

International scientific conference
**«Algebraic and geometric
methods of analysis»**

Book of abstracts



May 30 - June 4, 2018,
Odesa,
Ukraine

<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018>

LIST OF TOPICS

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences
- History and methodology of teaching in mathematics

ORGANIZERS

- The Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- The International Geometry Center

PROGRAM COMMITTEE

Chairman: Prishlyak A. (<i>Kyiv, Ukraine</i>)	Kirillov V. (<i>Odesa, Ukraine</i>)	Polulyakh E. (<i>Kyiv, Ukraine</i>)
Balan V. (<i>Bucharest, Romania</i>)	Konovenko N. (<i>Odesa, Ukraine</i>)	Sabitov I. (<i>Moscow, Russia</i>)
Banakh T. (<i>Lviv, Ukraine</i>)	Maksymenko S. (<i>Kyiv, Ukraine</i>)	Savchenko A. (<i>Kherson, Ukraine</i>)
Fedchenko Yu. (<i>Odesa, Ukraine</i>)	Matsumoto K. (<i>Yamagata, Japan</i>)	Sergeeva A. (<i>Odesa, Ukraine</i>)
Fomenko A. (<i>Moscow, Russia</i>)	Mykytyuk I. (<i>Lviv, Ukraine</i>)	Strikha M. (<i>Kyiv, Ukraine</i>)
Fomenko V. (<i>Taganrog, Russia</i>)	Mikesh J. (<i>Olomouc, Czech Republic</i>)	Shvets V. (<i>Odesa, Ukraine</i>)
Glushkov A. (<i>Odesa, Ukraine</i>)	Mormul P. (<i>Warsaw, Poland</i>)	Shelekhov A. (<i>Tver, Russia</i>)
Haddad M. (<i>Wadi al-Nasara, Syria</i>)	Moskaliuk S. (<i>Wien, Austria</i>)	Shurygin V. (<i>Kazan, Russia</i>)
Herega A. (<i>Odesa, Ukraine</i>)	Panzhenskiy V. (<i>Penza, Russia</i>)	Vlasenko I. (<i>Kyiv, Ukraine</i>)
Khruslov E. (<i>Kharkiv, Ukraine</i>)	Pastur L. (<i>Kharkiv, Ukraine</i>)	Volkov V. (<i>Odesa, Ukraine</i>)
Kirichenko V. (<i>Moscow, Russia</i>)	Plachta L. (<i>Krakov, Poland</i>)	Zadorozhnyj V. (<i>Odesa, Ukraine</i>)
	Pokas S. (<i>Odesa, Ukraine</i>)	Zarichniy M. (<i>Lviv, Ukraine</i>)

ADMINISTRATIVE COMMITTEE

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Kotlik S., Director of the P.M. Platonov Educational-scientific institute of computer systems and technologies “Industry 4.0”;
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

ORGANIZING COMMITTEE

Kirillov V.
Konovenko N.
Fedchenko Yu.

Hladysh B.
Osadchuk E.

Maksymenko S.
Khudenko N.
Cherevko E.

Secondary school students' misconceptions about linear algebra

Nilgun Aygor

(Department of Mathematics, Yildiz Technical University)

E-mail: nilgunaygor@gmail.com

Hulya Burhanzade

(Department of Mathematics, Yildiz Technical University)

E-mail: hulyaburhanzade@hotmail.com

ABSTRACT

In this study, the difficulties that students have experienced in learning linear algebra, an abstract scientific discipline of mathematics, have been researched. These difficulties, which started in secondary education, are also reflected in the university. It was investigated where troubles originate and what needs to be done to reduce them, in order to prevent these difficulties. For this purpose, an answer was sought in the question "Misconceptions and proposed of solutions in linear algebra at secondary education level". This research was conducted on 43 students studying at a secondary school. The students were asked six questions in total: five written and one oral. The collected data were analysed by researchers jointly. It has been revealed where the students made misconceptions. Some suggestions have been made to minimize these misconceptions. It was determined that the students made less misconceptions, when the concepts were explained. Findings and results will be shared detailed in the presentation.

REFERENCES

- [1] Dede Y., Peker M. Ogrenciler' in Cebir'e Yonelik Hata ve Yanlis Anlamalari: Matematik Ogretmen Adaylarinin Tahmin Becerileri ve Cozum Onerileri, XIII. Ulusal Egitim Bilimleri Kurultayi, Inonu Universitesi Egitim Fakultesi, 2004.
- [2] Dorier J. L., Sierpinska A. Research into the teaching and learning of linear algebra, In D. Holton (Eds.), The teaching and learning of mathematics at university level, An ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [3] Dorier J.L. Teaching Linear Algebra at University, In the Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 3(1-3), 875-884, 2002.
- [4] Goris T., Dyrenfurth M. Students' Misconceptions in Science, Technology, and Engineering (Online) Available: http://ilin.asee.org/Conference2010/Papers/A1_Goris_Fyrenfurth.pdf, 2009.
- [5] Sierpinska A. The diachronic dimension in research on understanding in mathematics- usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle, Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1996.
- [6] Sierpinska A. On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J-L. Dorier (Eds.), On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

Semitopological graph inverse semigroups

Serhii Bardyla

(Ivan Franko National University of Lviv)

E-mail: sbardyla@yahoo.com

Halyna Kvasnytsia

(Ivan Franko National University of Lviv)

E-mail: halyna.kvasnytsya@lnu.edu.ua

We investigate locally compact semitopological graph inverse semigroups and obtain the following result:

Theorem 1. *Let E be a strongly connected directed graph which contains a finite amount of vertices. Then a Hausdorff locally compact semitopological graph inverse semigroup $G(E)$ over graph E is either compact or discrete.*

The above result generalizes results of Gutik [2] and Bardyla [1] who proved the above dichotomy for locally compact semitopological polycyclic monoids \mathcal{P}_1 and \mathcal{P}_λ , respectively.

The following theorem characterizes graph inverse semigroup which admit compact Hausdorff semigroup topology.

Theorem 2. *Let $G(E)$ be a compact semitopological semigroup. Then the following conditions are equivalent:*

- (1) $G(E)$ is a topological inverse semigroup;
- (1) the set $I_e = \{u \in \text{Path}(E) \mid r(u) = e\}$ is finite for each vertex e ;
- (1) each \mathcal{D} -class is finite in $G(E)$;
- (1) $G(E)$ does not contain isomorphic copies of the bicyclic monoid and an infinite semigroup of $X \times X$ -matrix units.

Also we construct (in canonical way) the coarsest Hausdorff inverse semigroup topology τ_{\min} on each graph inverse semigroup $G(E)$. Moreover, the following theorem holds:

Theorem 3. *For each directed graph E topological semigroup $(G(E), \tau_{\min})$ embeds into the polycyclic monoid $(\mathcal{P}_{|G(E)|}, \tau_{\min})$.*

REFERENCES

- [1] Serhii Bardyla. Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids. *Math. Bulletin of the Shevchenko Scientific Society*, 13 : 21–28, 2016.
- [2] Oleh Gutik. On the dichotomy of the locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 80 : 33–41, 2015.

On inequalities of generalized elliptic integrals

Barkat Ali Bhayo

(Department of mathematics, Sukkur IBA University, Pakistan)

E-mail: barkat.bhayo@iba-suk.edu.pk

As an application of the eigenfunctions \sin_p , $1 < p < \infty$ of so-called one-dimensional p -Laplacian [3], we introduce new generalized elliptic integrals K_p , E_p of the first and the second kind, respectively, and establish two-sided inequalities. As well as, we estimate above and below the perimeter $P = \int_0^{\pi_p/2} \sqrt[p]{1 - r^p \sin_p(t)^p} dt = 4aE_p(r)$ of generalized p -ellipse whose parametric equations are $x = a(1 - \sin_p(t)^p)^{1/p}$ and $y = b \sin_p(t)$ for $0 < t < 2\pi_p = 4\text{arcsin}_p(1)$.

REFERENCES

- [1] B.A. BHAYO AND M. VUORINEN: On generalized trigonometric functions with two parameters. *J. Approx. Theory* Vol. 164, 10(2012), 1415–1426.
- [2] B.A. BHAYO AND L. YIN: On generalized (p, q) -elliptic integrals. <http://arxiv.org/abs/1507.00031>.
- [3] P. DRÁBEK AND R. MANÁSEVICH: On the closed solution to some p -Laplacian nonhomogeneous eigenvalue problems. *Diff. and Int. Eqns.* 12 (1999), 723–740.

A criss-cross model of tuberculosis for heterogenous population

Mariusz Bodzioch

(Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Warmia and Mazury in Olsztyn,
Poland)

E-mail: mariusz.bodzioch@matman.uwm.edu.pl

Marcin Choiński

(Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, University of Warsaw, Poland)

E-mail: m.choinski@mimuw.edu.pl

Urszula Foryś

(Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, University of Warsaw, Poland)

E-mail: urszula@mimuw.edu.pl

Currently, tuberculosis (TB) is the second, after AIDS, the most common reason of deaths in the world. The World Health Organization estimates that one-third of the whole world's population is currently infected (reservoir of the infection). In 2017 the World Health Organization (WHO) reported 1.4 million deaths related to TB and 10.4 million incident cases worldwide. For any infectious disease we can distinguish three most important parameters defining the epidemiology of the disease: (i) the lifetime risks, (ii) the incubation period, (iii) the serial interval reflecting how fast a given person is likely to infect others. For TB, the derivation of these measures is complicated, as clinical disease may follow the initial infection soon or many years later, either through exogenous reinfection or after endogenous reactivation. Unfortunately, neither the incubation period nor the lifetime risk of TB have been measured directly. It is assumed that the lifetime risk of developing clinical TB following the infection is approximately 10%. It is also known that homelessness increases the risk of contracting TB by several times. Because of that, this problem should be considered at all possible levels.

The first models describing the dynamics of TB epidemics were proposed in the 1960s. Studies of epidemic models that incorporate disease causing death and varying total population have become one of the important areas in the mathematical theory of epidemics. Since the mid-1990s they have been used extensively to describe the epidemiology of the disease, to evaluate the impact of cost-effectiveness of interventions, and to identify strategies for disease control.

The main idea of our work is to subdivide the total population into two subpopulations with varied risk of developing TB and then to build a simple criss-cross model describing the disease dynamics. The community of homeless people is a natural reservoir of TB and the disease may be transmitted from this subpopulation to the general population. Thus, we consider heterogenous population of non-homeless and homeless individuals to better describe and understand the disease dynamics. We have investigated the existence and stability conditions for stationary states of the system. Bifurcations diagrams have been also considered. The model is based on the ideas presented in [1, 2]. In our model, however, the Malthusian properties do not appear.

From the practical point of view, models considered by us can be used to understand the transmission behaviors of the disease and to forecast the disease trends, which can help to implement more preventive interventions in TB control among the “high” risk of developing TB subpopulations.

REFERENCES

- [1] J. Romaszko, A. Siemaszko, M. Bodzioch, A. Buciński, A. Doboszyńska. Active case finding among homeless people as a mean of reducing the incidence of pulmonary tuberculosis in general population. *Advances in Experimental Medicine and Biology*, 911:67–76, 2016.
- [2] M. Choiński, M. Bodzioch, U. Foryś. Analysis of a criss-cross model of tuberculosis for homeless and non-homeless subpopulations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018 (under review).

Foliations with leaves of non-positive curvature and bounded total curvature on closed 3-manifolds

Dmitry V. Bolotov

(B. Verkin ILTPE of NASU, 47 Nauky Ave., Kharkiv, 61103, Ukraine)

E-mail: bolotov@ilt.kharkov.ua

Let (M, g) be a complete non-compact surface equipped with a smooth riemannian metric. The total curvature of M is the improper integral $\int_M K d\mu$ of the Gaussian curvature K with respect to the volume element $d\mu$ of (M, g) . It is said that M admits total curvature if for any compact exhaustion Ω_i of M , the limit

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_i} K d\mu = \int_M K d\mu, \quad (1)$$

exists. In [1] Cohn-Vossen proved that $\int_M K d\mu \leq 2\pi\chi(M)$, where $\chi(M)$ is the Euler characteristic of M . Huber in [2] states that if

$$\int_M K_- < \infty, \quad (2)$$

where $K_- = \max\{-K, 0\}$, then $\int_M K d\mu$ exists and M is homeomorphic to a compact Riemann surface with finitely many punctures, i.e. M has a finite topology. Hartman in [3] under the assumption (2) proved that the area of a geodesic ball of radius r at a fixed point must grow at most quadratically in r . Note also that Li proved in [4] that if M has at most quadratic area growth, finite topology and the Gaussian curvature of M is either non-positive or non-negative near infinity of each end, then M must have finite total curvature.

The following theorem describes a topological structure of riemannian 3-Manifolds admitting codimension one C^2 -foliations \mathcal{F} with leaves which have both non-positive curvature and bounded total curvature in the induced riemannian metric.

Theorem 1. *Let \mathcal{F} be a transversaly orientable C^2 -foliation of a closed orientable riemannian 3-Manifold M . Suppose, that the leaves of \mathcal{F} have non-positive curvature and admit a finite total curvature in the induced riemannian metric. Then the following holds:*

- (1) M is aspherical;
- (2) \mathcal{F} is a foliation almost without holonomy;
- (3) At least one of the following holds:
 - (a) \mathcal{F} is a surface bundle over the circle with the fiber genus $g \geq 1$;
 - (b) M is divided by a finite set of compact surfaces $\{K_i\}$, which are homeomorphic to torus T^2 , into pieces $\{A_j\}$, which are fibered over the circle. This division defines a graph G of fundamental groups $\pi_1(A_j)$ and $\pi_1(K_i)$, where vertexes of G correspond to the $\{A_j\}$ and edges of G correspond to the tori $\{K_i\}$ and the fundamental group $\pi_1(M)$ is isomorphic to a fundamental group of the graph G ;
- (4) \mathcal{F} is a flat foliation (i.e. all leaves of \mathcal{F} are flat) iff M is either torical bundle or torical semi-bundle.

Conversely, let M be such as described in (3) above. Then M admits a riemannian metric and transversaly orientable foliation with leaves of non-positive curvature and finite total curvature in the induced metric.

REFERENCES

- [1] S. Cohn-Vossen *Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen*, Compositio Math. **2** (1935), 69–133.
- [2] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. **32** (1957), 13–72.

- [3] Ph. Hartman, *Geodesic parallel coordinates in the large*, Amer. J. Math. **86** (1964), 705–727.
- [4] P. Li, *Complete surfaces of at most quadratic area growth*, Comment. Math. Helv. **72(1)** (1997), 67–71.

