Псевдо-вайсманові многовиди та їх приклади

Є. В. Черевко
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: cherevko@usa.com

О. Є. Чепурна
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: chepurna67@gmail.com

Псевдовайсманові многовиди (pseudo-Vaisman manifolds) – це такі ЛКК-многовиди, форма Лі яких задовільняє умові [1]:

$$\Phi_4(\nabla_X \omega(Y)) = \frac{||\omega||^2}{2} g(X,Y). \tag{1}$$

де Φ_4 – четвертий проекційний оператор Обати:

$$\Phi_4(\omega_{i,j}) = \frac{1}{2}(\delta_i^a \delta_j^b + J_i^a J_j^b)\omega_{a,b},$$

Умову (1) можна підсилити, а саме, вимагати

$$\nabla\omega(X,Y) = \frac{||\omega||^2}{2} g(X,Y) \tag{2}$$

ЛКК-многовиди, для яких виконується умова (2) матимуть назву *сильно псевдовайсманові многовиди (strong pseudo-Vaisman manifolds)*. Наведемо приклади таких многовидів.

Приклад 1. На добутку $E \times \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{m-1}$, де $E = \{z^1 = x^1 + iy^1 \in \mathbb{C} : z^1 \cdot \overline{z}^1 > 1\}$ можна задати конформно-келерову метрику таким чином

$$g = \frac{1}{ln(z^1 \cdot \overline{z}^1)} \delta_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes d\overline{z}^\beta. \tag{3}$$

Відповідно, фундаментальна форма:

$$\Omega = -\sqrt{-1}\frac{1}{ln(z^1 \cdot \overline{z}^1)} \delta_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta, \tag{4}$$

та форма Лі:

$$\omega = -\frac{(z^1)^{-1}dz^1 + (\overline{z}^1)^{-1}d\overline{z}^1}{ln(z^1 \cdot \overline{z}^1)}.$$

У (3) та (4) $\alpha, \beta = \overline{1, m}$, m – комплексна розмірність многовиду. Відмінні від нуля коефіцієнти зв'язності, що є узгодженою з метрикою (4).

Приклад 2. Розглянемо добуток $H \times \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{m-1}$, де H є правою півплощиною площини комплексних чисел $H = \{z^1 = x^1 + iy^1 \in \mathbb{C} : x^1 > 0\}$. Метрика

$$g = \frac{2}{z^1 + \overline{z}^1} \delta_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes d\overline{z}^\beta; \quad \alpha, \beta = \overline{1, m}.$$

на многовиді $M^n = H \times \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{m-1}$, $(n = 2m)$ є конформно-келеровою. Фундаментальна форма матиме вигляд

$$\Omega = -\sqrt{-1}\frac{2}{z^1+\overline{z}^1}\delta_{\alpha\beta}dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta; \quad \alpha, \beta = \overline{1, m}.$$

А форма Лі

$$\omega = -\frac{dz^1 + d\overline{z}^1}{z^1+\overline{z}^1}$$

У дійсних координатах метрика виглядатиме таким чином:

$$g_{ij} = \frac{1}{x^1}\delta_{ij}, \tag{5}$$

а форма Лі, відповідно

$$\omega = -\frac{dx^1}{x^1}.$$

Цей многовид є псевдо-вайсмановим многовидом з посиленою умовою.

Для наведених ЛКК-метрик обчислені узгоджені з ними коефіцієнти зв'язності, та компоненти тензорів Рімана та Річчі.

Література

[1] Cherevko Y., Chepurna O. Complex and Real Hypersurfaces of Locally Conformal Kähler Manifolds.*Proceedings of the Eighteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*, Sofia: Avangard Prima, 2017, p. 117 - 129.