Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь

Т. Ю. Подоусова
(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)
E-mail: `tatyana_top@mail.ru`

Н. В. Вашпанова
(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)
E-mail: `vasha_nina@ukr.net`

Нехай у E_3-просторі задана однозв'язна регулярна поверхня S класу C^3 рівнянням $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$, де x^1, x^2-криволінійні координати змінної точки S.

Регулярне сімейство поверхонь S_t, яке залежить від малого параметра t,

$$\widetilde{r}(x^1, x^2, t) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + t\mathbf{y}(x^1, x^2) \tag{1}$$

зветься нескінченно малою (н.м) деформацією першого порядку з вектором зміщення $\mathbf{y}(x^1, x^2)$ класу C^3.

Припустимо, що при н.м. деформації (1) лінії геодезичного скруту (LGT-лінії) [1] переходять у лінії геодезичного скруту (в головному) і зберігається повна гаусова кривина K поверхні S.

Аналітично задача про існування таких н.м. деформацій S зводиться до дослідження і розв'язування наступної системи рівнянь відносно невідомих $T^{\alpha\beta}$, T^{α}, μ, ψ:

$$\begin{cases} T^{\alpha k}_{,\alpha} - b^k_\alpha T^\alpha = \mu_\alpha c^{k\alpha},\ b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha} = 0,\ c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0, \\ \left(c_{\alpha i}h_{j\beta} + 2Hc_{\beta i}g_{\alpha j}\right)T^{ij} = (\psi + \mu)\,h_{\alpha\beta} + 2c_{\alpha i}T^i_{,\beta} - c^j_k g_{\alpha\beta}T^k_{,j}, \\ c_{i\alpha}T^\alpha_{,j}d^{ij} + 2\mu = 0, \end{cases} \tag{2}$$

де $g_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta}$ - метричний, дискримінантний та сітковий тензори S відповідно, H-середня кривина, $b_{\alpha\beta}$-коефіцієнти другої квадратичної форми S, $b^k_\alpha = g^{k\beta}b_{\beta\alpha}$, $g^{\alpha\beta}$ -елементи матриці оберненої до матриці $||g_{ij}||$, $d^{ij} = \frac{1}{K}c^{i\alpha}c^{j\beta}b_{\alpha\beta}$, комою позначено коваріантне диференціювання на базі g_{ij}, індекси всюди приймають значення 1,2.

Через будь-який роз'язок системи рівнянь (2) вектор зміщення набуває вигляду

$$\mathbf{y}(M) = \int_{M_0 M}\left(c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta - \mu\mathbf{r}_i + c_{i\alpha}T^\alpha\mathbf{n}\right)dx^i + \mathbf{y}_0,$$

де криволінійний інтеграл обчислюється вздовж будь-якої спрямної кривої, що належить S і з'єднує довільно фіксовану точку M_0 із змінною точкою M. Векторне поле $\mathbf{y}$ при цьому буде однозначною функцією (з точністю до сталого вектора $\mathbf{y}_0$), в силу однозв'язності S.

Нехай S- мінімальна поверхня ($H = 0$).

Справедлива наступна

Теорема 1. *Н.м. деформація першого порядку мінімальної поверхні S із стаціонарними LGT-лініями і повною гаусовою кривиною цілком визначаєтьcя тензорами*

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(d^{\alpha i}T^\beta_{,i} + d^{\beta i}T^\alpha_{,i}\right)$$

та функціями $\mu = -\psi = -\frac{1}{2}c_{i\alpha}T^\alpha_{,j}d^{ij}$, які представлені через контраваріантний вектор T^α, який є розв'язком наступної системи рівнянь:

$$K_\alpha d^{\alpha i}T^\beta_{,i} - Kd^{\alpha i}\left(T^\beta_{,i}\right)_{,\alpha} + K^2 d^\beta_\alpha T^\alpha = 0. \tag{3}$$

Очевидно, що система рівнянь (3) завжди має розв'язок $T^\alpha = 0$. Тоді вектор зміщення $\mathbf{y} = const$, що означає жорсткість поверхні S при даній н.м. деформації.

Позначимо $T^1 = \psi(x^1, x^2), T^2 = \nu(x^1, x^2)$ і віднесемо поверхню S до ліній кривини, які в даному випадку утворюють ізотермічну сітку. Тоді система рівнянь (3) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \psi_{11} - \psi_{22} + a\psi_1 + b\psi_2 + c\psi = 0, \\ \\ \nu_{11} - \nu_{22} + d\nu_1 + e\nu_2 + f\nu = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де a, b, c, d, e, f -відомі функції точки S. Кожне із цих рівнянь є однорідним диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних гіперболічного типу. Будемо шукати інтеграли цих рівнянь, які приймають певні значення

$$\psi\Big|_{x^1+x^2=x_0'} = t_1(x^1 + x^2), \qquad \psi\Big|_{x^1-x^2=y_0'} = s_1(x^1 - x^2)$$

для рівняння (4.1) на характеристиках $x^1 + x^2 = x_0'$ і $x^1 - x^2 = y_0'$
і

$$\nu\Big|_{x^1+x^2=x_0''} = t_2(x^1 + x^2), \qquad \psi\Big|_{x^1-x^2=y_0''} = s_2(x^1 - x^2)$$

для рівняння (4.2) на характеристиках $x^1 + x^2 = x_0''$ і $x^1 - x^2 = y_0''$.

Будемо рахувати, що функції

$$t_1(x^1 + x^2), s_1(x^1 + x^2), t_2(x^1 - x^2), s_2(x^1 - x^2)$$

мають неперервні похідні першого порядку і

$$t_1(y_0') = s_1(x_0'), t_2(y_0'') = s_2(x_0'').$$

Згідно задачі Гурса [2],яку ми отримали, кожній парі функцій

$$t_1(x^1 + x^2), s_1(x^1 - x^2), \qquad t_2(x^1 + x^2), s_2(x^1 - x^2)$$

відповідають єдині розв'язки цих рівнянь $\psi(x^1, x^2)$ і $\nu(x^1, x^2)$ відповідно.
Отже, має місце

Теорема 2. *Кожна мінімальна поверхня допускає н.м. деформацію зі стаціонарними LGT-лініями та повною гаусовою кривиною. Вектор зсуву $\mathbf{y}(x^1, x^2)$ при цьому залежить від наступних довільних регулярних функцій*

$$t_1(x^1 + x^2), t_2(x^1 + x^2), s_1(x^1 - x^2), s_2(x^1 - x^2).$$

Література

[1] Вашпанова Т.Ю., Безкоровайная Л.Л. LGT-сеть и ее деформации. Современные проблемы математики и механики, Том 4. Математика, Вып.№2. К 100-летию со дня рождения Ефимова Н.В – Москва, 2011, с.157-163.

[2] Кошляков Н.С. и др. Уравнения в частных производных математической физики. Учебное пособие для мех.-мат. фак.ун-тов, М., "Высшая школа 1970, 712 с.