Algebraic and geometric questions about a 6D physics

Enzo Bonacci

(Liceo Scientifico “G.B. Grassi”, Latina, Italy)

E-mail: enzo.bonacci@liceograssilatina.org

The puzzling observation of a whirling plane of satellite galaxies around Centaurus A [5] opens to cosmological hypotheses alternative to the Λ -CDM model, such as the 6D spacetime proposed more than ten years ago ([1, 2, 3]) and reinforced by new data from the Hubble Space Telescope revealing that the universe is expanding faster than expected [6]. Assuming a three-dimensional time, the geometric and algebraic analysis of the temporal distortions around a structureless rotating sphere would lead to an elegant explanation of both the galaxy-scale planar alignment of orbiting bodies (radial time) and the Universe’s increasing expansion rate (angular time). We mean that the effects attributed to two alleged *dark* entities (matter and energy) could find a unitary explanation within the germinal 3T theory [4] we wish to illustrate now.

REFERENCES

- [1] Enzo Bonacci. *General Relativity Extension*. Turin : Carta e Penna, 2006.
- [2] Enzo Bonacci. *Extension of Einstein’s Relativity*, volume 42 of *Physical Sciences*. Rome : Aracne Editrice, 2007.
- [3] Enzo Bonacci. *Beyond Relativity*, volume 43 of *Physical Sciences*. Rome : Aracne Editrice, 2007.
- [4] Enzo Bonacci. Hypothetical six-dimensional reference frames. *International Journal of Mathematical Sciences and Applications*, 5(2) : 447–455, 2015.
- [5] Oliver Müller et al. A whirling plane of satellite galaxies around Centaurus A challenges cold dark matter cosmology. *Science*, 359(6375) : 534–537, 2018.
- [6] Adam Guy Riess et al. New parallaxes of Galactic Cepheids from spatially scanning the Hubble Space Telescope: implications for the Hubble Constant. *The Astrophysical Journal*, accepted for publication.

Mukai-Fourier Transform in Derived Categories to Solutions of the Field Equations: Gravitational Waves as Oscillations in the Space-Time Curvature/Spin IV

Prof. Dr. Francisco Bulnes

(Research Department of Mathematics and Engineering, TESCHA, Chalco, Mexico)

E-mail: francisco.bulnes@tesch.edu.mx.

Key words: Classical limit conjecture, derived deformed categories, Fourier-Mukai equivalence, Hecke functors, Higgs Bundel, Hamiltonian variety, Langlands correspondence, Mukai-Furier transform.

UDC:511 512 514.7 515.1 517 517.9

2010 AMS Classification: 53D37; 11R39; 14D24; 83C60; 11S15.

Starting of fact that the Mukai-Fourier transform is an equivalence of derive categories(with arbitrary decorations: +, -,b), is feasible construct a Fourier-Mukai equivalence given for

$$D_{Coh}(T^\vee A) \cong D_{Coh}(A^\vee \times \mathbf{H})$$

, where exist a distinguished deformation of the category $D_{Coh}(T^\vee A)$, which is a non-commutative deformation of $T^\vee A$, defined by a natural symplectic form, that is their quatization [1].

Then $T_o^\vee A$, results a 1-parameter deformation A^b , of the space $A^\vee \times \mathbf{H}$, to an affine bundle over A^\vee , classified by $H^1(A^\vee; \mathcal{O} \otimes \mathbf{H})$. Then the Fourier-Mukai equivalence relative to the projection $T_o^\vee A$, deforms an equivalence between the deformed categories $D_{Coh}\mathcal{D}_A - mod$, and $D_{Coh}(A^b)^b$.

Then we use the deformed version of the Mukai-Fourier transform that results on D_A- modules and we characterize to A , as a Picard variety of C ,¹, where C , is a curve. Then a Hecke functor is definid as the integral transform

$$\Phi^1 : D_{Coh}(Pic(C), \mathcal{D}) \rightarrow D_{Coh}(C \times Pic(C), \mathcal{D}),$$

to D -modules on ${}^L Bun$. But using the classical limit conjecture is had the equivalence through of the interpretation of Higgs sheaves, given in the category $D_{Coh}({}^L Higgs_0, \mathcal{O})$, which can be extended to the corresponding Langlands correspondence \mathfrak{c} , of the quantum sheaves given by $\mathfrak{c} = quant_{Bun} \circ \Phi \circ quant_C^{-1}$, where Φ , is the Fourier-Mukai transform that we want. Then we have as integral the integral transforms composition [2] $\mathfrak{c} \circ \Phi^\mu = {}^L \Phi^\mu$, which is solution to the field equation $Isom d\mathbf{h} = 0$, where \mathbf{h} , are the cotangent vector (Higgs fields).

Then by superposing of these states, considering the field corresponding ramifications(connections), we have

$$\mathcal{H} = \mathbf{H}^0(\omega_C) \oplus \mathbf{H}^0(\omega_C^{\otimes 2}) \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}^0(\omega_C^{\otimes n}),$$

which has their re-interpretation as the curvature energy expressed through the H-states which can be written using the superposing principle to each connection $\omega_C^{\otimes j}$, (with C , a curve) that describes the corresponding dilaton (photon or gauge particle).

Likewise, in a Hamiltonian densities space [3] we have the Figure 1, considering a Hitchin base. In the case of a spinor representation the corresponding H-states can be given as spinor waves (Figure 2) which can be consigned in oscillations in the space-time-curvature/spin, to a microscopic deformation measured [4] in \mathcal{H} .

¹In a physical context (could be taken $\mathbb{M} = Pic(C)$, where \mathbb{M} , is the space-time), this represent a trace of particles in the symplectic geometry that can be characterized in a Hamiltonian manifold.

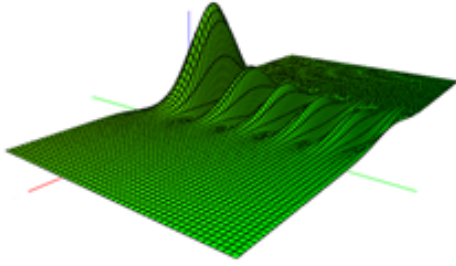


Figure 1

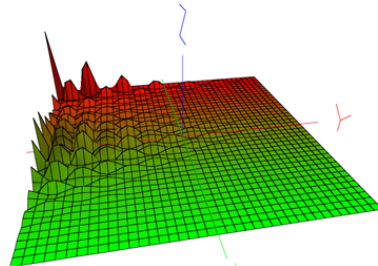


Figure 2

REFERENCES

- [1] *F. Bulnes* Extended d - Cohomology and Integral Transforms in Derived Geometry to QFT-equations Solutions using Langlands Correspondences
- [2] *F. Bulnes* Integral Geometry Methods in the Geometrical Langlands Program, SCIRP, USA, 2016.
- [3] *Francisco Bulnes (2017)*. Detection and Measurement of Quantum Gravity by a Curvature Energy Sensor: H-States of Curvature Energy, Recent Studies in Perturbation Theory, Dr. Dimo Uzunov (Ed.), InTech, DOI: 10.5772/68026.
- [4] *Bulnes, F. , Stropovskyy, Y. and Rabinovich, I. (2017)* Curvature Energy and Their Spectrum in the Spinor-Twistor Framework: Torsion as Indicum of Gravitational Waves. Journal of Modern Physics, 8, 1723–1736. doi: 10.4236/jmp.2017.810101.

A study on the teaching methods in determinants

Hulya Burhanzade

(Department of Mathematics, Yildiz Technical University)

E-mail: hulyaburhanzade@hotmail.com

Nilgun Aygor

(Department of Mathematics, Yildiz Technical University)

E-mail: nilgunaygor@gmail.com

ABSTRACT

This research was conducted with the participation of 82 engineering students. Students were asked to find the determinant values of the matrices given in concrete and abstract form. The results were evaluated on the basis of the answers given by the students to the questions. The methods students preferred when answering questions were investigated. In addition, the rates of success were determined according to question types. The study was a qualitative in nature. The obtained data were analysed by the researchers. It has been seen that engineering students are more successful in concrete examples than abstract examples. The fact that the matrices are given in an abstract and concrete form has caused the students to use different approaches. Considering these results, it was determined what should be taken into consideration while teaching determinants. Findings and results will be shared detailed in the presentation.

REFERENCES

- [1] Agargun G., Burhanzade H. Lineer Cebir ve Cozumlu Problemleri, Birsen Yayinevi, 2017.
- [2] Aydin S. On Linear Algebra Education, Inonu University Journal of Faculty of Education, 10(1):93-105, 2009.
- [3] Dede Y., Argun Z. Cebir, Ogrencilere Nicin Zor Gelmektedir?, Hacettepe Universitesi Egitim Fakultesi Dergisi, 24:180-185, 2003.
- [4] Konyalioglu A.C., Ipek A.S. and Isik A. On the teaching linear algebra at the University level: The role of visualization in the teaching vector spaces. Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 7(1): 59-67, 2003.
- [5] Yenilmez K., Teke M. Yenilenen Matematik Programinin Ogrencilerin Cebirsel Dusunme Duzeylerine Etkisi, Inonu Universitesi Egitim Fakultesi Dergisi, 9(15): 229-246, 2008.
- [6] Uhlig F. A New Unified, Balanced and Conceptual Approach to Teaching Linear Algebra, Linear Algebra and Its Applications, 36(1):147-159, 2003.
- [7] Uhlig F. The Role of Proof in Comprehending and Teaching Elementary Linear Algebra , Educational Studies in Mathematics, 50(3), 2002.

Order continuity properties of lattice ordered algebras

Damla Yaman

(Yildiz Technical University, Mathematics Department, Istanbul, TURKEY)

E-mail: dyaman@yildiz.edu.tr

First, we give some fundamental notions.

Definition 1. A linear ordering of a real linear space X is an ordering satisfying these conditions:

- (1) $x \leq y$ implies $x + z \leq y + z$, for all x, y, z in X ,
- (2) $x \leq y, \lambda \geq 0$ implies $\lambda x \leq \lambda y$.

Definition 2. An ordered linear space is a linear space with a linear ordering. Let A be an algebra with the unit e and A^+ be positive cone of A . For elements x, y of A $x \leq y$ means $x - y \in A^+$. A is an ordered linear space with this ordering.

Definition 3. If $xy \geq 0$ whenever $x \geq 0, y \geq 0$, then A is called an ordered algebra. If A is a Banach algebra with a closed cone A^+ , then A is called an ordered Banach algebra.

Definition 4. If A is a real vector lattice and is associative but not necessarily commutative or unital algebra such that the multiplication and the partial ordering in A are compatible, i.e. $x, y \in A^+ \Rightarrow xy \in A^+$, then A is called a lattice-ordered algebra (l -algebra).

Definition 5. An l -algebra is called

- (1) a d -algebra whenever the multiplications by positive elements are lattice (Riesz) homomorphisms of A , that is, $(x \vee y)z = xz \vee yz$ and $z(x \vee y) = zx \vee zy$ for all $x, y \in A, z \in A^+$.
- (2) an almost f -algebra if $x \wedge y = 0$ implies $xy = 0$.
- (3) an f -algebra if $x \wedge y = 0$ implies $xz \wedge y = zx \wedge y = 0$ for all $z \in A^+$.

In this work, we mainly deal with lattice ordered algebras such as f -algebras, d -algebras and almost f -algebras and their properties.

REFERENCES

- [1] Y.A. Abramovich, C.D. Aliprantis An Invitation to Operator Theory. *Graduate Studies in Mathematics*, vol.50. American Mathematical Society, Providence, 2002.
- [2] C.D. Aliprantis, Owen Burkinshaw. *Positive Operators.*, Springer, Dordrecht, 2006.
- [3] H. G. Dales. *Banach Algebras and Automatic Continuity.*, London Mathematical Society Monographs, New Series, vol.24, Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [4] M. Messerschmidt. *Normality of spaces of operators and quasi-lattices.*, *Positivity*, 19(4), 695–724, 2015.
- [5] S. Mouton, H. Raubenheimer. *More spectral theory in ordered Banach algebras.*, *Positivity*, 1(4), 305–317, 1997.
- [6] H. Raubenheimer, S. Rode. *Cones in Banach algebras.*, *Indag. Math. N.S.* 7(4), 489–502, 1996.
- [7] Ch. E. Rickart. *General Theory of Banach Algebras.*, Van Nostrand, Princeton, 1974.
- [8] A. C. Zaanen. *Riesz Spaces II.*, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [9] E. A. Alekhno. *The order continuity in ordered algebras.*, *Positivity* 21(2), 539–574, 2017.
- [10] C. B. Huijsmans. *Lattice-Ordered Algebras and f -Algebras: A Survey.* In: *Positive Operators, Riesz Spaces, and Economics.*, *Studies in Economic Theory*, vol.2. Springer, Berlin, Heidelberg, 1991.

Problem on non-overlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk

Iryna Denega

(Institute of mathematics of the NAS of Ukraine, Department of complex analysis and potential theory, Tereshchenkivska 3, Kiev-4, 01004, Ukraine)

E-mail: iradenega@gmail.com

The goal of the present work is the study of the problem of a product of powers of the generalized conformal radii of polycylindrical nonoverlapping domains with poles on the boundary of a polydisk. The spatial analogs of a number of known results concerning the nonoverlapping domains on a plane were obtained in [1], where a generalization of the notion of inner radius was given. Namely, the notion of harmonic radius of the spatial domain $B \subset \mathbb{R}^n$ relative to some internal point was introduced. Work [1] was the essential break-through in the consideration of nonoverlapping domains in the spatial case. Then, work [2] advanced an approach that allowed the transfer of some results known in the case of a complex plane onto \mathbb{C}^n . At the same time, the problems of nonoverlapping domains in the case of a complex plane represent a sufficiently well-developed trend of the geometric theory of functions of complex variable (see, e.g., [1–6]).

Let \mathbb{N} , \mathbb{R} and \mathbb{C} be the sets of natural, real, and complex numbers, respectively, and $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Let $\overline{\mathbb{C}}$ be a Riemann sphere (extended complex plane). It is well known that $\mathbb{C}^n = \underbrace{(\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C})}_{n\text{-times}}$,

$n \in \mathbb{N}$. $\overline{\mathbb{C}}^n = \underbrace{(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \dots \times \overline{\mathbb{C}})}_{n\text{-times}}$ is a compactification of the space \mathbb{C}^n (see, e.g., [3, 4, 5]), where

the set of infinitely remote points has the complex dimension $n - 1$. Let $[D]^n$ (Cartesian degree of a domain $D \in \overline{\mathbb{C}}$) denote the Cartesian product $\underbrace{D \times D \times \dots \times D}_{n\text{-times}}$, and let $[d]^n$ (Cartesian degree of a point $d \in \overline{\mathbb{C}}$) denote the point with $\overline{\mathbb{C}}^n$, which have the coordinates $\underbrace{(d, \dots, d)}_{n\text{-times}}$. It is clear that $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$,

$\overline{\mathbb{C}}^1 = \overline{\mathbb{C}}$. The topology in $\overline{\mathbb{C}}^n$ is introduced like in a Cartesian product of topological spaces. In this topology, $\overline{\mathbb{C}}^n$ is compact (see [3, 4, 5]).

