# Нижняя оценка для объёма образа шара

**Клищук Богдан**
(Институт математики НАН Украины)
*E-mail:* kban1988@gmail.com

**Салимов Руслан**
(Институт математики НАН Украины)
*E-mail:* ruslan.salimov1@gmail.com

Пусть задано семейство $\Gamma$ кривых $\gamma$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

Борелевскую функцию $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называют *допустимой* для $\Gamma$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \ \geqslant\ 1$$

для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$.

Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда *$p$–модулем* семейства $\Gamma$ называется величина

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) \ = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Здесь $m$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для произвольных множеств $E$, $F$ и $G$ в $\mathbb{R}^n$, через $\Delta(E, F, G)$ обозначим семейство всех непрерывных кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют $E$ и $F$ в $G$, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Пусть $D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$ и $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Положим

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,,$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n :\, |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля в точке $x_0 \in D$, если соотношение

$$\mathcal{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \ \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)$$

выполнено для любого кольца $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1\,.$$

**Теорема 1.** *Пусть $D$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to \mathbb{R}^n$ — кольцевой $Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля в точке $x_0 \in D$ при $p > n$. Предположим, что функция $Q$ удовлетворяет условию*

$$q_{x_0}(t) \leqslant q_0\, t^{-\alpha},\ q_0 \in (0, \infty)\,,\ \alpha \in [0, \infty)\,,$$

*для* $x_0 \in D$ *и п.в. всех* $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$. *Тогда при всех* $r \in (0, d_0)$ *имеет место оценка*

$$m(fB(x_0,r)) \geqslant \Omega_n \left(\frac{p-n}{\alpha+p-n}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}}\, r^{\frac{n(\alpha+p-n)}{p-n}}\,,$$

*где* $B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| \leqslant r\}$, $q_{x_0}(t) = \frac{1}{\omega_{n-1}\, r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\, d\mathcal{A}$ — *среднее интегральное значение по сфере* $S(x_0,t) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| = t\}$, $\Omega_n$ — *объём единичного шара в* $\mathbb{R}^n$, $\omega_{n-1}$ — *площадь единичной сферы* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$, $d\mathcal{A}$ — *элемент площади поверхности.*