu_{\alpha}c^{\alpha\beta}=0,\\ T^{\alpha}_{,\alpha}=0.\end{cases}\tag{2}$$

Перший тензор деформації $2\varepsilon_{ij}\equiv\delta g_{ij}$ через $T^{\alpha\beta}$ та μ виражається у вигляді [1]

$$2\varepsilon_{ij}=T^{\alpha\beta}\left(c_{i\alpha}g_{j\beta}+c_{j\alpha}g_{i\beta}\right)-2\mu g_{ij}.$$

Умова $T^{\alpha\beta}=0$ рівносильна тому, що $\varepsilon_{ij}=-\mu g_{ij}$. Функцію μ, що зустрічається в таких рівняннях, називають функцією конформності [2]. Отже, при $T^{\alpha\beta}=0$ функція μ, що виражає закон змінювання елемента площі при QA-деформації поверхні є функцією конформності.

Нехай векторно-параметричне рівняння еліптичного параболоїда задано у вигляді

$$\overline{r}(u,v)=\{u\cos v,u\sin v,\frac{u^2}{2}\}.$$

В роботі отримано розв'язок системи рівнянь (2) для еліптичного параболоїда

$$T^1=0,\ T^2=\frac{-c}{u\sqrt{1+u^2}},\ \mu=-c\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c_0,$$

де $c\neq 0, c_0$ – деякі константи.

Має місце теорема.

Теорема 1. *Поверхня еліптичного параболоїда допускає QA-деформацію, при якій координати поля зміщення мають вигляд*

$$\overline{U}(u,v) = \{ucosv\left(c\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c_0\right)+c_1,\ usinv\left(c\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c_0\right)+c_2,$$
$$\frac{u^2}{2}\left(c\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c_0\right)-\frac{c}{4}\left(u\sqrt{1+u^2}+\ln|u+\sqrt{1+u^2}|\right)+c_3\},$$

де $c \neq 0, c_1, c_2, c_3$ *– деякі сталі. При цьому функція* $\mu = -c\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+c_0$, *що виражає закон змінювання елемента площі, є функцією конформності.*

Література

[1] Безкоровайна Л. Л., Хомич Ю. С. Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3. Proc. Intern. Geom. Center, 2014, № 7(2), С. 6 – 19.

[2] Федченко Ю. С. Нескінченно малі конформні деформації деяких класів поверхонь. Proc. Intern. Geom. Center, 2014, № 7(2), С. 20 – 25.

Зміст