The domain $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n \subset \overline{\mathbb{C}}^n$, where each domain $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, is called a polycylindrical domain in $\overline{\mathbb{C}}^n$ (see [3]). The domains B_k , $k = \overline{1, n}$, are called coordinate domains of the domain \mathbb{B} .

Let $r(B, a)$ be inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to the point $a \in B$. The generalized inner radius of the polycylindrical domain \mathbb{B} relative to the point $\mathbb{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{B}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, is

$$R(\mathbb{B}, \mathbb{A}) := \left(\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \right)^{\frac{1}{n}},$$

where the quantities $r(B_k, a_k)$, $k = \overline{1, n}$, mean the inner radii of the coordinate domains B_k relative to a_k .

Let $\mathbb{U}^n = [U]^n$, where $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (unit disk in the complex plane \mathbb{C}). By Γ_n we denote the skeleton of the polydisk \mathbb{U}^n i.e., the set of points $\mathbb{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \subset \mathbb{C}^n$, $|a_s| = 1$, $s = \overline{1, n}$.

The system $\{\mathbb{B}_k\}_{k=1}^m$ ($\mathbb{B}_k = B_1^{(k)} \times \dots \times B_n^{(k)}$, $k = \overline{1, m}$) is called a system of nonoverlapping polycylindrical domains, if, for every fixed p_0 , $p_0 = \overline{1, n}$, the system of domains $\{B_{p_0}^{(k)}\}$, $k = \overline{1, m}$, is a system of nonoverlapping domains on $\overline{\mathbb{C}}$.

Let $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. The system of points $\Delta_m := \{a_k\}_{k=1}^m$, $a_k \in \mathbb{C}$, is called m -radial, if $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ for $k = \overline{1, m}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_m < 2\pi$.

The system of points $\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m$ ($\mathbb{A}_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{C}^n$, $k = \overline{1, m}$), is called radial in the space \mathbb{C}^n , if, for every fixed p_0 the sequence $\{a_{p_0}^{(k)}\}$, $k = \overline{1, m}$, is an m -radial system of points on the corresponding complex plane \mathbb{C} .

We will consider radial systems of points in the space \mathbb{C}^n of the form

$$\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m, \quad \mathbb{A}_k = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{C}^n, \quad k = \overline{1, m}, \quad a_{p_0}^{(1)} > 0, \quad p_0 = \overline{1, n},$$

$$\arg a_{p_0}^{(k)} < \arg a_{p_0}^{(k+1)}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad \arg a_{p_0}^{(m)} < 2\pi. \quad (1)$$

We introduce the following notations

$$\alpha_{p_0}^{(1)} := \frac{1}{\pi} \left(\arg a_{p_0}^{(2)} - \arg a_{p_0}^{(1)} \right), \quad \alpha_{p_0}^{(2)} := \frac{1}{\pi} \left(\arg a_{p_0}^{(3)} - \arg a_{p_0}^{(2)} \right), \dots, \alpha_{p_0}^{(m)} := \frac{1}{\pi} \left(2\pi - \arg a_{p_0}^{(m)} \right).$$

Let

$$F_\delta(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2-2\delta} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2} (2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$

$$x \in (0, 2], \quad \delta \in [0, 1], \quad F_\delta(x) \subset \overline{\mathbb{C}}.$$

Then the following proposition is valid.

Theorem 1. [6] *Let $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 7$, $\gamma \in (0, \gamma_0]$, $\gamma_0 = \sqrt[3]{m}$ and $\delta \in [0; 0, 7]$. Then, for any radial system of points of the form (1) $\{\mathbb{A}_k\}_{k=1}^m = \{a_p^{(k)}\}_{k=1}^m \in \overline{\mathbb{C}^n}$, $p = \overline{1, n}$, such that $\mathbb{A}_k \in \Gamma_n$, $k = \overline{1, m}$, and for any collection of nonoverlapping polycylindrical domains \mathbb{B}_k , $\mathbb{A}_k \in \mathbb{B}_k \subset \overline{\mathbb{C}^n}$, $k = \overline{0, m}$, $\mathbb{A}_0 \in \mathbb{B}_0 \subset \overline{\mathbb{C}^n}$, the following inequality holds*

$$R^\gamma(\mathbb{B}_0, \mathbb{A}_0) \prod_{k=1}^m R(\mathbb{B}_k, \mathbb{A}_k) \leq \gamma^{-\frac{\delta \cdot m}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^m \prod_{p=1}^n \alpha_p^{(k)} \right)^{\frac{\delta}{n}} \cdot \left[F_\delta \left(\frac{2}{m} \sqrt{\gamma} \right) \right]^{\frac{m}{2}}.$$

One of the extreme systems is the system

$$\{\mathbb{B}_k\}_{k=0}^m = \{[B_0^{(0)}]^n, [B_1^{(0)}]^n, [B_2^{(0)}]^n, \dots, [B_m^{(0)}]^n\},$$

$$\{\mathbb{A}_k\}_{k=0}^m = \{[0]^n, [b_1^{(0)}]^n, [b_2^{(0)}]^n, \dots, [b_m^{(0)}]^n\},$$

where the domains $B_k^{(0)}$ and the points $b_k^{(0)}$, $k = \overline{1, m}$, are, respectively, the circular domains and the poles of the quadratic differential

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2} dw^2.$$

REFERENCES

- [1] V. N. Dubinin and E. G. Prilepkina. On the extreme partition of spatial domains. *Zap. Nauch. Sem. POMI*, 254 : 95–107, 1998.
- [2] A. K. Bakhtin. A generalization of some results of the theory of one-sheeted functions onto multidimensional complex spaces. *Dop. NAN Ukr.*, (3) : 7–11, 2011.
- [3] B. V. Shabat. *Introduction to Complex Analysis, Part II*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1992.
- [4] E. M. Chirka. *Complex Analytic Sets*, Springer : Berlin, 1989.
- [5] B. A. Fuks. *Introduction to the Theory of Analytic Functions of Several Complex Variables*, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1963.
- [6] Iryna Denega, Yaroslav Zabolotnyi. Problem of nonoverlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk. *Journal of Mathematical Sciences*, 227(1) : 26–32, 2017.

Inverse three spectra problem for a Stieltjes string with the Neumann boundary conditions

A. Dudko

(South Ukrainian National Pedagogical University named after K.D. Ushynsky)

E-mail: nastysha00301@gmail.com

V. Pivovarchik

(South Ukrainian National Pedagogical University named after K.D. Ushynsky)

E-mail: vpivovarchik@gmail.com

The notion of Stieltjes string was introduced in [1, Supplement II]. Like in [1] we suppose the string to be a thread, i. e. a string of zero density, bearing a finite number of point masses. Assume that the string consists of two parts, which are joined at one end and free to move in the direction orthogonal to the equilibrium position of the string at the other end. Starting indexing from the free ends, n_j masses $m_k^{(j)} > 0$, $k = 1, \dots, n_j$, are positioned on the j -th part, $j = 1, 2$, which divide the j -th part into $n_j + 1$ substrings, denoted by $l_k^{(j)} > 0$, $k = 0, \dots, n_j$, again starting indexing from the free end. In particular, $l_0^{(j)}$ is the distance on the j -th part between the free endpoint and $m_1^{(j)}$, $l_1^{(j)}$ for $k = 1, \dots, n_j - 1$ is the distance between $m_k^{(j)}$ and $m_{k+1}^{(j)}$, and $l_{n_j}^{(j)}$ is the distance on the j -th thread between the joined end point and $m_{n_j}^{(j)}$. The tension of the thread is assumed to be equal to 1.

Considering small transverse vibrations of such string like in [2, p.55] we obtain the following spectral problem

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} z u_k^{(j)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n_j, \quad j = 1, 2), \quad (1)$$

$$u_{n_1+1}^{(1)} = u_{n_2+1}^{(2)}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{u_{n_j}^{(j)} - u_{n_j+1}^{(j)}}{l_{n_j}^{(j)}} = 0, \quad (3)$$

$$u_0^{(j)} = u_1^{(j)}, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

where $u_k^{(j)}$ is the amplitude of vibrations of the mass $m_k^{(j)}$, z is the spectral parameter. Also we consider following two problems for the parts of the string:

$$\frac{u_k^{(j)} - u_{k+1}^{(j)}}{l_k^{(j)}} + \frac{u_k^{(j)} - u_{k-1}^{(j)}}{l_{k-1}^{(j)}} - m_k^{(j)} z u_k^{(j)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n_j), \quad (5)$$

$$u_0^{(j)} = u_1^{(j)}, \quad (6)$$

$$u_{n_j+1}^{(j)} = 0. \quad (7)$$

We denote by $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ where $n = n_1 + n_2$ the spectrum of problem (1)–(4), and by $\{\nu_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$, $j = 1, 2$ the spectra of problems (5)–(7). Let $\{\xi_k\}_{k=1}^n = \{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1} \cup \{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2}$ be indexed such that $\xi_k \leq \xi_{k+1}$.

Location of the spectra is described by

Theorem 1. *The sequences $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ and $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ interlace as follows:*

- 1) $0 = \mu_1 < \xi_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \xi_n$;
- 2) $\mu_k = \xi_{k-1}$ if and only if $\mu_k = \xi_k$;
- 3) the multiplicity of ξ_k does not exceed 2.

The corresponding inverse problem lies in finding the masses $\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ and subintervals $\{l_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ ($j = 1, 2$) using the three spectra, i.e. spectra of problems (1)–(4), (5)–(7) with $j = 1$ and (5)–(7) with $j = 2$.

Theorem 2. *Let $m_j > 0$ ($j = 1, 2$) be given together with the numbers*

$\{\mu_k\}_{k=1}^n$, $\{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1}$ and $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2-1}$ ($\mu_k < \mu_{k'}, \nu_k^{(j)} < \nu_{k'}^{(j)}$ for $k < k'$) $\{\xi_k\}_{k=1}^{n-1} = \{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1} \cup \{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2-1}$ which satisfy the following conditions:

$$0 = \mu_1 < \xi_1 < \mu_2 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-1} < \mu_n.$$

Then there exists a unique collection of sequences of positive numbers $\{\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j},$

$(j = 1, 2), \{l_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}$ ($j = 1, 2$)} such that $\sum_{k=1}^{n_j} m_k^{(j)} = m_j$, $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ is the spectrum of problem

(1)–(4), $\{\nu_k^{(1)}\}_{k=1}^{n_1}$ is the spectrum of problem (5)–(7) with $j = 1$, $\{\nu_k^{(2)}\}_{k=1}^{n_2-1}$ is a sequence of eigenvalues (a part of the spectrum) of problem (5)–(7) with $j = 2$.

The method of recovering $\{\{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j}, (j = 1, 2), \{l_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j} (j = 1, 2)\}$ is similar to that in [3] (see also [2], p. 222).

REFERENCES

- [1] F.R. Gantmakher, M.G. Krein. Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems. Revised edition. *AMS Chelsea Publishing, Providence, RI*, 2002.
- [2] M. Möller, V. Pivovarchik. Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite-Biehler Functions, and their Applications *Birkhäuser*, 2015.
- [3] O. Boyko, V. Pivovarchik. The inverse three-spectra problem for a Stieltjes string and the inverse problem with one-dimensional damping. *Inverse problems*, volume 24, no.1, 015019 13 pp, 2008.

On the existence of a global diffeomorphism between Fréchet spaces

Kaveh Eftekharinasab

(Institute of mathematics of NAS of Ukraine)

E-mail: kaveheft@gmail.com

We provide sufficient conditions for the existence of a global diffeomorphism between tame Fréchet spaces. We prove a version of Mountain Pass theorem which plays a key ingredient in the proof of the main theorem. We apply differentiability in the sense of Micheal and Bastiani.

Theorem 1 (The Mountain Pass Theorem). *Let F be a Fréchet space and $\phi : F \rightarrow \mathbb{R}$ a C^1 -functional satisfying the Palais-Smale condition. Assume $f \in F$ satisfies $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|f\|^n > r > 0$ for a real number r and the geometric condition $\inf_{p \in S(0,r)} I(p) > \max\{\gamma(0), \gamma(f)\} = a$, where $S(0,r)$ is a sphere of the radius r . Then ϕ has a critical value $c \geq a$ which can be characterized as*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \phi(\gamma(t)).$$

Where $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; F) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = f \in F\}$.

Let E and F be tame Fréchet spaces and $\tau : E \rightarrow F$ a smooth tame map. Assume that a C^1 -functional $\iota(x)$ is such that it and its derivative $\iota'(y)$ are zero if and only if x and y are zero. In addition, we suppose that the derivative $\tau'(e)f = k$ has a unique solution $f = \nu(e)k$ for all $e \in E$ and all k , and the family of inverses $\nu : E \times F \rightarrow E$ is a smooth tame map.

Theorem 2. *Assume that a smooth tame map $\tau : E \rightarrow F$ and a C^1 -functional ι on F are as above. If the following conditions hold*

C1: *for any $f \in F$ the functional $j : E \rightarrow \mathbb{R}$ given by*

$$j(e) = \iota(\tau(e) - f)$$

satisfies the Palais-Smale condition;

C2: *there exist positive real numbers a, b and c such that for f in the disk $D(0, a)$*

$$\iota(f) \geq c\alpha^b \text{ where } \alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f\|^n. \tag{1}$$

Then τ is a diffeomorphism.

Class groups of rings with divisor theory, L -functions and moduli spaces

Nikolaj Glazunov
(NAU, Kiev, Ukraine)
E-mail: glanm@yahoo.com

The study of class groups of rings and corresponding schemes is an actual scientific problem (see [1, 2] and references therein). For regular local rings, according to the Auslander-Buchsbaum theorem, the (divisors) class group is trivial. But in most interesting cases the group is nontrivial. The Heegner approach, together with the results of Weber, Birch, Baker and Stark, makes it possible to calculate and even parametrize rings with a given (small) class number in some cases. Let R be a commutative ring with identity for which there exists the theory of divisors [2]. The order of the class group is calculated on the basis of the use of L -functions. We investigate one of the aspects of this problem, consisting in finding the moduli spaces of elliptic curves defined over the rings R with the given class number.

Problem 1. To investigate the case of elliptic curves over rings of integers of quadratic fields (rings of integers \mathcal{O} of quadratic algebraic extensions k of the field of rational numbers \mathbb{Q}) with a small class number, see [2].

