Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грассмановим образом

Гречнєва М.О.
(Запоріжжя, Запорізький національний університет)
E-mail: mag83@list.ru

Стєганцева П.Г.
(Запоріжжя, Запорізький національний університет)
E-mail: steg_pol@mail.ru

Задача відновлення поверхні за її грассмановим образом зводиться до доведення існування розв'язку диференціального рівняння другого порядку у частинних похідних. Ця задача розв'язувалась як локально, так і в глобальному аспекті у евклідовому просторі [1] та у просторі Мінковського [2]. У роботі [3] розглядається задача відновлення поверхні з краєм у евклідовому просторі, що має заданий грассманів образ.

Нами розв'язана задача відновлення двовимірної неізотропної поверхні з краєм простору Мінковського за її грассмановим образом. Доведена можливість відновлення такої часоподібної поверхні V^2 класу C^2 в ${}^1R_4$, яка бієктивно проектується на часоподібну поверхню $\tilde{V}^2$ тривимірного простору ${}^1R_3$, причому $\tilde{V}^2$ має бієктивний сферичний образ. Тоді поставлену задачу можна почати з відновлення поверхні $\tilde{V}^2$, яка при вказаних умовах повністю визначається своєю опорною функцією. Вказані вимоги можна задовольнити наступним чином. Розглянемо центральне проектування із центру сфери одиничного радіусу простору ${}^1R_3$ на дотичну до неї площину в точці $O(0,0,1)$. Центральне проектування є гомеоморфізмом півсфери і області на дотичній площині, декартові координати x, y точок якої задовольняють умову $x^2 - y^2 < 1$. Саме ці декартові координати оберемо в якості внутрішніх координат шуканої поверхні. Для отримання рівняння відносно опорної функції (основного рівняння) рухомий репер $(\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3, \bar{f}^4)$ простору Мінковського обираємо спеціальним чином, пов'язуючи його з розглянутою півсферою. Помістивши вектори $\bar{f}^1, \bar{f}^2$ у дотичну площину поверхні V^2, а вектори $\bar{f}^3, \bar{f}^4$ – у її нормальну площину, отримаємо рухомий репер поверхні V^2.

Якщо поверхню V^2 задавати радіус-вектором $\bar{r}(x,y) = (z^1(x,y), z^2(x,y), z^3(x,y), z^4(x,y))$, а тривимірний простір ${}^1R_3$ рівнянням $z^4 = 0$, то поверхня $\tilde{V}^2$ має векторне рівняння $\bar{r}_1(x,y) = (z^1(x,y), z^2(x,y), z^3(x,y), 0)$. У випадку часоподібної поверхні основне рівняння набуває вигляду

$$A_y h_{xx} - (A_x + B_y) h_{xy} + B_x h_{yy} = 0,$$

в якому коефіцієнтами є частинні похідні функцій $A = -(\frac{k\lambda}{n} + \frac{xy}{n}\mu), B = n\mu$ від локальних координат x, y, λ, μ грассманового многовиду, $k = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$, $n = \sqrt{1 + y^2}$. Введемо ще позначення $a = \sqrt{1 + \mu^2 - \lambda^2}$. Заданий грассманів образ будемо задавати явними рівняннями $\lambda = \lambda(x,y), \mu = \mu(x,y)$. Зрозуміло, що використання спеціалізованого рухомого реперу визначає певний вигляд плюкерових координат грассманового образу. Має місце

Теорема 1. *Нехай $\Gamma^2 \subset^S PG(2,4)$ – двовимірна поверхня в ${}^3R_6$, задана радіус-вектором*

$$\bar{\sigma}(x,y) = (\frac{yA + xB}{ak}, \frac{A}{ak}, \frac{x}{ak}, -\frac{B}{ak}, \frac{y}{ak}, \frac{1}{ak}),$$

де x, y – координати на півсфері S^2 одиничного радіусу. Нехай Ω – область на S^2, обмежена двома кривими, які є перетинами півсфери площинами, що проходять через її діаметр; Ω' – проекція області Ω на дотичну площину до S^2 . Функції $A(x,y)$, $B(x,y)$ є функціями класу C^2

в області Ω' й разом зі своїми похідними до другого порядку включно обмежені в Ω'. Нехай виконуються умови

$$D = 4A_yB_x - (A_x + B_y)^2 < 0,$$
$$min_{\Omega'}\{|4A_yB_x - (A_x + B_y)^2|, |A_y|, |B_x|\} \geq n_0 = const > 0$$

і нехай на одній із кривих l, що обмежують область Ω, задана неперервна функція $\bar{R}(s) = (R^1(s), R^2(s), R^3(s), R^4(s))$, $R^3_s = -a_oR^1_s - sR^2_s$, $R^4_s = -A|_lR^1_s + B|_lR^2_s$, $a_o = const$. Тоді існує єдина двовимірна регулярна часоподібна поверхня V^2 класу C^1 в ${}^1R_4$ така, що її грассманів образ збігається з поверхнею Γ^2 й край поверхні V^2 збігається з кривою $\bar{R} = \bar{R}(s)$.

Перша з умов теореми визначає гіперболічний тип основного рівняння. Доведена також можливість відновлення просторовоподібної поверхні за її грассмановим образом.

Література

[1] Ю. А. Аминов. *Геометрия подмногообразий//Наукова думка* К, 2002, 467с.

[2] М.А. Гречнева, П.Г. Стеганцева.О существовании поверхности псевдоевклидова пространства с заданным грассмановым образом. *Укр. мат. журнал.*, 68(10) : 1320-1329, 2016.

[3] К.О. Кизбикенов. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с данным грассмановым образом. *ЛГПИ, Рук. деп. В ВИНИТИ 5.12.83. №6568-83 ДЕП*, 25с., 1983.