

Про число топологічно нееквівалентних гладких функцій з однією критичною точкою типу сідла на двовимірному торі

Кадубовський О.А.

(ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», Слов'янськ, Україна)

E-mail: kadubovs@ukr.net

Нехай M_g – замкнена гладка орієнтовна поверхня роду $g \geq 0$, а $C_{k,l}(M_g)$ – клас гладких функцій на M_g (з трьома критичними значеннями), які мають точно k локальних мінімумів (максимумів), l локальних максимумів (мінімумів) та одну (в загальному випадку *вироджену*) критичну точку типу сідла, індекс Пуанкаре якої становить $1 - n = 2 - 2g - k - l$ (напр. [6], [7]).

Через $C_n(M_g)$ позначимо клас гладких функцій на M_g (з трьома критичними значеннями), які окрім локальних мінімумів та локальних максимумів мають лише одну (в загальному випадку *вироджену*) критичну точку типу сідла, індекс Пуанкаре якої становить $1 - n = 2 - 2g - \lambda$, де $\lambda \geq 2$ – сумарне число локальних мінімумів та максимумів.

Функції f_1 і f_2 з класу $C_n(M_g)$ називають топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : M_g \rightarrow M_g$ і $h' : R^1 \rightarrow R^1$ (h' зберігає орієнтацію), такі що $f_2 = h' \circ f_1 \circ h^{-1}$.

Якщо h зберігає орієнтацію, то функції f_1 та f_2 називають топологічно спряженими (напр. [6]) або ж O -топологічно еквівалентними (напр. [7]).

В загальному випадку, для довільних натуральних g, k, l (або ж k, l і $n = 2g + k + l - 1$, тобто для функцій з фіксованим сингулярним типом), задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$ виявилась досить важкою та нерозв'язаною до сьогодні проблемою.

Серед найбільш суттєвих просувань в цьому напрямі слід відзначити наступні.

Задачу про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{1,1}(M_g)$ (для довільного роду $g \geq 1$) повністю розв'язано в роботі [7].

Одержані в роботі [2] точні формули цілком вирішують питання про підрахунок числа як O -топологічно нееквівалентних, так і числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_n(M_0)$.

В роботі [8] для довільних натуральних k і l повністю розв'язані задачі про підрахунок числа O -топологічно та топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_0)$.

Як з'ясувалося ([1] з посиланням на роботу [4]), задача про перерахування одноклітинкових двокольорових карт з n ребрами (одне з яких є поміченим), k білими та l чорними вершинами тісно пов'язана із задачею про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$. Відомості про карти можна знайти, наприклад, в огляді [4] та роботі [1].

Так, наприклад, з урахуванням результатів роботи [1], для довільного роду $g \geq 0$ та натуральних k і l , при яких $n = 2g + k + l - 1$ є **простим** числом, в [10] наведено точні формули для підрахунку числа O -топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(M_g)$.

Для двовимірного тору $T^2 = M_1$ задачі про підрахунок числа O -топологічно та топологічно нееквівалентних функцій повністю розв'язані лише на класах $C_{1,l}(T^2)$ ($C_{k,1}(T^2)$) в роботі [9] та $C_{2,l}(T^2)$ ($C_{k,2}(T^2)$) в роботі [11].

В загальному випадку — для фіксованих натуральних k і l — задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,l}(T^2)$ також залишається нерозв'язаною.

Якщо ж розглянути (більш ємний) клас функцій $C_n(T^2)$, то, з урахуванням результатів робіт [1], [5] і [3], можна встановити справедливність наступного твердження

Теорема 1 (основна). Число O -топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_n(T^2)$ можна обчислити за формулою

$$t^*(n) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{6} C_{n-1}^2 C_{2(n-1)}^{n-1} + a(n) + 2b\left(\frac{2n}{3}\right) + 2c\left(\frac{n}{2}\right) + 2d\left(\frac{n}{3}\right) \right), \quad (1)$$

де $n \geq 3$, $u(p) = \frac{(2p)!}{p!p!} = C_{2p}^p$,

$$\begin{aligned} a(2p+1) &= 0, & a(2p) &= \frac{p(p-1)}{6} \cdot C_{2p}^p = \frac{p(p-1)}{6} \cdot u(p); \\ c(2p+1) &= 0, & c(2p) &= p \cdot C_{2p}^p = p \cdot u(p); \\ d(2p+1) &= 0, & d(2p) &= p \cdot C_{2p}^p = p \cdot u(p); \\ b(2p+1) &= 0, & b(2p) &= (2p-1) \cdot C_{2(p-1)}^{p-1} = (2p-1) \cdot u(p-1). \end{aligned}$$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$t^*(n)$	1	4	14	76	330	1 522	6 680	29 256	125 970	539 292	2 288 132	9 659 416

ТАБЛИЦЯ 1.1. Початкові значення числа O -топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_n(T^2)$

На думку автора, цілком досяжним є одержання точних формул для підрахунку й числа топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_n(T^2)$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Адрианов Н.М. Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. *Функциональный анализ и его приложения*, 31(3) : 1–9, 1997.
- [2] Callan D., Smiley L. Noncrossing partitions under reflection and rotation; preprint, arXiv:math/0510447 [math.CO], 2000.
- [3] Cori R., Marcus M. Counting non-isomorphic chord diagrams. *Theoretical Computer Science*, 204 : 55–73, 1998.
- [4] Cori R., Machi A. Maps hypermaps and their automorphisms: a survey I, II, III. *Expositiones Mathematicae*, 10 : 403–427, 429–447, 449–467, 1992.
- [5] Goupil A., Schaeffer G. Factoring n -cycles and counting maps of given genus. *European Journal of Combinatorics*, 19(7) : 819–834, 1998.
- [6] Prishlyak A.O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface. *Topology and its Applications*, 119(3) : 257–267, 2002.
- [7] Кадубовський О.А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 12(6) : 105–145, 2015.
- [8] Кадубовський А.А. О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II. *Труды международного геометрического центра*, 8(1) : 46–61, 2015.
- [9] Кадубовський О.А., Баляса Н.П. Перерахування двокольорових хордових O -діаграм роду 1, які мають один чорний (або сірий) цикл, відносно дії циклічної та дієдральної груп. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*, 6 : 31–46, 2016.
- [10] Кадубовський О.А. До задачі про підрахунок числа топологічно нееквівалентних гладких функцій з однією критичною точкою типу сідла на орієнтовних поверхнях. *XII Літня школа «Алгебра, топологія, аналіз» 10 – 23 липня 2017 р.*, село Колочава, Закарпатська обл., Міжгірський район, Україна: Тези доповідей. Київ: Інститут математики НАН України, 2017. С. 4–5. 55 с.
- [11] Кадубовський О.А., Калініченко Я.В. Перерахування двокольорових хордових O -діаграм роду 1, які мають два чорних (або сірих) циклів, відносно дії групи дієдра. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*, 8 : 30–45, 2018.