We present an elementary introduction to this problem and give the moduli spaces as trivial bundles over affine part of the groups of rational points of some elliptic curves over the ring of integers \mathbb{Z} . Below we present parameter spaces and moduli for class number one and two. Let

$$E : y^2 = x^3 + ax + b, \text{Disc}(E) = 4a^3 + 27b^2, \text{Disc}(E) \neq 0, \quad (*)$$

be an elliptic curve over the ring \mathcal{O} . Let A_1 be the affine part of the group of rational points over \mathbb{Z} of the Heegner elliptic curve $y^2 = 2x(x^3 + 1)$. With results by Heegner, Deuring, Birch, Baker, Stark, Kenku, Abrashkin, we deduce

Proposition 2. *Let \mathcal{O} be the ring of integers of the imaginary quadratic field with class number one. Then the parameter space of elliptic curves of the form (*) is the trivial bundle*

$$(\mathcal{O} \times \mathcal{O} / (\text{Disc}(E) = 0)) \times A_1.$$

Proposition 3. *Let k be the imaginary quadratic field with class number one. Then the moduli space of elliptic curves of the form (*) is the trivial bundle*

$$k \times A_1.$$

Let A_2 be the affine part of the group of rational points over \mathbb{Z} of the elliptic curve $X^3 + 3X = -Y^2$, let A_3 be the affine part of the group for the elliptic curve $X^3 - 3X = 2Y^2$, and A_4 respectively for $9X^4 - 1 = 2Y^2$.

Proposition 4. *Let \mathcal{O} be the ring of integers of the imaginary quadratic field with class number two. Then the parameter spaces of elliptic curves of the form (*), without an exceptional case, are trivial bundles*

$$(\mathcal{O} \times \mathcal{O} / (\text{Disc}(E) = 0)) \times A_2, (\mathcal{O} \times \mathcal{O} / (\text{Disc}(E) = 0)) \times A_3, (\mathcal{O} \times \mathcal{O} / (\text{Disc}(E) = 0)) \times A_4.$$

Proposition 5. *Let k be the imaginary quadratic field with class number two. Then the moduli spaces of elliptic curves of the form (*), without an exceptional case, are the trivial bundles*

$$k \times A_2, k \times A_3, k \times A_4.$$

In the article [3] the main object of the investigation is the L -function of the family of superelliptic curves over $K = \mathbb{F}_q(t)$ and their models $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}^1$. In the article [4] authors investigate some aspects of the problem in the framework of the theory of Heegner-Stark (Darmon) and Darmon-like points in elliptic curves E over \mathbb{Q} of conductor N with a prime p such that $N = pDM$, where D is the product of even (possible zero) distinct primes and $(D, M) = 1$, and develop the (co)homological techniques for effective construction of the quaternionic Darmon points on $E(K_p)$, where K_p is the p -adic upper half plane. If there is enough time, we plan to discuss the possible extension of the research in these directions [3, 4].

REFERENCES

- [1] M. Hashimoto. Equivariant class group. II: Enriched descent theorem. *Commun. Algebra*, 45(4) : 1509–1532, 2017.
- [2] Z. Borevich, I. Shafarevich. *Number Theory*, volume 20 of *Pure and Applied mathematics*. New York : Academic Press, 1986.
- [3] C. Greither. Families of curves with Galois action and their L -functions *J. Number Theory* 154: 292-323, 2015.
- [4] X. Guitart, M. Masdeu. Overconvergent cohomology and quaternionic Darmon points. *J. Lond. Math. Soc.*, II, 90(2): 495-524, 2014.

b-bimorphisms

Omer Gok

(Yildiz Technical University, Mathematics Department, Istanbul, TURKEY)

E-mail: gok@yildiz.edu.tr

Let X be an Archimedean vector lattice. X^\sim denotes the order dual of X and $X^{\sim\sim}$ denotes the order bidual of X . By $(X^\sim)_n^\sim$ we denote the order continuous bidual of X . The canonical mapping σ of X into $X^{\sim\sim}$ is defined by $\sigma(x)(f) = f(x) = x^\sim(f)$ for all $f \in X^\sim$. Here, x^\sim defines an order continuous algebraic lattice homomorphism on X^\sim and canonical image $\sigma(X)$ of X is a subalgebra of $(X^\sim)_n^\sim$. The band generated by $\sigma(X)$ is order dense in the order continuous bidual $(X^\sim)_n^\sim$ of X .

Definition 1. Let X be an Archimedean vector lattice. A bilinear mapping $T : X \times X \rightarrow X$ is called a b -bimorphism if $x \wedge y = 0$ and $x \wedge z = 0$ in X imply $x \wedge T(y, z) = 0$.

Every biorthomorphism is a b -bimorphism by the definition.

Theorem 2. Let X be an Archimedean vector lattice. If $T : X \times X \rightarrow X$ is a b -bimorphism, then the triadjoint of T , $T''' : (X^\sim)_n^\sim \times (X^\sim)_n^\sim \rightarrow (X^\sim)_n^\sim$ is a b -bimorphism.

As a result of this study, we obtain that if A is a b -algebra, then the order continuous bidual of A is a b -algebra. Also, as a special case, the following result is presented, [7]

Corollary 3. If a b -algebra A has positive squares, then the order bidual of A is a b -algebra.

REFERENCES

- [1] C.D. Aliprantis, Owen Burkinshaw. *Positive Operators*. New York: Academic Press, 1985.
- [2] R.Arens, *The adjoint of bilinear operations*, Proc.Amer.Math.Soc.2(1951),839-848.
- [3] K.Boulabair, W.Brahmi, *Multiplicative structure of biorthomorphisms and embedding of orthomorphisms*, Indagationes Math. 27 (2016),786-798.
- [4] G.Buskes, R.Page Jr, R.Yilmaz, *A note on biorthomorphisms*, Vector Measures, Integration and Related Topics, Operator Theory Advances and Applications, Vol.201(2009),99-107.
- [5] C.B.Huijsmans, B.de Pagter, *The order bidual of lattice ordered algebras*, J.Funct.Anal.59(1984),41-64.
- [6] M.A.Toumi, *The triadjoint of an orthosymmetric bimorphism*, Czechoslovak Math.J.,60(135)(2010),85-94.
- [7] B.Turan, M.Asiantas, *Archimedean l -algebras with multiplication closed bands*, Indagationes Math. Vol.25,2(2014),588-595.
- [8] R.Yilmaz, *The Arens triadjoints of some bilinear maps*, Filomat,28:5(2014),963-979.

On the second regularized trace formula for a differential operator with unbounded coefficients

Erdal Gül

(Yildiz Technical University, Mathematics Department, Istanbul, Turkey)

E-mail: gul@yildiz.edu.tr

Let H be an infinite dimensional separable Hilbert space. Let denote the inner product and the norm in H by (\cdot, \cdot) and $\|\cdot\|$, respectively and denote the set of all kernel operators from H to H by $\sigma_1(H)$. Let $H_1 = L_2([0, \pi]; H)$ be the set of all strongly measurable functions f defined on $[0, \pi]$ with their values in H such that for every $g \in H$ the scalar function $(f(x), g)$ is measurable in the interval $[0, \pi]$ and

$$\int_0^\pi \|f(x)\|^2 dx < \infty.$$

In $H_1 = L_2([0, \pi]; H)$ we consider the operators

$$L = L_0 + Q, \quad L_0 = y'' + Ay$$

with the same boundary conditions $y'(0) = y'(\pi) = y'''(0) = y'''(\pi) = 0$. Here the operator $A : D(A) \rightarrow H$ is a densely defined on H such that $A = A^* \geq I$, $A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$ where I is identity operator on H , A^* is the adjoint operator of A and $\sigma_\infty(H)$ is the set of all compact operators from H to H . And, $Q(x)$ is an operator function satisfying the following conditions:

- (a) $Q(x) : H \rightarrow H$ is a self-adjoint operator for every $x \in [0, \pi]$.
- (b) $Q(x)$ is weakly measurable in the interval $[0, \pi]$ and for every $f, g \in H$, the scalar function $(Q(x)f, g)$ is measurable on $[0, \pi]$.
- (c) The function $\|Q(x)\|$ is bounded on $[0, \pi]$.

Let $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots$ be the eigenvalues of the operator A and $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ be the orthonormal eigenvectors corresponding to these eigenvalues. Here, each eigenvalue is represented as many times as its multiplicity. Moreover, let the eigenvalues of the operator L_0 and L be $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots$ and $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, respectively.

Lemma 1. *If $\gamma_j \sim a \cdot j^\alpha$ ($a > 0, \alpha < \infty$) as $j \rightarrow \infty$ then the asymptotic formula*

$$\lambda_n, \mu_n \sim dn^{\frac{4\alpha}{4+\alpha}} \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (1)$$

holds where d is a constant.

Let $R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda I)^{-1}$, $R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$ be the resolvents of the operators L_0 and L , respectively. By the well known equality

$$R_\lambda = R_\lambda^0 - R_\lambda Q R_\lambda^0 \quad (\lambda \in \rho(L) \cap \rho(L_0))$$

we have:

Lemma 2.

$$\sum_{q=1}^{n_p} (\lambda_q^2 - \mu_q^2) = \sum_{j=1}^s M_{pj} + M_p^{(s)}$$

where

$$M_{pj} = \frac{(-1)^j}{\pi i j} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda \operatorname{tr}[(Q R_\lambda^0)^j] d\lambda \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$M_p^{(s)} = \frac{(-1)^s}{2\pi i} \int_{|\lambda|=b_p} \lambda^2 \text{tr}[R_\lambda(QR_\lambda^0)^{s+1}] d\lambda. \quad (3)$$

Theorem 3. *If the operator function $Q(x)$ satisfies the conditions (a), (b), (c) and $\gamma_j \sim aj^\alpha$ ($a > 0, \alpha > \frac{8}{7}(3 + \sqrt{2})$) as $j \rightarrow \infty$ then ,*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} M_{pj} = 0 \quad (j = 2, 3, 4, \dots).$$

Theorem 4. *If the operator function $Q(x)$ satisfies the following conditions*

- i) $Q(x)$ has weak derative of the 8-th order in the interval $[0, \pi]$ and the function $(Q^{(8)}(x)u, v)$ is continuos for every $u, v \in H$.
- ii) For every $x \in [0, \pi]$, $Q^{(i)}(x) : H \rightarrow H$ ($i = 0, 1, \dots, 8$) are self-adjoint operators.
- iii) For every $x \in [0, \pi]$, $Q^{(8)}(x)$, $AQ^{(2i)}(x) \in \sigma_1(H)$ ($i = 0, 1, \dots, 8$) and the functions $\|Q^{(8)}(x)\|_{\sigma_1(H)}$, $\|AQ^{(2i)}(x)\|_{\sigma_1(H)}$ ($i = 0, 1, \dots, 8$) are bounded and measurable in the interval $[0, \pi]$.

and if $\gamma_j \sim aj^\alpha$ ($a > 0, \alpha > \frac{8}{7}(3 + \sqrt{2})$) as $j \rightarrow \infty$ then the formula

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^{n_p} [\lambda_q^2 - \mu_q^2 - \frac{2}{\pi} \mu_q \int_0^\pi (Q(x)\varphi_{j_q}, \varphi_{j_q}) dx] \\ &= \frac{1}{2} [\text{tr}AQ(0) + \text{tr}AQ(\pi)] + \frac{1}{32} [\text{tr}Q^{(4)}(0) + \text{tr}Q^{(4)}(\pi)] - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{tr}AQ(x) dx \end{aligned} \quad (4)$$

is satisfied. Here j_1, j_2, \dots are natural numbers.

REFERENCES

- [1] E. Adigüzelov, P. Kanar, The second regularized trace of a second order differential operator with unbounded operator coefficient, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 22(3): 349-365, 2005.
- [2] E. Adigüzelov, Y. Sezer, The regularized trace of a self adjoint dferential operator of higer order with unbounded operator coefficient, *Applied Mathematics and Computation* 218: 2113-2121, 2011.
- [3] RZ. Chalilova, On regularization of the trace of the Sturm-Liouville operator equation, *Funks. Analiz, teoriya funktsiy i ik pril Mahaçkala* 3: 154-161, 1976.
- [4] Gohberg IC, Krein MG, *Introduction to the Theory of Linear Non-self Adjoint Operators*, volume 18 of *Translation of Mathematical Monographs.* (AMS, Providence, RI), 1969.
- [5] E. Gül, A regularized trace formula for differential operator of second order with unbounded operator coefficients given in a finite interval, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 32(2): 225-244, 2006.
- [6] E. Gül, On the regularized trace of a second order differential operator, *Applied Mathematics and Computation* 198: 471-480, 2008.

The Lie-algebraic structure of the Lax-Sato integrable superanalogs for the Liouville heavenly type equations

Oksana Ye. Hentosh

(Pidstryhach Inst. for Applied Problems of Mech. and Math., NASU, Lviv, Ukraine)

E-mail: ohen@ukr.net

Yarema A. Prykarpatsky

(Institute of Mathematics, NASU, Kyiv, Ukraine)

E-mail: yarpry@gmail.com

In the paper [1] the general Lie-algebraic approach to constructing the Lax-Sato integrable heavenly type systems has been developed. It is based on the classical Adler-Kostant-Symes (AKS) theory and \mathcal{R} -operator structures related with the loop Lie algebra $\widetilde{diff}(\mathbb{T}^n)$ of the vector fields on the n -dimensional torus \mathbb{T}^n and adjacent Lie algebra $diff_{hol}(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n) \subset diff(\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n)$ of the holomorphic in the ‘‘spectral’’ parameter $\lambda \in \mathbb{S}_{\pm}^1$ vector fields on $\mathbb{C} \times \mathbb{T}^n$. A generalization of this Lie-algebraic scheme, related with the loop Lie algebra $\widetilde{diff}(\mathbb{T}^{1|N})$ of superconformal vector fields on the $1|N$ -dimensional supertorus $\mathbb{T}^{1|N} \simeq \mathbb{S}^1 \times \Lambda_1^N$, where $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ is an infinite-dimensional Grassmann algebra over $\mathbb{C} \subset \Lambda_0$, has been proposed in [2] for $n = 1$ and applied to construct the Lax-Sato integrable superanalogs of the Mikhalev-Pavlov heavenly equation for every $N \in \mathbb{N} \setminus \{4; 5\}$. In our report the Lax-Sato integrable superanalogs of the Liouville heavenly type equations are obtained by use the loop Lie algebra $\widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})$ of the superconformal vector fields on $\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N} \simeq \mathbb{T}_\mathbb{C}^1 \times \Lambda_1^N$ as a result of some diffeomorphic mapping in the space of variables $(z, \vartheta) \in \mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N}$, where $\vartheta := (\vartheta_1, \dots, \vartheta_N)^\top$, $\vartheta_i \in \Lambda_1$, $i = \overline{1, N}$.

