Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум

В. Маркітан
(Інститут математики НАН України)
E-mail: v.p.markitan@npu.edu.ua

М. Працьовитий
(НПУ імені М.П.Драгоманова, Інститут математики НАН України)
E-mail: prats4444@gmail.com

Геометричні засоби допомагають вивчати збіжні та розбіжні числові ряди, їх швидкість збіжності і "розподіл"сум підрядів на числовій прямій. А це дозволяє властивості рядів інтепретувати у тополого-метричних термінах, , а також в термінах теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу). Початком досліджень в галузі геометрії числових рядів є робота Какея [1]. З цих пір теорія суттєво збагатилась і сьогодні магістральними напрямами її розвитку слід вважати:

1) пошук критеріїв ніде не щільності, нуль-мірності та канторвальності [4];

2) встановлення фрактальних характеристик множин підсум абсолютно збіжних рядів [2, 5];

3) вивчення властивостей арифметичних сум (скінченних та нескінченних) числових множин [2], а також

4) знаходження застосувань тополого-метричних властивостей рядів і теорії розподілів випадкових величин (нескінченні згортки Бернуллі) та ймовірнісній теорії чисел [4].

Означення 1. *Неповною сумою (підсумою)* заданого збіжного числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \ . \tag{1}$$

залежною від множини $M \subset \mathbb{N}$, називається число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varepsilon_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad n \in M, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \notin M. \end{cases}$$

Означення 2. *Множиною (всіх) неповних сум (множиною підсум)* ряду (1) називається множина

$$E(u_n) = \left\{ x : \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \quad (\varepsilon_n) \in A^{\infty}, \quad A = \{0, 1\} \right\}.$$

Добре відомо, що множина неповних сум ряду є континуальною, досконалою множиною одного з наступних топологічних типів:

1) скінченним об'єднанням відрізків;

2) гомеоморфною множині Кантора (додатної або нульової міри Лебега);

3) канторвалом – множиною гомеоморфною множині неповних сум ряду

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + ... \ , \tag{2}$$

яка є специфічним об'єднанням відрізків і ніде не щільної множини. Необхідні і достатні умови належності кожному з двох останніх типів сьогодні невідомі, хоча відомі деякі достатні умови. Для окремих вузьких класів рядів критерії також є відомими.

Зауважимо, що ряд (2) є результатом додавання двох рядів, які є сумами всіх членів нескінченно спадних геометричних прогресій. Їх множини неповних сум просто виражаються у термінах четвіркового зображення чисел, а саме:

$$E'\left(\frac{3}{4^n}\right)=\{x: x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{4^n}\equiv\Delta^4_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n\in\{0,3\}\},$$

$$E''\left(\frac{2}{4^n}\right)=\{x: x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{4^n}\equiv\Delta^4_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n\in\{0,2\}\}.$$

Для арифметичної суми цих множин виконується рівність

$$E'\left(\frac{3}{4^n}\right)\oplus E''\left(\frac{2}{4^n}\right)=E\left(\frac{3}{4^{2k-1}}+\frac{2}{4^{2k}}\right).$$

Об'єктом нашого розгляду є структурні та тополого-метричні властивості множини неповних сум ряду (2) і розподілу випадкової величини

$$\xi=\frac{3\eta_1}{4}+\frac{2\eta_2}{4}+\frac{3\eta_3}{4^2}+\frac{2\eta_4}{4^2}+\ldots+\frac{3\eta_{2k-1}}{4^k}+\frac{2\eta_{2k}}{4^k}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_n}{4^k}, \tag{3}$$

де (η_k) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p'_{0k} та p'_{1k} відповідно. Тоді (τ_k) – послідовність випадкових величин, які набувають значень 0, 2, 3, 5 відповідно з ймовірностями:

$$p_{0k}=p'_{0,2k-1}\cdot p'_{0,2k},\quad p_{2k}=p'_{0,2k-1}\cdot p'_{1,2k},\quad p_{3k}=p'_{1,2k-1}\cdot p'_{0,2k},\quad p_{5k}=p'_{1,2k-1}\cdot p'_{1,2k}.$$

Зауважимо, що розподіл випадкової величини ξ належить до класу нескінченних згорток Бернуллі, вивчення яких ведеться більше ста років і чимало проблем, з ними пов'язаних, до цих пір чекають на своє вирішення [4].

Зауважимо також, що випадкова величина ξ за формою є випадковою величною, представленою четвірковим розкладом (в четвірковій системі числення) з нестандартним набором цифр $\{0,2,3,5\}\equiv A^*$, які є незалежними випадковими величинами.

Симетрії алфавіту A^* в значній мірі індукують структурні властивості спектра S_ξ (множини точок росту функції розподілу F_ξ, що рівносильно мінімального замкненого носія розподілу).

Пропонуються результати дослідження лебегівської структури розподілу випадкової величини ξ (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярно неперервної компонент); автомодельних властивостей спектра розподілу; поведінки модуля характеристичної функції, тобто значення

$$L_\xi=\lim_{|t|\to\infty}\sup|f_\xi(t)|,\quad \text{де}\quad f_\xi(t)=Me^{it\xi}=\prod_{n=1}^{\infty}(p_{0n}+p_{2n}e^{\frac{it2}{4^n}}+p_{3n}e^{\frac{it3}{4^n}}+p_{5n}e^{\frac{it5}{4^n}});$$

автозгорток розподілу тощо.

Теорема 3. *Розподіл випадкової величини ξ має чистий лебегівський тип, причому є*

1) чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли

$$M=\prod_{n=1}^{\infty}\max_{i\in A^*}\{p_{in}\}>0; \tag{4}$$

2) чисто сингулярним, якщо $M=0$ і $p_{2n}\cdot p_{3n}=0\quad\forall n\in\mathbb{N}$;

3) абсолютно неперервним, якщо $p_{0n}=p_{2n}=p_{3n}=p_{5n}=\frac{1}{4}\quad\forall n\in\mathbb{N}$.

Крім вказаних об'єктів дослідження у доповіді розглядається інші числові ряди, що володіють певними властивостями однорідності, їх множини неповних сум та розподіли випадкових підсум незалежними доданками або ж такими, що мають марковську залежність.

Література

[1] *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series // Tôhoku Sci Rep. — 1914. — **3**, no. 4. — P. 159–164.

[2] *Pratsiovytyi M.V., Kovalenko V.M.* Probability measures on fractal curves (probability distributions on Vicsek fractal) // Random Operators and Stochastic equations, 2015; **23(3)**. – P. 161 – 168.

[3] *Працьовитий М.В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2012. — 68с.

[4] *Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2014. — **91**. — С. 133–142.

[5] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296с.