

Об изотопности некоторых функций

Бондарь О. П.

(ЛА НАУ, Кропивницкий)

E-mail: bondarkla@ukr.net

В.В.Шарко, [1], определил и использовал для изучения свойств многообразий изотопные функции Морса — функции, соединяемые гладким путем в пространстве функций Морса. Обобщением их есть изотопные функции, определенные, [2], так:

Определение 1. Функции f_0 и f_1 на многообразии M называются изотопными (C^r -изотопными или непрерывно изотопными или изотопными функциями Морса), если существуют такая неподвижная на X изотопия $H : (M, X) \times I \rightarrow (M, X) \times I$ и изотопия $h : [0, 1] \times I \rightarrow [0, 1] \times I$, $H_t \in Iso_0(M, X)$ и $h_t \in Iso_0^+([0, 1])$, что для всех $t \in [0, 1]$ $f_t = h_t \circ f_0 \circ H_t^{-1}$ - функции одинакового вида (C^r -гладкие или непрерывные или функции Морса).

В [3] была показана изотопность функций леммы Морса. Следующие два утверждения, важные для классификации отображений многообразий, несложно получить непосредственно из теории Морса.

Предложение 2. Пусть $f_0 : R^n \rightarrow R$ - гладкая функция в окрестности U_0 регулярной точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ этой функции и $(\partial f_0 / \partial x^i)(x_0) \neq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда можно указать координатную форму изотопии $H : U_0 \times [0, 1] \rightarrow U_1 \times [0, 1]$ окрестности U_0 точки x_0 на некоторую окрестность U_1 начала координат пространства R^n , такую, что дифференцируемые отображения $H_t \subset Iso_0(U_1)$, $H_0 = id_{U_1}$, $t \in [0, 1]$, и для всех точек $y = (y^1, \dots, y^n) \in U_1$, для которых $y^i(x_0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, функция

$$f_1 = s^1 y_1^1 + \dots + s^n y_1^n, \text{ где}$$

$s^i = \text{sign}((\partial f_0 / \partial x^i)(0))$, $i = 1, \dots, n$, будет правоизотопной функции $f_0 : f_1 = f_0 \circ H_1^{-1}$, то есть существует такое локальное изотопное преобразование системы координат, что функция f_0 будет дифференцируемо изотопна функции f_1 .

Предложение 3. Пусть $f_0 : R \rightarrow R$ - гладкая функция в окрестности U_0 нуля, для которой функция и ее производные $f_0(0) = f_0'(0) = \dots = f_0^{(k-1)}(0) = 0$, но $f_0^{(k)}(0) \neq 0$.

Тогда можно указать координатную форму изотопии $H : U_0 \times [0, 1] \rightarrow U_1 \times [0, 1]$, окрестности U_0 нуля на, возможно, меньшую его окрестность U_1 такую, что дифференцируемые отображения $H_t \subset Iso_0^+(U_1)$, $H_0 = id_{U_1}$, $t \in [0, 1]$, и для всех точек $y \in U_1$, для которых $y(0) = 0$, функция

$$f_1 = \text{sign} f_0^{(k)}(0) y^k$$

будет правоизотопной функции f_0 .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. В. Шарко. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). — Киев: Наук. думка, 1990.
- [2] О.П.Бондарь. Об определении изотопных функций // Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2015" С.67.
- [3] О.П.Бондар. Про изотопність функцій леми Морса // Algebraic and geometric methods of analysis, Odessa, 2017. https://www.imath.kiev.ua/topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf P.4.