At first one introduces the superderivatives $D_{\vartheta_i} := \partial/\partial\vartheta_i + \vartheta_i\partial/\partial z$, $z \in \mathbb{T}_\mathbb{C}^1$, $\vartheta_i \in \Lambda_1$, $i = \overline{1, N}$, in the superspace $\Lambda_0 \times \Lambda_1^N$. The loop Lie algebra $\widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})$ are formed by the superconformal vector fields such as $\tilde{a} := a\partial/\partial z + \langle Da, D \rangle / 2$, where $D := (D_{\vartheta_1}, D_{\vartheta_2}, \dots, D_{\vartheta_N})^\top$, $\vartheta := (\vartheta_1, \dots, \vartheta_N)^\top$, $a \in C^\infty(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N}; \Lambda_0)$, with the commutator

$$[\tilde{a}, \tilde{b}] := \tilde{c} = c\partial/\partial z + \langle Dc, D \rangle / 2, \quad c = a\partial b/\partial z - b\partial a/\partial z + \langle Da, Db \rangle / 2,$$

This loop Lie algebra $\widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})$ allows the splitting $\widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N}) = \widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})_+ \oplus \widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})_-$. Here the Lie subalgebras $\widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})_{\pm}$ are assumed to be formed by the vector fields $\tilde{a}(z)$ on $\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N}$, being holomorphic in $z \in \mathbb{S}_{\pm}^1 \subset \mathbb{C}$ respectively, where $\tilde{a}(\infty) = 0$ for any $\tilde{a}(z) \in \widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})_-$.

The nontrivial Casimir invariant $h^{(p_y)} \in I(\widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})^*)$ on a dense subspace $\widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})^* \simeq \Lambda^1(\mathbb{T}_\mathbb{C}^1)$ of the dual space through the pairing $(\tilde{l}, \tilde{a}) := \text{res}_{\lambda \in \mathbb{C}} \int_{\mathbb{S}^1} z^{-1} dz \int_{\Lambda_1^N} (la) d^N \vartheta$, $\tilde{l} := ldz \in \widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})^*$, satisfies the relationship

$$(l(\nabla h^{(p_y)}(l))^2)_z - Nl((\nabla h^{(p_y)}(l))^2)_z / 4 = (-1)^N \langle Dl, D(\nabla h^{(p_y)}(l))^2 \rangle / 4, \quad (1)$$

where $\nabla h^{(p_y)}(\tilde{l}) := \nabla h^{(p_y)}(l)\partial/\partial z + \langle D\nabla h^{(p_y)}(l), D \rangle / 2$. If the corresponding gradient has the asymptotic expansion $\nabla h^{(p_y)}(l) \simeq \sum_{j \leq r} V_j z^j$, where $p_y = r$ and $V_j \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \Lambda_1^N; \Lambda_0)$, $j \in \mathbb{Z}$, $j \leq r$, $r \in \mathbb{Z}_+$, are some functional parameters, as $|z| \rightarrow \infty$, we can construct the Hamiltonian flow

$$dl/dy = -l_z \nabla h_+^{(p_y)}(l) - (4 - N)l(\nabla h_+^{(p_y)}(l))_z / 2 + (-1)^N \langle Dl, D\nabla h_+^{(p_y)}(l) \rangle / 2 \quad (2)$$

in the framework of the classical AKS-theory. The constant Casimir invariant $h^{(p_t)} \in I(\widetilde{diff}(\mathbb{T}_\mathbb{C}^{1|N})^*)$ generates the trivial flow

$$dl/dt = 0. \quad (3)$$

The compatibility condition of these two flows for all $y, t \in \mathbb{R}$ is equivalent to the following system of two *a priori* compatible linear vector field equations

$$\partial\psi/\partial y + V\partial\psi/\partial z + \langle DV, D\psi \rangle / 2 = 0, \quad \partial\psi/\partial t = 0, \quad (4)$$

where $\nabla h_+^{(p_y)}(l) := V$, $V = V(y, t, \vartheta; z) = \sum_{0 \leq j \leq r} V_j z^j$, and $\nabla h^{(p_t)}(l) = 0$, for a smooth function $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \Lambda_1^N; \Lambda_0)$. In this case we have the evolutions

$$dz/dy = V - \langle \theta, DV \rangle / 2, \quad d\vartheta/dy = (DV)/2, \quad dz/dt = 0, \quad d\theta/dt = 0. \quad (5)$$

Under the diffeomorphic mapping $z \mapsto z - \kappa - \langle \theta, \eta \rangle := \lambda$ and $\vartheta \mapsto \vartheta + \eta := \tilde{\vartheta}$, $\eta := (\eta_1, \dots, \eta_N)^\top$, $\tilde{\vartheta} := (\tilde{\vartheta}_1, \dots, \tilde{\vartheta}_N)^\top$, on $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{1|N}$, generated by the functions $\kappa := \kappa(y, t) \in C^3(\mathbb{R}^2; \Lambda_0)$ and $\eta := \eta(y, t) \in C^3(\mathbb{R}^2; \Lambda_1^N)$, the equations (4) are rewritten as

$$\partial\psi/\partial y + W\partial\psi/\partial\lambda + \langle \tilde{D}W, \tilde{D}\psi \rangle / 2 = 0, \quad \partial\psi/\partial t - U\partial\psi/\partial\lambda - \langle \tilde{D}U, \tilde{D}\psi \rangle / 2 = 0, \quad (6)$$

where $W := W(y, t, \tilde{\vartheta}; \lambda) = \sum_{0 \leq j \leq r} W_j \lambda^j$, $U := U(y, t, \tilde{\vartheta})$, $\tilde{D} := (D_{\vartheta_1}, D_{\vartheta_2}, \dots, D_{\vartheta_N})^\top$ and $D_{\tilde{\vartheta}_i} := \partial/\partial\tilde{\vartheta}_i + \tilde{\vartheta}_i \partial/\partial\lambda$, $i = \overline{1, N}$. Taking into account the evolutions (5) and

$$d\lambda/dy = W - \langle \tilde{\theta}, \tilde{D}W \rangle / 2, \quad d\tilde{\vartheta}/dy = (\tilde{D}W)/2, \quad d\lambda/dt = -U + \langle \tilde{\theta}, \tilde{D}U \rangle / 2, \quad d\tilde{\vartheta}/dt = -(\tilde{D}U)/2,$$

one obtains the function W such as $W = \tilde{V} + \langle \eta, \tilde{D}\tilde{V} \rangle - \partial\kappa/\partial y + \langle \eta, \partial\eta/\partial y \rangle$, where $\tilde{V} := \tilde{V}(y, t, \tilde{\vartheta}; \lambda) = V(y, t, \vartheta; z)|_{z=\lambda+\kappa+\langle\theta,\eta\rangle, \vartheta=\tilde{\vartheta}-\eta}$. Furthermore, the superderivatives transform by the rules $D_{\vartheta_i} = D_{\tilde{\vartheta}_i} - 2\eta_i \partial/\partial\lambda$, $i = \overline{1, N}$, and the functions κ and η obey the relationships $\partial\kappa/\partial t - \langle \eta, \partial\eta/\partial t \rangle = U$, $\partial\eta/\partial t = -(\tilde{D}U)/2$.

If $W_2 := 1$ and $U := 1/2 \exp \varphi$, $\varphi := \varphi(y, t, \vartheta)$, the compatibility condition for the first order partial differential equations (6) leads to the Lax-Sato integrable superanalogs of Liouville heavenly type equations [3]

$$\varphi_{yt} = \exp \varphi - \sum_{i=1}^N (\partial\varphi_y/\partial\tilde{\vartheta}_i)(\partial \exp \varphi/\partial\tilde{\vartheta}_i)/4, \quad W_0 := 1, \quad (7)$$

$$\varphi_{yt} - \varphi_{tt} = \exp \varphi - \sum_{i=1}^N (\partial(\varphi_y - \varphi_t)/\partial\tilde{\vartheta}_i)(\partial \exp \varphi/\partial\tilde{\vartheta}_i)/4, \quad W_0 := -1/2 \exp \varphi. \quad (8)$$

Because of the relationship (1) the element $\tilde{l} \in \widetilde{diff}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{1|N})^*$ can be found explicitly. For example, in the case of $r = 2$ and $N = 1$ it has the following form

$$\tilde{l}(y, t, \vartheta_1; z) = (z^{-4}(\vartheta_1(1 - 2v_1 z^{-1} + (3v_1^2 - 2v_0)z^{-2}) + \beta_1/2 + (\beta_0/4 - 9\beta_1 v_1/8)z^{-1}))dz, \quad (9)$$

where $V_2 := 1$ and $V_j := v_j + \vartheta_1 \beta_j$, $j = \overline{0, 1}$. Thus, one can formulate the following proposition.

Proposition 1. *For all $N \in \mathbb{N}$ the super-Liouville heavenly type equations (7) and (8) possess the Lax-Sato vector field representations (6), being equivalent to the commutability condition of two Hamiltonian flows (2) and (3) on $\widetilde{diff}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{1|N})^*$. In the case of $N = 1$ the equations (7) and (8) are put into the AKS-scheme for the loop Lie algebra $\widetilde{diff}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{1|N})$ with the element $\tilde{l} \in \widetilde{diff}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}^{1|N})^*$ in the form (9).*

REFERENCES

- [1] Oksana E. Hentosh, Yarema A. Prykarpatsky, Denis Blackmore, Anatolij Prykarpatski. Lie-algebraic structure of Lax-Sato integrable heavenly equations and the Lagrange-d'Alembert principle. *J. of Geometry and Physics.*, 120 : 208-227, 2017.
- [2] Oksana Ye. Hentosh, Yarema A. Prykarpatsky. The Lie-algebraic structure of integrable "heavenly" superflows. *Proceedings of 18th Intern. Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, October 7-10, 2017, Kyiv*, volume 1. Kyiv: NTUU "KPI", 2017. (in Ukrainian)
- [3] Leonid V. Bogdanov, Boris G. Konopelchenko. Grassmannians $Gr(N-1, N+1)$, closed differential $N-1$ forms and N -dimensional integrable systems. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 46(8), 085201: 26 pp., 2012.

In a natural topological sense a typical linear nonhomogeneous differential equation in the ring $Z[[x]]$ has no solutions from $Z[[x]]$.

Viacheslav Herasymov

(V.N.Karazin Kharkiv National University, School Mathematics and Computer Sciences, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine)

E-mail: Slavka.gs98@gmail.com

Sergiy Geftter

(V.N.Karazin Kharkiv National University, School Mathematics and Computer Sciences, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine)

E-mail: geftter@karazin.ua

Let $Z[[x]]$ be a ring of formal power series with integer coefficients. On $Z[[x]]$ we consider the topology of coefficientwise convergence (see [1], Ch.1, section 0.4). Let $b \in Z$, $b \neq 0$ and $f \in Z[[x]]$. The following implicit linear nonhomogeneous differential equation

$$by' + f(x) = y \tag{1}$$

is considered.

If $f(x)$ is a polynomial with integer coefficients, then the equation (1) has a unique solution as a polynomial with integer coefficients. If $f \in Z[[x]]$ is a nontrivial formal power series, then this equation can has no solutions in the ring $Z[[x]]$. For example, the equation $y' + 1 + x + x^2 + \dots = y$ has no a solution as a formal power series with integer coefficients.

We denote by M the set of all formal power series $f \in Z[[x]]$ for which the equation (1) has a solution in the ring $Z[[x]]$.

The next main result is obtained

Theorem 1. *M is an uncountable dense submodule in the ring $Z[[x]]$. Moreover, $Z[[x]] \setminus M$, i.e. the set of those elements in the ring $Z[[x]]$ for which the equation (1) has no solutions from $Z[[x]]$, is a dense set of the class G_δ .*

REFERENCES

- [1] H. Grauert, R. Remmert. Analytische Stellenalgebra. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1971.

On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation

Juraev D.A.

(Karshi State University, Karshi city, Republic of Uzbekistan)

E-mail: juraev_davron@list.ru

Using our previous results, we show an explicit construction of the Carleman matrix for matrix factorisations of the Helmholtz equation in an unbounded planar domain. This allows one to get a formula for a regularized solution of the Cauchy problem with data on the finite part of the boundary.

It is known that the Cauchy problem for elliptic equations is unstable relatively small change in the data, i.e., is incorrect (Hadamard's example). In unstable problems the image of the operator is not closed, therefore the solvability condition can not be written in terms of continuous linear functionals. Thus, in the Cauchy problem for elliptic equations with data on a part of the boundary of the region, the solution is usually unique, the problem is solvable for an everywhere dense set of data, but this set not closed. Consequently, the theory of solvability of such problems is essentially It is more difficult and deeper than the theory of solvability of the Fredholm equations [8].

In this paper we construct a family of vector-functions $U_{\sigma(\delta)}(x) = U(x, f_\delta)$ depending on a parameter σ and it is proved that, under certain conditions and a special choice of the parameter $\sigma = \sigma(\delta)$; as $\delta \rightarrow 0$, the family $U_{\sigma(\delta)}(x)$ converges in the usual sense to a solution $U(x)$ at the point $x \in G$.

Following A.N. Tikhonov [5], a family of vector-functions $U_{\sigma(\delta)}(x)$ is called a regularized solution of the problem. A regularized solution determines a stable method of approximate solution of the problem. For special domains, the problem of extending bounded analytic functions in the case when the data is specified exactly on a part of the boundary was considered by Carleman [1]. The researches of T. Carleman were continued by G.M. Goluzin and V.I. Krylov [4]. A multidimensional analogue of Carleman's formula for analytic functions of several variables was constructed in [3]. The use of the classical Green's formula for constructing a regularized solution of the Cauchy problem for the Laplace equation was proposed by Academician M.M. Lavrent'ev [2], in his famous monograph. Extending Lavrent'ev idea, Yarmukhamedov constructed the Carleman function for the Cauchy problem for the Laplace equation ([6]-[7]). The Cauchy problem for the multidimensional Lamé system is considered by O.I. Makhmudov and I.E. Niyozov [9]. The construction of the Carleman matrix for elliptic systems was carried out by Sh. Yarmukhamedov, N.N. Tarkhanov, O.I. Makhmudov, I.E. Niyozov and others.

In many well-posed problems for a system of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients, the factorizing operator of Helmholtz, the calculation of the value of the vector function on the whole boundary is inaccessible. Therefore, the problem of reconstructing, solving a system of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients, the factorizing operator of Helmholtz, is one of the topical problems in the theory of differential equations ([10]-[12]).

REFERENCES

- [1] T. Carleman, Les fonctions quasi analytiques. volume 7 of *Gautier-Villars et Cie*, Paris. 1926.
- [2] M.M. Lavrent'ev, On the Cauchy problem for the Laplace equation. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. mat.*, 20, 819–842. 1956.
- [3] L.A. Aizenberg, Carleman's formulas in complex analysis. *Nauka*, Novosibirsk. 1990.
- [4] Goluzin G.M., Krylov V.M., The generalized Carleman formula and its application to the analytic continuation of functions. *Mat. Sbornik*, 40(2), 144–149. 1993.
- [5] A.N. Tikhonov, On the solution of ill-posed problems and the regularization method. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 151(3), 501–504. 1963.
- [6] Sh. Yarmukhamedov, On the Cauchy problem for the Laplace equation. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mathematics Series*, 235(2), 281–283, 1977.

