Классификация омега-устойчивых потоков на поверхностях

Ольга Починка
(HSE, Russia, 603105, N.Novgorod, B.Pecherskaya, 25)
E-mail: `opochinka@hse.ru`

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траектория на поверхностях заключается в разбиении несущего многообразия на области с предсказуемым поведением траекторий – *ячеек*. Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1], опубликованной в 1937 году. В этой статье они рассмотрели систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x), \tag{1}$$

где $v(x)$ это C^1-векторное поле на 2-диске, ограниченном кривой без контакта на плоскости, и нашли критерий грубости системы (1).

Более общий класс потоков на 2-сфере рассмотрен в работах Е. А. Леонтович-Андроновой и А. Г. Майера [5, 6], где топологическая классификация таких потоков тоже была основана на разбиении на ячейки, поскольку описание их типов и взаимного расположения (*схема Леонтович-Майера*) полностью определяет качественное разбиение фазового пространства на траектории. Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения – незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была доказана А.Г. Майером [7] в 1939 году и позже М. Пейшото [10, 11] для структурно устойчивых потоков на поверхностях любого рода. В 1971 в работе [12] М. Пейшото обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков, опять-таки изучив все допустимые ячейки для них и введя комбинаторный инвариант – *ориентированный граф*, обобщающий схему Леонтович-Майера.

В 1976 году Д. Нейманом и Т. О'Брайеном [8] на произвольных поверхностях были рассмотрены так называемые *регулярные потоки* – потоки без нетривиальных периодических траекторий, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков – *орбитальный комплекс*, который представляет из себя пространство орбит потока, оснащенное некоторой дополнительной информацией. В 1998 году А.А. Ошемков и В.В. Шарко [9] ввели новый инвариант для потоков Морса на поверхностях — *трехцветный граф*. В той же работе они получили полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на поверхностях в терминах атомов и молекул, введёных в работе А.В. Болсинова, С.В. Матвеева, А.Т. Фоменко [2].

Структурно устойчивые (грубые) потоки на поверхностях имеют только конечное число особых точек и конечное число замкнутых траекторий, каждая из которых гиперболична; кроме того такие потоки не имеют траекторий, соединяющих сёдла. Нарушение последнего условия приводит к Ω-устойчивым потокам на поверхностях, которые не являются структурно устойчивыми. Однако, топологическая классификация таких потоков также сводится к комбинаторному решению. Полным топологическим инвариантом является мультиграф.

Несущая поверхность разбивается на так называемые *элементарные области* удалением из поверхности предельных циклов. Компонента связности получившегося множества и есть элементарная область. Области подразделяются на типы в зависимости от наличия или отсутствия предельных циклов, седловых точек и элементов неблуждающего множества в целом. Затем каждой области ставится в соответствие вершина графа, а граничной окружности – ребро, направленное в соответствии с направлением движения траекторий через граничную окружность. Вершина, соответствующая области, содержащей седловые точки, оснащается *четырёхцветным мультиграфом*, являющимся обобщением трёхцветного графа Ошемкова-Шарко [9], а вершина, соответствующая области, не содержащей элементов неблуждающего множества, оснащается *весом* "+" или "−" в зависимости от взаимной ориентации предельных циклов в областях, прилегающих к рассматриваемой области. Далее, рёбра, инцидентные вершине, соответствующей области с седловыми точками, оснащаются специальными ориентированными циклами четырёхцветного мультиграфа, с помощью которых сможем потом распознать ориентации предельных циклов потока (см. Рисунок 0.1).

