Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі

Хомич Юлія
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)
E-mail: khomych.yuliia@gmail.com

Піструіл Маргарита
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)
E-mail: margaret.pistruil@gmail.com

Поверхня Гауді широко застосовується в сучасній архітектурі. Надзвичайно важливо визначити можливості її неперервного деформування за умови тих чи інших обмежень. В роботах [1], [2] доведено існування нетривіальних нескінченно малих згинань та встановлено їх довільність. У цій роботі для поверхні Гауді досліджується більш широкий клас нескінченно малих деформацій, а саме таких, при яких варіація елемента площі $\delta d\sigma$ є заданою функцією. Такі деформації називаються квазіареальними [3]. Запропоновано варіант математичної моделі зазначеної деформації для поверхні Гауді, за допомогою якої знайдено її поля зміщення квазіареальної деформації та встановлено деякі властивості. Поверхня Гауді допускає ареальну нескінченно малу деформацію, при якій існує дійсна ортогональна сітка ліній стаціонарної довжини.

Припустимо, що векторно-параметричне рівняння поверхні Гауді задано у вигляді:

$$S : \overline{r}(x^1, x^2) = \{x, y, mx \sin \frac{y}{a}\}, \tag{1}$$

де a і m – довільні відмінні від нуля константи, $x \neq 0, \frac{y}{a} \neq \pi n, n \in Z$. Наведемо деякі її диференціально-геометричні характеристики:

$$g_{11} = 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a};\ g_{12} = \frac{1}{2a} m^2 x \sin \frac{2y}{a};\ g_{22} = 1 + \frac{1}{a^2} m^2 x^2 \cos^2 \frac{y}{a};$$

$$g^{11} = \frac{1}{a^2 g}\left(a^2 + m^2 x^2 \cos^2 \frac{y}{a}\right);\ g^{12} = -\frac{1}{2ag} m^2 x \sin \frac{2y}{a};$$

$$g^{22} = \frac{1}{g}\left(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a}\right);\ g = 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + \frac{1}{a^2} m^2 x^2 \cos^2 \frac{y}{a};$$

$$K = -\frac{m^2}{a^2 g^2} \cos^2 \frac{y}{a};\ 2H = -\frac{mx \sin \frac{y}{a}}{a^2 g \sqrt{g}}\left(2 + m^2 \cos^2 \frac{y}{a}\right).$$

Варіація елемента площі $\delta d\sigma$ виражається через перший тензор деформації $2\varepsilon_{ij} = \delta g_{ij}$:

$$\delta d\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} d\sigma$$

при нескінченно малій деформації поверхні

$$\overline{r}^*(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + t\overline{U}(x^1, x^2), \tag{2}$$

де $\overline{U}(x^1, x^2)$ – поле зміщення, $t \longrightarrow 0$. Очевидно, величину $\delta d\sigma$ можна вважати заданою тоді і лише тоді, коли є заданою функція $\varphi(x^1, x^2) \in C^1$ точки поверхні, яка задовольняє умову

$$\varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 2\varphi.$$

Поле зміщення $\overline{U}$ розкладемо через вектори $\overline{r}_\alpha = \dfrac{\partial \overline{r}}{\partial x^\alpha}$, $\overline{n}$:

$$\overline{U} = U^\alpha \overline{r}_\alpha + U^\circ \overline{n}, \tag{3}$$

де U^α – деяке поле контраваріантного вектора на S, а U° – поле інваріанта.

Теорема 1. *Нескінченно мала деформація поверхні Гауді є квазіареальною тоді і лише тоді, коли компоненти поля зміщення та функція φ класу C^1 задовольняють диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial U^1}{\partial x}+\frac{\partial U^2}{\partial y}+\frac{1}{ga^2}m^2x\cos^2\frac{y}{a}U^1+\frac{1}{2a^3g}m^2(a^2-x^2)\sin\frac{2y}{a}U^2+ \tag{4}$$

$$+\frac{1}{a^2g\sqrt{g}}mx(2+m^2\cos^2\frac{y}{a})\sin\frac{y}{a}U^\circ=2\varphi.$$

Теорема 2. *Поверхня Гауді ($a=m=1$) допускає нескінченно малу деформацію з заданою варіацією елемента площі. При цьому поле зміщення через довільну функцію $\varphi\in C^1$ виражається явно:*

$$\overline{U}(x,y)=\{\frac{-\varphi g}{2x(2+\cos^2 y)},\ \frac{-\varphi g\sqrt{g}\operatorname{ctg}y-2\cos^2 y-4}{2\sqrt{g}(2+\cos^2 y)},\ \frac{\varphi g\sqrt{g}-x^2(2+\cos^2 y)\sin 2y}{2x\sqrt{g}(2+\cos^2 y)\sin y}\}.$$

За умови $\varphi=0$ нескінченно мала квазіареальна деформація є ареальною. Вона зберігає елемент площі поверхні.

Теорема 3. *Поверхня Гауді ($a=m=1$) допускає ареальну нескінченно малу деформацію з полем зміщення*

$$\overline{U}(x,y)=\{0,\ \frac{-1}{\sqrt{g}},\ \frac{-x\cos y}{\sqrt{g}}\}. \tag{5}$$

Теорема 4. *При ареальній нескінченно малій деформації з полем зміщення (5) на поверхні Гауді існує дійсна ортогональна сітка ліній стаціонарної довжини, диференціальне рівняння якої має вигляд:*

$$(1+\sin^2 y)\cos y dx^2-x(1+\sin^2 y)\sin y dxdy-(1+x^2)\cos y dy^2=0.$$

Література

[1] L. S. Velimirovic, M. D. Cvetkovic *Gaudi surfaces and curvature based functional variations*// Applied Mathematics and Computation, №228, P. 377-383, (2014).

[2] L. S. Velimirovic, M. D. Cvetkovic, M. S. Ciric, N. Velimirovic. *Analysis of Gaudi surfaces at small deformations*// Applied Mathematics and Computation, №218(13), P. 6999-7004, (2012).

[3] Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич. *Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3*// Proc. Intern. Geom. Center, №7(2), С. 6-19, (2014).