- [7] Sh. Yarmukhamedov, The Carleman function and the Cauchy problem for the Laplace equation. *Sibirsk. Mat. Zhurnal*, 45(3), 701–719. 2004.
- [8] N.N. Tarkhanov, The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. volume 7 of *Mathematical topics*, Akad. Verl., Berlin, 1995.
- [9] I.E. Niyozov, O.I. Makhmudov, On the Cauchy problem for the multidimensional system of Lamé equations, *Izv. Vuz. Mat.*, 4, 41–50, 2006.
- [10] D.A. Juraev, The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 14, 752–764, 2017.
- [11] D.A. Juraev, Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 69(10), 1364–1371, 2017.
- [12] D.A. Juraev, On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 15, 11–20, 2018.

Macroscopic electromagnetism via complex quaternions

Mustafa Emre Kansu

(Dumlupınar University, Department of Physics, Kütahya, Turkey)

E-mail: memre.kansu@dpu.edu.tr

Quaternions, which are non-commutative but associative, have a great importance in terms of representation of physical systems and mathematical problems in a different way [1, 2]. Many subfields of physics such as electromagnetism, gravitation, magnetohydrodynamics, plasma physics, acoustic, quantum mechanics can be dealt with quaternions. In this work, electromagnetic equations have been studied for macroscopic environments with quaternions forming the generalization of complex numbers in four dimensions. Polarized and magnetized media are great importance for these environments, and there are linearities both electric and magnetic induction fields, respectively [3, 4]. Here, as shown in the notation of tensor, the relation between field and source expressions has been written in a short, different and simple form [5] by defining quaternion induction fields. In addition, electromagnetic energy conservation with induction fields [6] has been derived for the first time by using quaternion algebra under some approaches.

Acknowledgement: This work has been supported by Dumlupınar University Scientific Research Project, which has Project number DPU-SRP 2017-39.

REFERENCES

- [1] William Rowan Hamilton. *Elements of Quaternions*. New York : Chelsea Publishing, 1969.
- [2] Klaus Gürlebeck and Wolfgang Sprössig. *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*. Chichester : Wiley - Sons, 1997.
- [3] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. USA : Wiley - Sons, 1999.
- [4] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey : Prentice Hall, 1999.
- [5] Mustafa Emre Kansu. An analogy between macroscopic and microscopic systems for Maxwell's equations in higher dimensions. *The European Physical Journal Plus*, 128(12) : 149, 2013.
- [6] P. Kinsler, A. Favaro and M.W. McCall. Four Poynting Theorems. *European Journal of Physics*, 30(5) : 983, 2009.

An extension of Möbius–Lie geometry with conformal ensembles of cycles

Vladimir V. Kisil

(School of Mathematics, University of Leeds, Leeds LS2 9JT, England)

E-mail: `kisilv@maths.leeds.ac.uk`

Lie sphere geometry in the simplest planar setup unifies circles, lines and points—all together called *cycles* in this setup [8]. Symmetries of Lie spheres geometry include (but are not limited to) fractional linear transformations (FLT) of the form:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{where } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0. \quad (1)$$

There is a natural set of FLT-invariant geometric relations between cycles (to be orthogonal, to be tangent, etc.) and the restriction of Lie sphere geometry to invariants of FLT is called *Möbius–Lie geometry*. Thus, an ensemble of cycles, structured by a set of such relations, will be mapped by FLT to another ensemble with the same structure.

It is convenient to deal with cycles through Fillmore–Springer–Cnops construction (FSCc) which also has a long history, see [8, § 4.2]. Compared to a plain analytical treatment [3, Ch. 3], FSCc is much more efficient and conceptually coherent in dealing with FLT-invariant properties of cycles. For example, the inner product $\langle C_1, C_2 \rangle$ of cycles C_1 and C_2 is equal to zero if and only if cycles are orthogonal. Other properties, e.g. tangency, has a natural presentation as well, see [8, Ch. 4–5] and [9].

It was shown recently that ensembles of cycles with certain FLT-invariant relations provide helpful parametrisations of new objects as follows.

Example 1. (1) The Poincaré extension of Möbius transformations from the real line to the upper half-plane of complex numbers is described by a triple of cycles $\{C_1, C_2, C_3\}$ such that:

- (a) C_1 and C_2 are orthogonal to the real line;
- (b) $\langle C_1, C_2 \rangle^2 \leq \langle C_1, C_1 \rangle \langle C_2, C_2 \rangle$;
- (c) C_3 is orthogonal to any cycle in the triple including itself.

A modification [10] with ensembles of four cycles describes an extension from the real line to the upper half-plane of complex, dual or double numbers. The construction can be generalised to arbitrary dimensions.

(2) A parametrisation of loxodromes is provided by a triple of cycles $\{C_1, C_2, C_3\}$ such that [12]:

- (a) C_1 is orthogonal to C_2 and C_3 ;
- (b) $\langle C_2, C_3 \rangle^2 \geq \langle C_2, C_2 \rangle \langle C_3, C_3 \rangle$.

Then, main invariant properties of Möbius–Lie geometry, e.g. tangency of loxodromes, can be expressed in terms of this parametrisation [12].

(3) A continued fraction is described by an infinite ensemble of cycles (C_k) such that [2]:

- (a) All C_k are touching the real line (i.e. are *horocycles*);
- (b) (C_1) is a horizontal line passing through $(0, 1)$;
- (c) C_{k+1} is tangent to C_k for all $k > 1$.

This setup was extended in [10] to several similar ensembles. The key analytic properties of continued fractions—their convergence—can be linked to asymptotic behaviour of such an infinite ensemble [2].

(4) An important example of an infinite ensemble is provided by the representation of an arbitrary wave as the envelope of a continuous family of spherical waves. A finite subset of spheres can be used as an approximation to the infinite family. Then, discrete snapshots of time evolution

of sphere wave packets represent a FLT-covariant ensemble of cycles. This and further physical applications of FLT-invariant ensembles may be looked at [5].

Definition 2. The extend Möbius–Lie geometry considers ensembles of cycles interconnected through FLT-invariant relations.

Naturally, “old” objects—cycles—are represented by simplest one-element ensembles without any relation. The paper [9] provides conceptual foundations of such extension and demonstrates its practical implementation as a CPP library **figure**¹. Interestingly, the development of this library shaped the general approach, which leads to specific realisations in [11, 10, 12].

More specifically, the library **figure** manipulates ensembles of cycles (quadrics) interrelated by certain FLT-invariant geometric conditions. The code is build on top of the previous library **cycle** [7, 8, 6], which manipulates individual cycles within the GiNaC [1] computer algebra system. Thinking an ensemble as a graph, one can say that the library **cycle** deals with individual vertices (cycles), while **figure** considers edges (relations between pairs of cycles) and the whole graph. Intuitively, an interaction with the library **figure** reminds compass-and-straightedge constructions, where new lines or circles are added to a drawing one-by-one through relations to already presented objects (the line through two points, the intersection point or the circle with given centre and a point).

It is important that both libraries are capable to work in spaces of any dimensionality and metrics with an arbitrary signatures: Euclidean, Minkowski and even degenerate. Parameters of objects can be symbolic or numeric, the latter admit calculations with exact or approximate arithmetic. Drawing routines work with any (elliptic, parabolic or hyperbolic) metric in two dimensions and the euclidean metric in three dimensions.

REFERENCES

- [1] Christian Bauer, Alexander Frink, and Richard Kreckel. Introduction to the GiNaC framework for symbolic computation within the C++ programming language. *J. Symbolic Computation*, 33(1):1–12, 2002. Web: <http://www.ginac.de/>. [arXiv:cs/0004015](https://arxiv.org/abs/cs/0004015).
- [2] Alan F. Beardon and Ian Short. A geometric representation of continued fractions. *Amer. Math. Monthly*, 121(5):391–402, 2014.
- [3] Walter Benz. *Classical Geometries in Modern Contexts. Geometry of Real Inner Product Spaces*. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition edition, 2007.
- [4] GNU. *General Public License (GPL)*. Free Software Foundation, Inc., Boston, USA, version 3 edition, 2007. URL: <http://www.gnu.org/licenses/gpl.html>.
- [5] H.A. Kastrup. On the advancements of conformal transformations and their associated symmetries in geometry and theoretical physics. *Annalen der Physik*, 17(9–10):631–690, 2008. [arXiv:0808.2730](https://arxiv.org/abs/0808.2730).
- [6] Vladimir V. Kisil. Erlangen program at large-0: Starting with the group $SL_2(\mathbf{R})$. *Notices Amer. Math. Soc.*, 54(11):1458–1465, 2007. [arXiv:math/0607387](https://arxiv.org/abs/math/0607387), [On-line. Zbl1137.22006](https://zbmath.org/journal/Zbl1137.22006).
- [7] Vladimir V. Kisil. Fillmore-Springer-Cnops construction implemented in GiNaC. *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 17(1):59–70, 2007. [On-line. A more recent version: arXiv:cs/0512073](https://arxiv.org/abs/cs/0512073). The latest documentation, source files, and live ISO image are at the project page: <http://moebinv.sourceforge.net/>. [Zbl05134765](https://zbmath.org/journal/Zbl05134765).
- [8] Vladimir V. Kisil. *Geometry of Möbius Transformations: Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Actions of $SL_2(\mathbf{R})$* . Imperial College Press, London, 2012. Includes a live DVD. [Zbl1254.30001](https://zbmath.org/journal/Zbl1254.30001).
- [9] Vladimir V. Kisil. An extension of Lie spheres geometry with conformal ensembles of cycles and its implementation in a GiNaC library. 2014–2018. [arXiv:1512.02960](https://arxiv.org/abs/1512.02960). Project page: <http://moebinv.sourceforge.net/>.
- [10] Vladimir V. Kisil. Remark on continued fractions, Möbius transformations and cycles. *Izvestiya Komi nauchnogo centra UrO RAN [Izvestiya Komi nauchnogo centra UrO RAN]*, 25(1):11–17, 2016. [arXiv:1412.1457](https://arxiv.org/abs/1412.1457), [on-line](https://arxiv.org/abs/1412.1457).
- [11] Vladimir V. Kisil. Poincaré extension of Möbius transformations. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 62(9):1221–1236, 2017. [arXiv:1507.02257](https://arxiv.org/abs/1507.02257).
- [12] Vladimir V. Kisil and James Reid. Conformal parametrisation of loxodromes by triples of circles. 2018. [arXiv:1802.01864](https://arxiv.org/abs/1802.01864).

¹All described software is licensed under GNU GPLv3 [4].

Rational differential invariants for oriented primary visual cortex

Konovenko Nadiia

(Department of Mathematics, ONAFT, Odessa, Ukraine)

E-mail: konovenko@ukr.net

Lychagin Valentin

(Department of Mathematics, University of Tromsø, Norway)

E-mail: valentin.lychagin@uit.no

The classic experiments ([2],[3]) of David Hubel and Torsten Weisel published in 1959 (Gross Horwitz Prize, 1975, and Nobel Prize,1981) gave us understanding how neurons extract information about light cast on the retina. They investigated how neurons in the primary visual cortex respond when they moved a bright contour in retina. They noticed that neurons react only if the line passed a particular place of retina and with a certain orientation. Moreover, "sometimes a moving spot gave more activation for one direction than for the opposite",([3]).

Geometrically this result could be formulated in the following way. Assume that the retina is a 2-dimensional manifold M . Then for a given point of retina $a \in M$ "simple" neurons detect the point and an oriented line in the tangent plane, $p \subset T_a M$. Moreover, they constitute a "hypercolumn", which allows to detect any oriented line $p \subset T_a M$ at each point $a \in M$.

Oriented lines in tangent (or cotangent) planes to M (we'll work with cotangent planes) form so-called spherization of the cotangent bundle

$$\mathbf{S}(M) = (\mathbf{T}^* M \setminus 0) / \mathbb{R}^+$$

-the classical 3-dimensional contact manifold.

It is also known, that the simple neurons operate as filters (see [1], [4] for more details) on optic signal which could be considered as convolution with the Gaussian or Gabor filters. This means that, in addition to the contact structure, we have metric structure on M , (cf. [1]).

We consider the case of spherical geometry, $M = \mathbf{S}^2$ and $G = \mathbf{SO}(3, \mathbb{R})$ - the special orthogonal group of rigid motions of the sphere.

Let \mathbf{S}^2 be riemann sphere equipped with stereographic coordinates (x, y) given by the stereographic projection and the Fubini -Study metric

$$g = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} (dx^2 + dy^2).$$

The Hamiltonian lift of Lie algebra $\mathfrak{so}_3 \mathbb{R}$, which is the symmetry Lie algebra of metric g , to $S(M)$ is generated by the following vector fields:

$$(1 + x^2 - y^2) \partial_x + 2xy \partial_y + 2y \partial_u, \quad 2xy \partial_x + (1 - x^2 + y^2) \partial_y - 2x \partial_u, \quad x \partial_y - y \partial_x + \partial_u$$

in the standard canonical coordinates on $S(M)$.

The action of Lie group $\mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$ on $S(M)$ is free and transitive, and therefore we expect two independent 1-st order differential invariants for oriented distributions.

The standard Liouville 1-form gives us normed differential form on $S(M)$

$$\omega_1 = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} (\cos u dx + \sin u dy)$$

and $\mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$ -invariant orthonormal coframe $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ on $S(M)$ where

$$\omega_2 = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} (-\sin u dx + \cos u dy).$$

The structure equations

$$\widehat{d}\omega_1 = J_1\omega_1 \wedge \omega_2, \quad \widehat{d}\omega_2 = J_2\omega_1 \wedge \omega_2$$

give us two differential $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ -invariants of the 1-st order:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1+x^2+y^2}{2} (u_x \cos u + u_y \sin u) + (y \cos u - x \sin u), \\ J_2 &= \frac{1+x^2+y^2}{2} (-u_x \sin u + u_y \cos u) - (y \sin u + x \cos u). \end{aligned}$$

The frame dual to coframe $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ provides us with two $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ -invariant derivations

$$\nabla_1 = \frac{1+x^2+y^2}{2} \left(\cos u \frac{d}{dx} + \sin u \frac{d}{dy} \right), \quad \nabla_2 = \frac{1+x^2+y^2}{2} \left(-\sin u \frac{d}{dx} + \cos u \frac{d}{dy} \right),$$

with the following the syzygy relation for $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ -invariants of oriented distributions has the form $J_{21} - J_{12} = J_1^2 + J_2^2 + 1$, where $J_{ij} = \nabla_i(J_j)$.

Taking invariant derivatives $\nabla_i(J_j)$ we get basic differential invariants J_{ij} of the second order in the form:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{2} (A \cos 2u + B \sin 2u) + \frac{u_{xx} + u_{yy}}{2} \frac{(1+x^2+y^2)^2}{4}, \\ J_{12} &= \frac{1}{2} (B \cos 2u - A \sin 2u) - \frac{u_x^2 + u_y^2}{2} \frac{(1+x^2+y^2)^2}{4} \\ &\quad + \frac{1+x^2+y^2}{2} (xu_y - yu_x - 1), \\ J_{22} &= -\frac{1}{2} (A \cos 2u + B \sin 2u) + \frac{u_{xx} + u_{yy}}{2} \frac{(1+x^2+y^2)^2}{4}, \end{aligned}$$

where

$$A = \frac{(1+x^2+y^2)^2}{4} (u_{xx} - u_{yy} + 2u_x u_y), \quad B = \frac{(1+x^2+y^2)^2}{4} (2u_{xy} - u_x^2 + u_y^2).$$

The following theorem describes the structure of differential $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ -invariants of oriented distributions.

