Двоточкова нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними над полем p-адичних чисел

Антон Кузь
(Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України)
E-mail: `kuz.anton87@gmail.com`

Одним із важливих напрямків сучасної теорії крайових задач для рівнянь із частиними похідними, який активно розвивається упродовж останніх десятиліть, є вивчення властивостей розв'язків таких задач із p-адичними змінними. Мотивацією до розв'язування крайових (в тому числі нелокальних) задач для рівнянь та систем рівнянь із частиними похідними над неархімедовим полем p-адичних чисел, що є поповненням поля раціональних чисел за p-адичною нормою, є стрімких розвиток p-адичної математичної фізики, зокрема дослідження p-адичних моделей квантової механіки, теорії гравітації тощо [1, 2, 4]. Основою цього альтернативного розділу математичної фізики слугує ідея В.С.Владімірова та І.В.Воловіча [1], що на планківських відстанях структура простору-часу повинна описуватися неархімедовим полем p-адичних чисел.

Нехай p – просте число, $\mathbb{Q}_p$ – поповнення [3] поля раціональних чисел за p-адичною нормою $|\cdot|_p$; $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$, $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} (d/dx)^k e^{-x^2}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – поліноми Ерміта; $L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)$, $w(x) = e^{-x^2}$, – простір усіх рядів $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k H_k(x)$, для яких $\lim\limits_{k\to\infty} |f_k|_p \sqrt{|k!2^k|_p} = 0$; $\mathcal{A}(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))$ – простір усіх рядів $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) H_k(x)$, де $u_k(t)$, $k \geq 0$, – аналітичні функції на $\mathbb{Z}_p$, для яких $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{t\in\mathbb{Z}_p} |u_k(t)|_p \sqrt{|k!2^k|_p} = 0$; норми в просторах $L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)$ та $\mathcal{A}(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))$ визначаються рівностями [4]

$$\|f; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)\| = \max_k |f_k|_p \sqrt{|k!2^k|_p},$$

$$\|u; \mathcal{A}(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))\| = \max_k \max_{t\in\mathbb{Z}_p} |u_k(t)|_p \sqrt{|k!2^k|_p}.$$

$\overline{L}_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)$ – простір вектор-функції $\vec{v} = \mathrm{col}(v^1, v^2)$ таких, що $v^j \in L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))$, для кожного $j = 1, 2$, із нормою $\|v; \overline{L}_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)\| = \max_j \|v^j; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)\|$. Простір $A(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))$ означуємо аналогічним чином.

У даній роботі розглядаємо таку двоточкову нелокальну задачу

$$\frac{\partial^2 \vec{u}(t,x)}{\partial t^2} + \mathbf{B}_1 A(\partial/\partial x) \frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} + \mathbf{B}_2 A^2(\partial/\partial x) \vec{u}(t,x) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}_p, \quad x \in \mathbb{Q}_p, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{j-1} \vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^{j-1} \vec{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T} = \vec{\varphi}_j(x), \quad j = 1, 2, \tag{2}$$

де $\vec{u}(t,x) = \mathrm{col}(u^1(t,x), u^2(t,x))$ $a_1, \ldots, a_n, \mu \in \mathbb{Q}_p$, $A(\partial/\partial x) = -\partial^2/(\partial x^2) + 2x\partial/\partial x$, $T \in \mathbb{Z}_p$, $T \neq 0$, $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ – квадратні матриці з p-адичними елементами.

Встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі (1), (2) в просторі $A(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))$, який неперервно залежить від функцій $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2 \in \overline{L}_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)$.

Література

[1] Владимиров В.С.,Волович И.В., Зеленов Е.И. *p-адический анализ и математическая физика.* Москва: Физматлит, 1994.

[2] Горбачук М.Л., Горбачук В.И. О задаче Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве над полем p-адических чисел. *Тр. МИАН*, 245: 99–106, 2004.

[3] Коблиц Н. *p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции.* Москва: Мир, 1982.

[4] Хренников А. Ю. Математические методы неархимедовой физики. *УМН*, 45(4): 79–110, 1990.