Функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и метризуемость компактов

А. А. Заитов
(Ташкентский архитектурный и стоительный институт)
E-mail: adilbek_zaitov@mail.ru

Х. Ф. Холтураев
(Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства)
E-mail: xolsaid_81@mail.ru

В работе показано, что если для натурального числа n, $n \geq 3$,пространство $I_nX \setminus X$, наследственно нормально, то бикомпакт X метризуем.

Рассмотрим множество $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с двумя алгебраическими операциями: сложением $\oplus$ и умножением $\odot$ определенными следующим образом $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и $u \odot v = u + v$ где $\mathbb{R}$ множество действительных чисел.

Пусть $X-$ компактное Хаусдорфово пространство, $C(X)-$ алгебра непрерывных функций на X с обычными алгебраическими операциями. На $C(X)$ операции $\oplus$ и $\odot$ определим по правилам $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$ и $\varphi \odot \psi = \varphi + \psi$, где $\varphi, \psi \in C(X)$.

Напомним, что функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется [1] идемпотентной вероятностной мерой (мерой Маслова) на X, если он обладает следующими свойствами:

$$(1)\, \mu(\lambda_X) = \lambda \,\text{для всех}\, \lambda \in \mathbb{R},\, \text{где}\, \lambda_X - \text{постоянная функция};$$
$$(2)\, \mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi),\, \text{для всех}\ \lambda \in \mathbb{R}\, \text{и}\, \varphi \in C(X);$$
$$(3)\, \mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)\, \text{для всех}\ \varphi, \psi \in C(X);$$

Для компактного Хаусдорфово пространства X обозначим через $I(X)$ множество для идемпотентных вероятностных мер на X. Рассмотрим $I(X)$ как подпространство пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$. Для заданных компактных Хаусдорфовых пространств X, Y и непрерывного отображения $f : X \to Y$ можно проверить, что естественное отображение $I(f) : I(X) \to I(Y)$, определенное по формуле $I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f)$, непрерывно. Более того, конструкция I является нормальным функтором. Поэтому для произвольной идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ можно определить понятие носителя:

$$Supp\, \mu = \cap \big\{ A \subset X : \overline{A} = A, \mu \in I(A) \big\}.$$

Для положительного целого числа n определим следующее множество

$$I_n(X) = \{\mu \in I(X) : |Supp\, \mu| \leq n\}.$$

Положим

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Множество $I_\omega(X)$ всюду плотно [1] в $I(X)$. Идемпотентную вероятностную меру $\mu \in I_\omega(X)$ называют идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем.

Заметим, что если $\mu-$ идемпотентная вероятностная мера с конечным носителем $Supp\, \mu = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, то μ можно представить в виде $\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus ... \oplus \lambda_k \odot \delta_{x_k}$ единственным образом, где $-\infty < \lambda_i \leq 0,\ i = 1, 2, ..., k,\ \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus ... \oplus \lambda_k = 0$.

Здесь, как обычно, для $x \in X$ через δ_x обозначен функционал на $C(X)$, определенный формулой $\delta_x(\varphi) = \varphi(x),\ \varphi \in (X)$, и называемый мерой Дирака. Она сосредоточена в точке x.

Для бикомпактов X и Y через $C(X,\ Y)$ обозначается пространство непрерывных отображений из X в Y, снабженное компактно-открытой топологией. Ясно, что $C(k,\ Y)$ естественно гомеоморфно $k-$ той степени Y^k пространства Y, где $k-$ дискретное пространство, состоящее из k точек. Для функтора F, бикомпактов X и k определим отображение

$$\pi_{I,\,X,\,k} : C(k,\ X) \times I(k) \to I(X)$$

равенством

$$\pi_{I,\,X,\,k}(\xi,\ a) = I(\xi)(a)\,,\ \xi \in C(k,\ X)\,, a \in I(k)\,.$$

Имеет место

Предложение 1. Для компакта X и натурального числа k отображение $\pi_{I,\,X,\,k}$ непрерывно.

Для компакта X, непустого множества $A \subset X$ положим

$$S_I(A) = \{a \in I(X) :\ \operatorname{supp} a \cap A \neq \emptyset\}.$$

Ясно, что $S_I(\emptyset) = \emptyset$, $S_I(X) = I(X)$. По построению, включение $A \subset B$ влечет $S_I(A) \subset S_I(B)$.

Предложение 2. Для компакта X, всякого его открытого подмножества U имеет место

$$I(X \backslash U) = I(X) \backslash S_I(U)\,.$$

Следствие 3. Для всякого открытого подмножества U компакта X множество $S_I(U)$ открыто в $I(X)$.

Отметим, что многозначное отображение $\operatorname{supp} : I(X) \to X$ полунепрерывно снизу.

Предложение 4. Для всякого замкнутого подмножества Φ компакта X множество $S_I(\Phi)$ замкнуто $I(X)$.

Для компакта X введем обозначение $I_n^0 X = I_n X \backslash I_{n-1} X$.

Для бесконечного кардинала τ через αN_τ обозначим Александровскую одноточечную компактификацию дискретного множества N_τ мощности τ.

Предложение 5. Если τ – несчетный кардинал, то пространство $I_3^0(\alpha N_\tau)$ не нормально.

Теорема 6. Пусть X – бикомпакт. Если пространство $I_3 X \backslash X$ наследственно нормально, то X метризуем.

Следствие 7. Пусть X – бикомпакт и $n \geq 4$. Если пространство $I_n X \backslash X$ наследственно нормально, то бикомпакт X метризуем.

Литература

[1] M.M.Zarichnyi. Idempotent probability measures, I. *arXiv: math /060854v1 [math.GN]* 30 Aug 2006.

[2] G.L.Litvinov, V.P.Maslov, and G.B.Shpiz, Idempotent functional analysis: An algebraic approach, *Translated from Matematicheskie Zametki,* vol.69, no. 5, 2001,pp. 758-797.

[3] Т.Ф.Жураев. Функтор λ и метризуемость бикомпактов. *Вестник МГУ. Серия: Механика-математика.* Москва, 1999, № 4, стр. 54-56.