Theorem 1. (1) *Differential $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ -invariants of oriented distributions on the unit sphere are generated by basic differential invariants J_1, J_2 and invariant derivations ∇_1, ∇_2 , subjected to syzygy relation i.e. any $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ -differential invariant is a rational function of invariants $\nabla^\mu(J_1)$ and $\nabla^\mu(J_2)$.*

(2) *In a neighborhood of regular point $\mathbf{SO}_3(\mathbb{R})$ -orbit of oriented distribution on the unit sphere is uniquely defined by invariants J_{11}, J_{12}, J_{22} as functions in J_1, J_2 .*

REFERENCES

- [1] Alekseevsky, Dmitri, Light, Eye, Brain. Geometric Problems in vision, Proceedings of GTS, ed. B. Bidabad, 8th Seminar on Geometry and Topology, p.10-32 Tehran, 2017
- [2] Hubel D., Eye, Brain and Vision, "Scientific American" Library, 1995
- [3] Hubel D.H. and Wiesel T.N. Receptive fields of single neurons in the cat's striate cortex, J. Physiol. (1959) I48, 574-59I
- [4] Petitot J., Neurogeometry of neural functional architectures, Chaos, Solitons & Fractals, 50 (2013), 75-92
- [5] N. Kononenko, V. Lychagin Invariants for primary visual cortex. *Journal of differential geometry and its applicat*, (in print)

A purely algebraic construction of Schwartz distributions

Vakhtang Lomadze

(Mathematics Department of I. Javakhishvili Tbilisi State University, Georgia)

E-mail: vakhtang.lomadze@tsu.ge

Let I be an interval of real axis, and let $L(I)$ be the space of all locally integrable functions defined on I . Assuming (without loss of generality) that the interval contains 0, for every locally integrable function $u \in L(I)$, let $J(u)$ denote the (absolutely) continuous function defined by

$$J(u)(x) = \int_0^x u(\alpha) d\alpha, \quad x \in I.$$

The integral operator $J : L(I) \rightarrow L(I)$ is injective, but not bijective (of course).

Define the Mikusinski space $M(I)$ to be the inductive limit of the sequence

$$L(I) \xrightarrow{J} L(I) \xrightarrow{J} L(I) \xrightarrow{J} L(I) \xrightarrow{J} \dots$$

Call its elements Mikusinski functions. By the very definition, a Mikusinski function is represented by a pair (u, m) , where $u \in L(I)$ and $m \in \mathbb{Z}_+$. Two such pairs (u, m) and (v, n) represent the same Mikusinski function if and only if

$$J^n u = J^m v.$$

Remark. In fact, our Mikusinski functions constitute a very small portion of Mikusinski's operators defined in [1].

Obviously, the map $u \mapsto (u, 0)$ is injective. This permits us to make the identification

$$u = (u, 0).$$

We extend the integration operator J to Mikusinski functions by setting

$$J(u, m) = (Ju, m).$$

Define the differentiation operator $D : M(I) \rightarrow M(I)$ by

$$D(u, m) = (u, m + 1).$$

Notice that

$$DJ = id \quad \text{and} \quad JD = id.$$

So, both of the operators $J : M(I) \rightarrow M(I)$ and $D : M(I) \rightarrow M(I)$ are bijective, and are inverse to each other.

The iterated derivatives of constant functions are not zero, and a natural idea is to "kill" all of them. We are led to consider the quotient space

$$M(I)/N(I),$$

where $N(I)$ denotes the subspace of $M(I)$ spanned by functions $D^m 1$, $m \geq 1$.

The differential operator of $M(I)$ induces a differential operator of $M(I)/N(I)$. We shall denote it by the same letter D . Thus,

$$D(w(\text{mod } N(I))) = (Dw)(\text{mod } N(I)), \quad w \in M(I).$$

Lemma 1. $L(I) \cap N(I) = \{0\}$.

Define the canonical map $j : L(I) \rightarrow M(I)/N(I)$ by the formula

$$j(u) = u \pmod{N(I)}.$$

It is immediate from the above lemma, that j is injective.

Theorem 2. $M(I)/N(I)$ is canonically isomorphic to $\mathcal{D}'_{fin}(I)$, the space of Schwartz distributions of finite order.

Proof. This is easy. Indeed, for each $u \in L(I)$, let T_u be the corresponding Schwartz distribution. One can show that if $u \in L(I)$, then $Dj(u) = 0$ if and only if u is a constant function. This implies that $D^m j(u) = 0$ if and only if u is a polynomial function of degree $\leq m$. It follows that the mapping

$$D^m j(u) \mapsto D^m T_u$$

is well-defined and injective. The surjectivity is clear.

Remarks. 1) Mikusinski functions admit multiplication by all rational functions. Due to this property of Mikusinski functions, the representation of distribution space as $M(I)/N(I)$ provides a simple foundation of Heaviside's operational calculus.

2) As is known, Schwartz distributions defined on a compact interval have finite order. Therefore, the Schwartz space $\mathcal{D}'(I)$, can be defined as the projective limit

$$\lim_{\leftarrow} M([\alpha, \beta])/N([\alpha, \beta]),$$

where $[\alpha, \beta]$ runs over all compact subintervals of I that contain 0.

REFERENCES

- [1] Mikusinski, J., *Operational Calculus*. London: Pergamon Press 1959.
- [2] Schwartz, L., Généralisation de la notion de fonction, dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques. *Annales Univ. Grenoble* 21 (1945) 57–74.

Deformation of functions on orientable surfaces by symplectic diffeomorphisms

Sergiy Maksymenko

(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereshchenkivs'ka, str. 3, Kyiv, 01004, Ukraine)

E-mail: maks@iamth.kiev.ua

Let M be a compact orientable surface and ω be a volume from M . We will study the right action of the group $Symp(M, \omega)$ of symplectic diffeomorphisms on the space $C^\infty(M, \mathbb{R})$ of smooth functions on M .

Let $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ be a C^∞ Morse function, H be the Hamiltonian vector field of f with respect to ω , and $\mathcal{Z}_\omega(f)$ be the set of all C^∞ -functions $M \rightarrow \mathbb{R}$, taking constant values along orbits of H . Then $\mathcal{Z}_\omega(f)$ is an abelian group with respect to point wise addition.

Further, let $\mathcal{S}(f, \omega) = \{h \in Symp(M, \omega) \mid f \circ h = f\}$ be the stabilizer of f with respect to the right action of the group $Symp(M, \omega)$. Thus $\mathcal{S}(f, \omega)$ consists of diffeomorphism mutually preserving f and ω . Let also $\mathcal{S}_0(f, \omega)$ be the identity path component of $\mathcal{S}(f, \omega)$ with respect to C^∞ topology.

We will prove that there exists a canonical epimorphism of topological groups:

$$\phi : \mathcal{Z}_\omega(f) \rightarrow \mathcal{S}_0(f, \omega),$$

which is an isomorphism whenever f has at least one saddle critical point, and an infinite cyclic covering otherwise.

In particular, $\mathcal{S}_0(f, \omega)$ is an abelian group, being either contractible or homotopy equivalent to the circle.

REFERENCES

- [1] Sergiy Maksymenko, *Symplectomorphisms of surfaces preserving a smooth function, I*. Topology and its Applications, vol. 235, (2018) 275-289

Application the p -adic topology on \mathbb{Z} for study determinants of infinite order with integer coefficients

Vsevolod Martseniuk

(Kharkiv Gymnasium №47, 7 Kosmonavtov str., Kharkiv, 61000, Ukraine)

E-mail: martsenyukvv@gmail.com

Anastasiya Bondarenko

(V.N.Karazin Kharkiv National University, School Mathematics and Computer Sciences, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine)

E-mail: nasya95bon@gmail.com

Sergiy Gefter

(V.N.Karazin Kharkiv National University, School Mathematics and Computer Sciences, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine)

E-mail: gefter@karazin.ua

Let p be a prime and \mathbb{Z}_p is the ring of p -adic integers with the standard topology (see [1], §3). Let A be an infinite matrix with integer coefficients:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

We say that $\det A$ converges in the p -adic sense if there exists such number $d \in \mathbb{Z}_p$ that

$$\det A_n := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \longrightarrow d$$

in the ring \mathbb{Z}_p .

We consider some applications of infinite order determinants with integer coefficients to study of implicit linear difference equations over the ring \mathbb{Z} . The next main results are obtained.

Theorem 1. *Let $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, b \neq \pm 1$, a, b are coprime and p is a divisor of b . The difference equation*

$$bx_{n+1} = ax_n + f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

for an arbitrary sequence f_n of integers has the unique solution over the ring \mathbb{Z}_p . Moreover, this solution can be find by using a version of Cramer's rule for solving infinite linear systems.

Theorem 2. *Let $a, b, f \in \mathbb{Z}, b \neq 0, b \neq \pm 1$ and a, b are coprime. The difference equation*

$$bx_{n+1} = ax_n + f, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

has an integer-valued solution if and only if $b - a$ is a divisor of f . In this case the unique solution of Equation (2) can be find by using a version of Cramer's rule for solving infinite linear systems.

REFERENCES

- [1] Z. I. Borevich and I. R. Shafarevich, *Number Theory, Academic Press Inc.*, 1966.

Warped product semi-slant submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds, II

Koji Matsumoto

(2-3-65 Nishi-Odori, Yonezawa, Yamagata, 992-0059, Japan)

E-mail: tokiko_matsumoto@yahoo.com

In the last conference (2017, Odessa), we defined 2 type warped product semi-slant submanifolds in an almost Hermitian manifold and we considered these submanifolds in a locally conformal Kaehler (an l.c.K.-) manifold and mainly considered some properties of the first type warped product semi-slant submanifold in an l.c.K.-manifold.

In this talk, we consider a same submanifold with the parallel second fundamental form in an l.c.K.-space form (an l.c.K.-manifold with a constant holomorphic sectional curvature). Using Codazzi equation, we partially determine the tensor field P which defined in the curvature tensor field of an l.c.K.-space form. Finally, we consider T , F and t .

REFERENCES

- [1] A.Bejancu, *CR-submanifolds of a Kaehler manifold I, II*, Proc.Amer. Math. Soc., **69** (1978), 134 –142 and Trans. Amer. Math. Soc., **250** (1979), 333–345.
- [2] A. Bejancu, *Geomerty of CR-submanifolds*, D. Reidel Publishing Company, (1986).
- [3] V. Bonanzinga and K. Matsumoto, *Warped product CR-submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds*, Periodica Math. Hungarica, **48** (2-2) (2004), 207–221.
- [4] B. Y. Chen, *CR-submanifolds of a Kaehler manifold I and II*, J. of Differential Geometry, **16**, 305–322 and 493–509(1981).
- [5] B. Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Marcel Dekker, New York (1973).
- [6] B. Y. Chen, *Geometry of slant submanifolds*, Katholieke Univ. Leuven, (1990).
- [7] V. A. Khan and M. A. Khan, *Semi-slant submanifolds of a nearly Kaehler manifold*, Turk J. Math., **31**(2007), 341–353.
- [8] T. Kashiwada, *Some properties of locally conformal Kähler manifolds*, Hokkaido Math, J. **8** (1979), 191–198.
- [9] K. Matsumoto, *On CR-submanifolds of locally conformal Kähler manifolds I, II*, J. Korean Math. **21** (1984), 49–61 and Tensor N, S. **45** (1987), 144–150.
- [10] K. Matsumoto, *On semi-slant submanifolds in an locally conformal Kaehler space form*,
- [11] K. Matsumoto, *Warped product semi-slant submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds*, to appear.
- [12] I. Vaisman, *Locally conformal almost Kähler manifolds*, Israel J, Math., **24**(1976), 338–351.

What points in Goursat Monster Tower are strongly nilpotent

Piotr Mormul

(Institute of Mathematics, University of Warsaw, Warsaw, Poland)

E-mail: mormul@mimuw.edu.pl

Control systems linear in controls, with linearly independent vector field' generators, sometimes happen to be locally nilpotentizable. That is, to locally possess bases that generate (over reals, not over functions) nilpotent algebras of vector fields. The existence of a nilpotent basis may be somehow mischievously hidden in the nature of a system. When it exists and is at hand, a number of key control problems related with the system (e. g., motion planning) become much simpler. We call such systems *weakly* nilpotent. When a system Σ is given globally on a manifold M , we call weakly nilpotent those points in M , around which Σ is weakly nilpotent.

In turn, *strongly* nilpotent are those points p in M , around which Σ is equivalent to its *nilpotent approximation* at p . Naturally, 'strongly' implies 'weakly', but not vice versa: 'strongly' appears to be a much more stringent property.

An important class of weakly nilpotentizable distributions are *Goursat* distributions – members of Goursat *flags* which live on so-called Monster Manifolds ([1]). Local nilpotent bases found for Goursat distributions permit much more – to compute the *nilpotency orders* (sometimes also called 'indices', sometimes 'steps') of the generated real Lie algebras, see [2]. Those Lie algebras are sometimes called 'Kumpera-Ruiz' after the names of the discoverers of Goursat's singularities as such. A big problem, with only partial answers known to-date, reads

Problem 1. What points in the Goursat Monster Tower are strongly nilpotent ?

Problem 2. What are the dimensions of the Kumpera-Ruiz algebras, hidden in the Goursat distributions ?

(The nilpotency orders of the Kumpera-Ruiz algebras are tractable, but not their real dimensions.)

REFERENCES

- [1] Richard Montgomery & Michail Zhitomirskii. Points and Curves in the Monster Tower. *Memoirs of the American Mathematical Society* **956** (2010).
- [2] Piotr Mormul. Goursat distributions not strongly nilpotent in dimensions not exceeding seven. Volume **281** (2003) of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 249 – 261.

The local density and the local weak density of N_τ^φ -kernel of a topological spaces

F.G. Mukhamadiev

(National University of Uzbekistan, Uzbekistan)

E-mail: farhod8717@mail.ru

We say that a topological space X is locally τ -dense at a point $x \in X$ if τ is the smallest cardinal number such that x has a τ -dense neighborhood in X . The local density at a point x is denoted by $ld(x)$.

The local density of a space X is defined as the supremum of all numbers $ld(x)$ for $x \in X$; this cardinal number is denoted by $ld(X)$.

A topological space is locally weakly dense at a point $x \in X$ if τ is the smallest cardinal number such that x has a neighborhood of weak density τ in X . The weak density at a point x is denoted by $lwd(x)$.