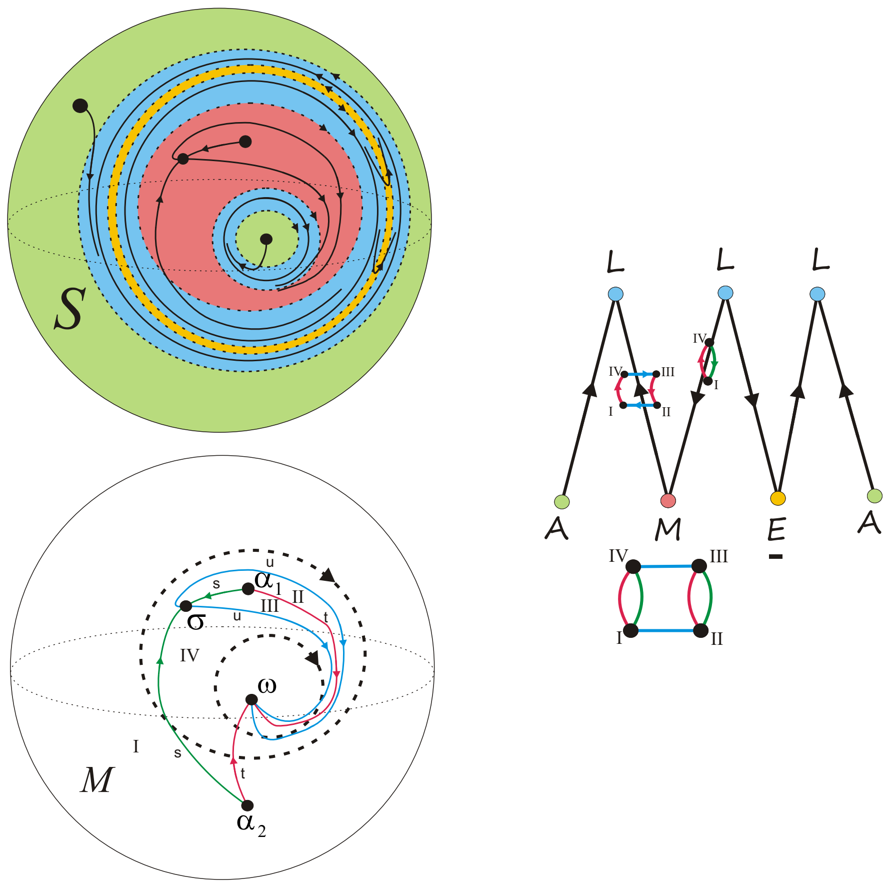

Рис. 0.1. Построение граф омега-устойчивого потока

Теорема 1. *Класс изоморфности оснащенного графа омега-устойчивого потока является полным топологическим инвариантом. Каждый класса изоморфности допустимого оснащенного графа реализуется омега-устойчивым потоком на поверхности.*

Принято считать, что алгоритм решения задачи распознавания изоморфности графов (в каком-нибудь классе графов) является эффективным, если время его работы ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. Такое определение эффективной разрешимости восходит к А. Кобхэму [3]. Стандартом труднорешаемости является NP-полнота задачи [4]. Сложностной статус задачи распознавания изоморфизма графов не известен до сих пор, т.е. в классе всех графов для этой задачи не доказана ни полиномиальная разрешимость, ни

NP-полнота. А.А. Ошемков и В.В. Шарко [9] описали алгоритм распознавания изоморфности графов потоков Морса-Смейла, который, однако, не является эффективным, то есть время его работы не ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. Вместе с тем, многоцветные графы не являются графами общего вида, поскольку они вложимы в несущую поверхность, на которой заданы соответствующие им омега-устойчивые потоки. Используя этот факт, для омега-устойчивых потоков удалось построить эффективный алгоритм.

Теорема 2. *Изоморфизм оснащённых графов омега-устойчивых потоков может быть распознан за полиномиальное время. Ориентируемость несущей поверхности может быть проверена за линейное время и эйлерова характеристика поверхности может быть вычислена за квадратичное время.*

Благодарности. Результаты были получены в соавторстве с В.Е. Кругловым и Д.С. Малышевым при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01041).

Литература

[1] Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы / Андронов А.А., Понтрягин Л.С. // Доклады Академии наук СССР. —1937. —Т. 14, № 5. —С. 247–250.

[2] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Е. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности / Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Е. // УМН. —1990. —Т. 45, № 2(272). —С. 49–77.

[3] Cobham A. The intrinsic computational difficulty of functions // Proceedings of the 1964 international congress for logic, methodology, and philosophy of science, North-Holland, Amsterdam. 1964. P. 24-30.

[4] Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир. 1982.

[5] Леонтович Е.А., Майер А.Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории / Леонтович Е.А., Майер А.Г. // Докл. Акад. АН СССР. —1937. —Т. 14, № 5. —С. 251–257.

[6] Леонтович Е.А., Майер А.Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории / Леонтович Е.А., Майер А.Г. // Докл. Акад. АН СССР. —1955. —Т. 103, № 4. —С. 557–560.

[7] Майер А.Г. Грубые преобразования окружности / Майер А.Г. // Уч. Зап. ГГУ. Горький, публикации. ГГУ —1939. —Т. 12. —С. 215–229.

[8] Neumann D., O'Brien T. Global structure of continuous flows on 2-manifolds / Neumann D., O'Brien T. // J. Diff. Eq. —1976. —V. 22, № 1. —P. 89–110.

[9] Ошемков А.А., Шарко В.В. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях / Ошемков А.А., Шарко В.В. // Математический сборник. —1998. —Т. 189, № 8. —С. 93–140.

[10] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds / Peixoto M. // Topology —1962. —V. 1, № 2. —P. 101–120.

[11] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks) / Peixoto M. // Topology —1963. —V. 2, № 2. —P. 179–180.

[12] Peixoto M. On the classification of flows on two manifolds / Peixoto M. // Dynamical systems Proc. —1971.