Бесконечно малые изгибания с нулевой вариацией объема многогранника

И.Х. Сабитов
(Россия, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)
E-mail: `isabitov@mail.ru`

Светлой памяти А.Д. Милки посвящаю

Известно, что всякий изгибаемый многогранник является также и нежестким относительно бесконечно малых (б.м.) изгибаний, причем б.м. изгибание, порожденное изгибанием, обладает тем свойством, что соответствующая вариация объема многогранника оказывается равной нулю. Известно также, что существуют нежесткие многогранники, для б.м. изгибаний которых вариация объема отлична от нуля, и поэтому можно утверждать, что такие б.м. изгибания многогранника нельзя продолжить в его изгибание. Следовательно, требование равенства нулю вариации объема разбивает все б.м. изгибания на два класса: те, которые заведомо не продолжимы в изгибания, и другие, для которых выполнено необходимое условие (в виде равенства нулю соответствующей вариации объема) их продолжимости в изгибания. Продолжая эту классификацию с требованием равенства нулю первой, второй и n-й вариации объема, мы получаем также классы деформаций разных порядков, промежуточных между б.м. изгибаниями первого порядка и изгибаниями. По-видимому, те многогранники, которые А.Д. Милка назвал в [1] и [2] *флексорами*, как раз и отличаются от обычных нежестких многогранников и от изгибаемых многограннков порядком нулевой вариации объема (кстати, поскольку для изгибаний вариации объема всех порядков равны нулю, то немедленно встает обратный вопрос - какова природа тех аналитических деформаций многогранника, для которых вариации объема всех порядков равны нулю?).

Формально описать нежесткие многогранники с нулевой вариацией объема очень легко, для этого достаточно добавить к обычным уравнениям б.м. изгибаний еще одно уравнение $\delta V = 0$. Мы же хотим выяснить природу тех многогранников и их б.м. изгибаний, для которых близкие к ним нежесткие многогранники тоже имеют нулевую вариацию объема. Пусть нежесткий симплициальный многогранник P_0 имеет n вершин M_i с координатами $(x_i, y_i, z_i), 1 \le n$ и пусть $\{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$ Тогда объем $V(\varepsilon)$ деформированного многогранника с координатами вершин $M_i(\varepsilon) = (x_i + \varepsilon\xi, yi + \varepsilon\eta_i, z_i + \varepsilon\zeta_i)$ имеет представление

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \varepsilon^3 V_3,$$

где V_0 - объем исходного многогранника, а V_1 - первая вариация объема. Рассматривая объем многогранника как сумму объемов тетраэдров с общей вершиной и предполагая, что для всех аффинно преобразованных многогранников (а они, как известно, тоже нежесткие) вариации объема тоже нулевые, получаем, что такое возможно, только если б.м. изгибания рассматриваемого многогранника удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{<i,j,k>} \det \begin{pmatrix} \xi_i & y_i & z_i \\ \xi_j & y_j & z_j \\ \xi_k & y_k & z_k \end{pmatrix} = 0,$$

$$\sum_{<i,j,k>} \det \begin{pmatrix} x_i & \eta_i & z_i \\ x_j & \eta_j & z_j \\ x_k & \eta_k & z_k \end{pmatrix} = 0,$$

$$\sum_{<i,j,k>} \det \begin{pmatrix} x_i & y_i & \zeta_i \\ x_j & y_j & \zeta_j \\ x_k & y_k & \zeta_k \end{pmatrix} = 0$$

с суммированием по согласованно ориентированным граням. Далее, для б.м. изгибаний аффинно преобразованных многограников тоже должны выполняться аналогичные равенства, что приводит к следующим новым условиям на б.м.изгибания исходного многогранника

$$\sum_{<i,j,k>}(\det\begin{pmatrix} x_i & y_i & \eta_i \\ x_j & y_j & \eta_j \\ x_k & y_k & \eta_k \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} x_i & z_i & \zeta_i \\ x_j & z_j & \zeta_j \\ x_k & z_k & \zeta_k \end{pmatrix}) = 0$$

$$\sum_{<i,j,k>}(\det\begin{pmatrix} x_i & y_i & \xi_i \\ x_j & y_j & \xi_j \\ x_k & y_k & \xi_k \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} z_i & y_i & \zeta_i \\ z_j & y_j & \zeta_j \\ z_k & y_k & \zeta_k \end{pmatrix}) = 0$$

$$\sum_{<i,j,k>}(\det\begin{pmatrix} y_i & z_i & \eta_i \\ y_j & z_j & \eta_j \\ y_k & z_k & \eta_k \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} x_i & z_i & \xi_i \\ x_j & z_j & \xi_j \\ x_k & z_k & \xi_k \end{pmatrix}) = 0.$$

Оказывается, требование выполнения этих новых условий для б.м. изгибаний аффино преобразованных многогранников уже не приводит к появлению других новых условий, т.е. появляется какой-то неисследованный еще аналог венка Дарбу с обрывом или замыканием цепочки таких конструкций.

Литература

[1] А.Д. Милка. Нежесткие звездчатые бипирамиды А.Д. Александроа и С.М. Владимировой*Труды по анализу и геометрии*. Новосибирск,Изд-во Института Математики им. С.Л. Соболева, 2000, с. 414-430.

[2] A.D. Milka. Linear bendings of star-like bipyramids.*European J.of Combinatorics*, 31 (4):1050-1064.