Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах періодичних цілих функцій

А. С. Сердюк
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)
E-mail: `serdyuk@imath.kiev.ua`

І. В. Соколенко
(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)
E-mail: `sokol@imath.kiev.ua`

Нехай C і L_p, $1 \leq p \leq \infty$, — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$. Позначимо через $C^{\psi}_{\bar{\beta},1}$ класи 2π-періодичних функцій f, які зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Psi_{\bar{\beta}}(x-t)\varphi(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

в якій $\varphi \perp 1$, $\|\varphi\|_1 \leq 1$, а $\Psi_{\bar{\beta}}(\cdot)$ — ядра вигляду

$$\Psi_{\bar{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\pi\beta_k}{2}\right), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) > 0, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty. \tag{3}$$

Якщо послідовності $\bar{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ є стаціонарними послідовностями, тобто $\beta_k = \beta$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, то класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},1}$ позначатимемо через $C^{\psi}_{\beta,1}$. Якщо $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},1}$ і $C^{\psi}_{\beta,1}$ будемо позначати через $C^{\alpha,r}_{\bar{\beta},1}$ та $C^{\alpha,r}_{\beta,1}$, відповідно. Останні класи називають іноді класами узагальнених інтегралів Пуассона.

Будемо розглядати класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},1}$ за умови, що послідовність $\psi(k) > 0$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \tag{4}$$

Як випливає з [1, с. 139-145], класи $C^{\psi}_{\bar{\beta},1}$ за виконання умови (4) складаються із функцій, які допускають регулярне продовження в усю комплексну площину, тобто складаються із цілих функцій. З іншого боку, як показано в [2], для того, щоб функція f належала до множини усіх дійснозначних на дійсній осі цілих функцій, необхідно і достатньо, щоб вона могла бути зображена згорткою вигляду (1) у якій $\varphi \in L_1$, а коефіцієнти $\psi(k)$ ядра $\Psi_{\bar{\beta}}$ вигляду (2) задовольняли умову (4).

Нехай $f \in C$. Через $\tilde{S}_{n-1}(f;x)$ позначатимемо тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у рівномірно розподілених вузлах $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f;x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Порядкові оцінки збіжності інтерполяційних поліномів $\tilde{S}_{n-1}(f;\cdot)$ до f в метриках просторів C і L_p, що виражались в термінах послідовностей найкращих наближень функцій в C і L_p, одержані у роботах І.І. Шарапудінова (1983) та К.І. Осколкова (1986).

Розглянемо величину

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar{\beta},1})_{L_p} = \sup_{f \in C^{\psi}_{\bar{\beta},1}} \|f(\cdot) - \tilde{S}_{n-1}(f;\cdot)\|_p. \tag{5}$$

При $p=1$ асимптотична поведінка величин вигляду (5) при $n\to\infty$ в залежності від тих чи інших обмежень на послідовності $\psi(k)$ та β_k досліджувалась у роботах [3]–[6]. Зокрема у [4, с. 994] за виконання умови (4) для довільних $\beta_k\in\mathbb{R}$ встановлено асимптотичну рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,1})_{L_1}=\frac{16}{\pi^2}\psi(n)+O(1)\left(\frac{\psi(n)}{n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k)\right), \tag{6}$$

в якій $O(1)$ рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.

Крім того, у роботі [7, с. 279-280] отримано результати, з яких випливає, що за виконання умови (4) при довільних $\beta_k\in\mathbb{R}$ має місце асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,1})_{L_\infty}=\frac{2}{\pi}\psi(n)+O(1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi(k), \tag{7}$$

в якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.

Питання про асимптотичну поведінку величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,1})_{L_p}$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, за виконання умови (4) при $1<p<\infty$ залишалось відкритим.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $1\le p\le\infty$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, а $\psi(k)>0$ задовольняє умову (3). Тоді при всіх $n\in\mathbb{N}$ має місце оцінка*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\psi}_{\bar\beta,1})_{L_p}=\frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\pi^{1+\frac{1}{p}}}\|\cos t\|_p^2\psi(n)+O(1)\left(\frac{\psi(n)}{n}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\psi(\nu)\right), \tag{8}$$

в якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів. Якщо, крім того, $\psi(k)$ задовольняє умову (4), то при $n\to\infty$ оцінка (8) є асимптотичною рівністю.

Наведемо наслідок з теореми 1 у випадку, коли $\psi(k)=e^{-\alpha k^r}$, $\alpha>0$, $r>1$.

Теорема 2. *Нехай $r>1$, $\alpha>0$, $1\le p\le\infty$, $\beta_k\in\mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що*

$$n^{1-r}\ln(n+1)\le\alpha r, \tag{9}$$

має місце рівномірна відносно усіх розглядуваних параметрів оцінка

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\bar\beta,1})_{L_p}=e^{-\alpha n^r}\left(\frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\pi^{1+\frac{1}{p}}}\|\cos t\|_p^2+O(1)\frac{1}{n}\right). \tag{10}$$

Література

[1] А. И. Степанец. *Методы теории приближений: В 2 ч.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, Ч. 1, 2002.

[2] *Степанец А.И., Сердюк А.С., Шидлич А.Л.* Классификация бесконечно дифференцируемых периодических функций // *Укр. мат. журн.*, 60, № 12: 1686–1708, 2008.

[3] В.П. Моторний. Приближение периодических функций интерполяционными многочленами в L_1. *Укр. мат. журн.*, 42, № 6: 781–786, 1990.

[4] *Сердюк А.С.* Наближення періодичних функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L_1. *Укр. мат. журн.*, 52, № 7: 994–998, 2000.

[5] А.С. Сердюк. Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами нескінченно диференційовних періодичних функцій в інтегральній метриці. *Укр. мат. журн.*, 53, № 12:1654–1663, 2001.

[6] А.С. Сердюк. Наближення періодичних аналітичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці простору L. *Укр. мат. журн.*, 54, № 5: 692–699, 2002.

[7] А.С. Сердюк, В.А. Войтович. Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена. *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 7, № 1: 274-297, 2010.