Геометрія одного двосимвольного кодування дійсних чисел

Працьовитий М.В.
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Інститут математики НАН України)
E-mail: prats4444@gmail.com

Лисенко І.М.
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)
E-mail: iryna.pratsiovyta@gmail.com

У математиці та її різноманітних застосуваннях використовується багато різних двосимвольних систем зображення чисел, які грунтуються на розкладах чисел в ряди, ланцюгові дроби, нескінченні добутки тощо. Такі системи кодування дійсних чисел називаються аналітичними. Ряди, які використовуються в якості моделей дійсних чисел в переважній більшості є або додатними, або почережними. Ми пропонуємо нову систему, залежну від двох параметрів, один з яких є додатним, а інший – від'ємним. Продуктивність нового зображення ілюструється застосуваннями.

Далі використовуватимемо позначення: $A_s = \{0, 1, ..., s-1\}$ – алфавіт s-кової системи числення; $L_s = A_s \times A_s \times ... \times A_s \times ...$ – простір послідовностей алфавіту.

Нехай $\overline{g} = (g_0; g_1)$, де $0 < g_0 < 1$, $g_0 - g_1 = 1$, $g_0 > -g_1$, $\delta_0 \equiv 0$, $\delta_1 \equiv g_0$.

Lemma 1. *Для будь-якої послідовності* $(\alpha_n) \in L_2$ *ряд*

$$\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1}$$

є збіжним і його сума належить відрізку $[0; g_0]$.

Зауважимо, що має місце наступне очевидне твердження: значення виразу

$$\delta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j} = u_{n+1}$$

є *нулем*, тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{n+1} = 0$;

додатним число, якщо $\alpha_{n+1} = 1$ і кількість одиниць серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ є парним числом;

від'ємним числом, якщо $\alpha_{n+1} = 1$ і кількість одиниць серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ є непарним числом. Тому, коли послідовність (α_n) містить нескінченну кількість 1, то ряд (1) містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів. Після вилучення нульових членів ряду (1) він стане знакозмінним (почережним), причому члени з непарними номерами додатні, а з парними – від'ємні.

Theorem 2. *Для будь-якого числа* $x \in [0; q_0]$ *існує послідовність* (α_k) *така, що*

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k ...}. \tag{2}$$

Скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k ...}$ ряду (2) і його суми x називається їх Δ-зображенням. При цьому число $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ою цифрою цього зображення.

Переважна більшість чисел відрізка $[0; g_0]$ має єдине Δ-зображення, зліченна множина чисел має їх два, а саме: $\Delta_{01(0)} = \Delta_{11(0)}$, $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} \alpha_k 11(0)} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} \alpha_k 01(0)}$.

Геометрію зображення дійсних чисел (топологічні, метричні та фрактальні властивості) в значній мірі розкривають властивості циліндричних та хвостових множин, ергодичні властивості оператора зсуву цифр, метрична незалежність цифр та множин, частотні характеристики, зокрема, середнє значення цифр зображення тощо.

Definition 3. Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$ для Δ-зображення називається множина

$$\Delta_{c_1c_2\dots c_m} \equiv \{x : \alpha_i(x) = c_i,\ i = \overline{1,m}\}.$$

Якщо $\sigma_m = c_1 + c_2 + \dots + c_m$ є парним числом, то циліндр $\Delta_{c_1\dots c_m 1(0)}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta_{c_1c_2\dots c_m 1(0)}$ і $b = \Delta_{c_1c_2\dots c_m(0)}$, якщо ж σ_m – число непарне, то

$$\Delta_{c_1\dots c_m} = [b; a].$$

Тоді $|\Delta_{c_1\dots c_m}| = |b-a| = -g_1 \prod\limits_{j=1}^{m} g_{c_j}$, $|\Delta_{c_1\dots c_m i}| = |g_i||\Delta_{c_1\dots c_m}|$.

Якщо $\sigma_m = 2k$, то $\sup \Delta_{c_1\dots c_m 0} = \inf \Delta_{c_1\dots c_m 1}$.

Якщо $\sigma_m = 2k-1$, то $\sup \Delta_{c_1\dots c_m} = \inf \Delta_{c_1\dots c_m 0}$.

Міра Лебега є інваріантною мірою оператора лівостороннього зсуву цифр Δ-зображення, означеного рівністю:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}) = \Delta_{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_k\dots}.$$

Ця функція є кусково-лінійною і має вираз $\omega(x) = \frac{1}{g_{\alpha_1(x)}}x - \frac{\delta\alpha_1(x)}{g_{\alpha_1(x)}}$. Якщо $Ni(x,n)$ – це кількість цифр i серед перших n цифр Δ-зображення числа x, то границя (якщо вона існує) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n} = \nu_i(x)$, $i \in \{0;1\}$, називається частотою цифри i у Δ-зображенні числа x.

Theorem 4. *Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел x відрізка $[0; g_0]$ мають місце рівності:*

$$\nu_0(x) = g_0, \quad \nu_1(x) = -g_1.$$

Theorem 5. *При $\tau_0 \neq g_0$ множина $M[\tau_0, \tau_1] = \{x : \nu_0(x) = \tau_0, \nu_1(x) = \tau_1\}$ є фрактальною і її розмірність Хаусдорфа-Безиковича обчислюється за формулою:*

$$\alpha_0(M[\tau_0, \tau_1]) = \frac{\ln \tau_0^{\tau_0}\tau_1^{\tau_1}}{\ln g_0^{\tau_0}|g_1|^{\tau_1}}.$$

Theorem 6. *Нехай $\overline{g} = (g_0, g_1, g_2)$, де $g_0, -g_1, g_2 \in (0;1)$, $g_0 > 0 < g_2$, $q_0 + q_1 + q_2 = 1$. Неперервна ніде не монотонна функція f, означена рівністю*

$$y = f(x) = f(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}) = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}(\delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)}) = \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots},$$

$\delta_0 = 0$, $\delta_1 = g_0$, $\delta_2 = g_0 + g_1$, $\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-4}\alpha_n$ встановлює бієктивне відображення множини канторівського типу $C[\Delta^3, \{0,1\}]$ з фрактальною розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\log_3 2$ на відрізок $[0; g_0]$.

У доповіді пропонуються розв'язки і інших тополого-метричних та ймовірнісних задач, що стосуються цього нового зображення дійсних чисел

References

[1] *Працьовитий М.В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2012. — 68с.

[2] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. "— Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. "— 296 с.

[3] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. - Київ: Наукова думка, 1992. - 208 с.