A topological space X is called locally weakly τ -dense if it is weakly τ -dense at each point $x \in X$.

The local weak density of a topological space X is defined with following way:

$$lwd(X) = \sup \{ lwd(x) : x \in X \}.$$

A system $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space X is called *linked* if any two elements from ξ intersect [1].

A.V. Ivanov defined the space NX of complete linked systems (CLS) of a space X in a following way:

Definition 1. A linked system M of closed subsets of a compact X is called a *complete linked system* (a CLS) if for any closed set of X , the condition

“Any neighborhood OF of the set F consists of a set $\Phi \in M$ ”
implies $F \in M$ [2].

A set NX of all complete linked systems of a compact X is called *the space NX of CLS of X* . This space is equipped with the topology, the open basis of which is formed by sets in the form of

$E = O(U_1, U_2, \dots, U_n) \langle V_1, V_2, \dots, V_s \rangle = \{M \in NX : \text{for any } i = 1, 2, \dots, n \text{ there exists } F_i \in M \text{ such that } F_i \subset U_i, \text{ and for any } j = 1, 2, \dots, s, F \cap V_j \neq \emptyset \text{ for any } F \in M\}$, where $U_1, U_2, \dots, U_n, V_1, V_2, \dots, V_s$ are nonempty open in X sets [2].

Definition 2. Let X be a compact space, φ be a cardinal function and τ be an arbitrary cardinal number. We call an N_τ^φ -kernel of a topological space X the space

$$N_\tau^\varphi X = \{M \in NX : \exists F \in M : \varphi(F) \leq \tau\}.$$

Theorem 3. Let X be an infinity compact space and $\varphi = d, \tau = \aleph_0$. Then:

- 1) $ld(N_\tau^\varphi X) \neq ld(X)$;
- 2) $lwd(N_\tau^\varphi X) \neq lwd(X)$.

REFERENCES

- [1] Fedorchuk V. V., Filippov V. V. *General Topology. Basic Constructions*. Fizmatlit, Moscow. 2006.
- [2] Ivanov A. V. Cardinal-valued invariants and functors in the category of bicomponents. *Doctoral thesis in physics and mathematics*, Petrozavodsk, 1985.

Topological invariants and microscopic quantum description

Tetiana V. Obikhod

(Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine, 03028, Kiev, Prosp. Nauki 47, Ukraine)

E-mail: obikhod@kinr.kiev.ua

Quantum gravity in the framework of string theory provides a microscopic quantum description of charged black holes using D-brane-soliton objects in string theory [1]. Such a D-brane is represented in the form of a brane-antibrane configuration characterized by a magnetic charge, taking on a value in the Hilbert space. Thus, the singularities of black holes are described by the vacuum space-time, which is identified with the physical Hilbert space [2]. According to Rosenberg, the principal bundles over a locally compact space, X , with fibers isomorphic to compact operators on an infinite-dimensional Hilbert space, K , define sections that represent the C^* algebra of sections of the principal bundle. A characteristic class associated with such an algebra is called the Dixmier-Douady invariant corresponding to the Neveu-Schwartz field, H . For an oriented three-dimensional manifold, according to the Rosenberg theorem, there is a classifying element - a Dixmier-Douady invariant and the morphism, $\beta : H^2(X, Z_2) \rightarrow H^3(X, Z)$, which is connected with the Bockstein homomorphism [3]

$$0 \rightarrow Z \rightarrow Z \rightarrow Z_2 \rightarrow 0 .$$

This relation allows us to associate the bundles of C^* algebras, associated with principal bundles, with the observed states of Hilbert spaces, which corresponds to the phase transition from one soliton state of the D-brane to another. These phase transitions for N large are characterized by K-theory.

REFERENCES

- [1] Juan M. Maldacena. Black Holes and D-branes. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 61A: 111-123, 1998.
- [2] Rodolfo Gambini, Javier Olmedo, Jorge Pullin. Quantum black holes in Loop Quantum Gravity. *Class. Quant. Grav.*, 31: 095009, 2014.
- [3] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

On the misconceptions of 10th grade students about analytical geometry

Ayten Ozkan

(Department of Mathematics, Yildiz Technical University)

E-mail: aytenust.ozkan@gmail.com

Mathematics is the most important tool of science and technology and a part of everyday life. Mathematics education is an important factor in the rational approach of individuals to analytical thinking and problem solving problems. Misconceptions is one of the factors that complicate the mathematics education. The aim of this research is to determine the relationship between misconceptions and analytical concepts.

In the first stage, an open-ended exam was applied to 2552 tenth-grade students studying at 19 high schools under Istanbul Provincial Directorate of National Education and 299 students from two high schools were tested in the second stage. In the last stage 10 students were interviewed. Errors and misconceptions of the students in the questions covering the analytic geometry were examined.

At the end, it was concluded that knowledge levels, errors and misconceptions of students in the analytic geometry should be identified to use proper instructional strategies. It is necessary to design different activities to improve the levels of students who cannot comprehend the analytic geometry on the level of their classrooms. This will ensure that the whole classroom achieves the same comprehension level. A decrease in errors and misconceptions will be observed and misconceptions will be identified more easily. Eliminating the misconceptions is possible by getting beyond the traditional instructional methods and keeping the teacher from the role of information transferer and the student from the role of passive listener.

REFERENCES

- [1] Kazemi, F., Ghoraishi, M. Comparison of problem-based learning approach and traditional teaching on attitude, misconceptions and mathematics performance of University Students. *Procedia-Social and Behavioral Science*, 46 : 3852–3856, 2012.
- [2] Kustos, P., Zelkowski, J. Grade-continuum trajectories of four known probabilistic misconceptions: What are students perceptions of self-efficacy in completing probability tasks?. *The Journal of Mathematical Behaviory*, 32(3) : 508–526, 2013
- [3] Lai, M. Y., Wong, J. P. Revisiting decimal misconceptions from a new perspective: The significance of whole number bias in the Chinese culture. *The Journal of Mathematical Behaviory*, 47 : 96–108, 2017
- [4] Ozkan, A., Ozkan, E. M. Misconceptions and learning difficulties in radical numbers. *Procedia-Social and Behavioral Science*, 46 : 462–447, 2012.
- [5] Ozkan, E. M., Ozkan, A. Misconception in exponential numbers in IST and IIND level primary school mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Science*, 46 : 65–69, 2012.
- [6] Ozkan, E. M. Misconceptions in radicals in high school mathematicss. *Procedia-Social and Behavioral Science*, 15 : 120–127, 2011.
- [7] Simmons, J. P., Nelson, L. D. RIntuitive confidence: Choosing between intuitive and nonintuitive alternatives. *Journal of Experimental Psychology*, 135(3) : 409–428, 2006
- [8] Vlassis, J. Making sense of the minus sign or becoming flexible in negativity. *Learning and instruction*, 14(5) : 469–484, 2004

Hyperbolic quasiperiodic motion of charged particle on 2-sphere

Igor O. Parasyuk

(National Taras Shevchenko University of Kyiv, Volodymyrs'ka str., 64, Kyiv, Ukraine, 01601)

E-mail: pio@univ.kiev.ua

Let \mathbb{E}^3 be 3-D Euclidean space endowed with a scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and cross-product $\cdot \times \cdot$, and let $\iota : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{E}^3$ stands for the inclusion map of 2-D sphere \mathbb{S}^2 into \mathbb{E}^3 : $\iota(\mathbb{S}^2) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 : \|\mathbf{x}\|^2 := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1 \}$.

We consider a partial case of Newton equation

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = f(t\omega, x) + P(t\omega, x)\dot{x} \quad (1)$$

that governs the motion of quasiperiodically excited particle on \mathbb{S}^2 . Here ∇ stands for the Levi-Civita connection of naturally induced Riemannian metric on \mathbb{S}^2 , $\{f(\varphi, \cdot)\}_{\varphi \in \mathbb{T}^k}$ is a smooth family of vector fields on \mathbb{S}^2 parametrized by points of the standard k -dimensional torus $\mathbb{T}^k := \mathbb{R}^k/2\pi\mathbb{Z}^k$, $\{P(\varphi, \cdot)\}_{\varphi \in \mathbb{T}^k}$ is a smooth family of $(1, 1)$ -tensor fields, and $\omega \in \mathbb{R}^k$ is the basic frequency vector with rationally independent components. For Eq. (1), there naturally arise the problem of quasiperiodic response, i.e. the existence problem for ω -quasiperiodic solution $t \mapsto x(t) := u(t\omega)$ associated with a continuous mapping $u(\cdot): \mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{S}^2$. Such a solution is said to be hyperbolic if the corresponding system in variations

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{x}(t)} \eta &= \zeta \\ \nabla_{\dot{x}(t)} \zeta &= [\nabla f(t\omega, x)\eta - R(\eta, \dot{x})\dot{x} + \nabla P(t\omega, x)(\eta, \dot{x}) + P(t\omega, x)\zeta]_{x=x(t)}, \end{aligned}$$

where R is the Riemann curvature tensor, is exponentially dichotomic.

We consider the case where the charged particle of unit mass is constrained to move on $\iota(\mathbb{S}^2) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 : \|\mathbf{x}\|^2 = 1 \}$ by the applied force Φ represented in the form

$$\Phi(t\omega, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3} + \mathbf{E}(t\omega) + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}(t\omega).$$

Here $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^3$ is a constant vector with norm $a := \|\mathbf{a}\|$; $\mathbf{E}(\cdot) : \mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{E}^3$ and $\mathbf{B}(\cdot) : \mathbb{T}^k \mapsto \mathbb{E}^3$ are smooth mappings. The force Φ can be naturally interpreted as the superposition of the Coulomb force caused by a charge placed at point \mathbf{a} and the Lorentz force caused by the electric field \mathbf{E} and the magnetic field \mathbf{B} . Let ι_* stands for the derivative of the inclusion map. In the case under consideration, the forces affecting the motion of the constrained particle are

$$\begin{aligned} \iota_* f(t\omega, x) &= \mathbf{f}(t\omega, \mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x} + a\mathbf{k}}{\|\mathbf{x} + a\mathbf{k}\|^3} + \mathbf{E}(t\omega) + \left\langle \frac{\mathbf{x} + a\mathbf{k}}{\|\mathbf{x} + a\mathbf{k}\|^3} - \mathbf{E}(t\omega), \mathbf{x} \right\rangle \mathbf{x}, \\ \iota_* P(t\omega, x)\dot{x} &= \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}(t\omega) - \langle \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}(t\omega), \mathbf{x} \rangle \mathbf{x}. \end{aligned}$$

where $\mathbf{x} := \iota(x)$, $\dot{\mathbf{x}} := \iota_* \dot{x}$, $\mathbf{k} := -\mathbf{a}/a$. First consider the case where the influence of magnetic field can be neglected.

Theorem 1. *Let $\mathbf{B}(\varphi) \equiv 0$. If there holds the inequality*

$$\frac{a}{(1+a)^3} - \langle \mathbf{E}(\varphi), \mathbf{k} \rangle > 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{T}^k \quad (1)$$

and there exists a point $\varphi_0 \in \mathbb{T}^k$ such that $\mathbf{E}(\varphi_0) \not\parallel \mathbf{k}$, then the system of charged particle on \mathbb{S}^2 has a unique ω -quasiperiodic solution $t \mapsto x(t)$ such that $0 < \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{k} \rangle \leq 1$ for all $t \in \mathbb{R}$ where $\mathbf{x}(t) := \iota \circ x(t)$. This solution is hyperbolic.

This theorem is obtained by applying results of [1]. We essentially use the so-called U -monotonicity property of the system $\nabla_x \dot{x} = f$ in the hemisphere $S^+ := \{x \in \mathbb{S}^2 : 0 < \langle \iota(x), \mathbf{k} \rangle \leq 1\}$.

Namely, to ensure such a property we have constructed a function $U(\cdot) \in C^\infty(S^+ \mapsto \mathbb{R})$ satisfying the conditions

$$\lambda_f(\varphi, x) + \frac{\langle \nabla U(x), f(\varphi, x) \rangle}{2} > 0 \quad , \quad \mu_U(x) \geq 2 \quad \forall (\varphi, x) \in \mathbb{T}^k \times S^+$$

where

$$\lambda_f(\varphi, x) := \min_{\eta \in T_x \mathbb{S}^2} \left\{ \frac{\langle \nabla f(\varphi, x) \eta, \eta \rangle}{\|\eta\|^2} \right\},$$

$$\mu_U(x) := \min_{\eta \in T_x \mathbb{S}^2} \left\{ \frac{\langle \nabla_\eta \nabla U(x), \eta \rangle}{\|\eta\|^2} - \frac{\langle \nabla U(x), \eta \rangle^2}{2 \|\eta\|^2} \right\}.$$

When $\mathbf{B}(\varphi) \neq 0$, we restrict ourselves to the case where $\langle \mathbf{E}(\varphi), \mathbf{k} \rangle = 0$ and $\mathbf{B}(\varphi) \perp \mathbf{E}(\varphi)$. We show how to establish sufficient condition for the existence of hyperbolic ω -quasiperiodic solution in the domain $\{x \in \mathbb{S}^2 : 0.5 < \langle \iota(x), \mathbf{k} \rangle \leq 1\}$. Set

$$E := \max_{\varphi \in \mathbb{T}^k} \|\mathbf{E}(\varphi)\|, \quad B := \max_{\varphi \in \mathbb{T}^k} \|\mathbf{B}(\varphi)\|$$

Define $z_+ = z_+(B, E)$ and $z_* = z_*(B, E)$, respectively, as the greatest roots of the equations

$$J(z) := z^2 - \frac{B^2}{4}z - \sqrt{3}(E+1) = 0,$$

$$I(z) := \frac{z^3}{3} - \frac{B^2}{8}z^2 - \sqrt{3}(E+1)z = I(z_+) + \sqrt{3}(E+1)z_+.$$

It turns out that the sought sufficient condition take the form

$$\frac{4a}{(1+a)^3} > \max \left\{ 9B^2 z_*, \frac{4E}{\sqrt{3}} + B^2 \right\}.$$

REFERENCES

- [1] I.O. Parasyuk. Quasiperiodic extremals of nonautonomous Lagrangian systems on Riemannian manifolds. *Ukrainian Math. J.*, 66(10): 1553–1574, 2015.

Representing trees of finite ultrametric spaces and weak similarities

E. Petrov

(Function theory department, Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NASU,
Dobrovolskogo str. 1, Slovyansk 84100, Ukraine)
E-mail: eugeniy.petrov@gmail.com

An *ultrametric* on a set X is a function $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, such that for all $x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (ii) $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$,
- (iii) $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$.

The pair (X, d) is called an *ultrametric space*. If condition (iii) is omitted, then (X, d) is a *semimetric space*, see [1]. The *spectrum* of a semimetric space (X, d) is the set

$$\text{Sp}(X) = \{d(x, y) : x, y \in X\}.$$

Recall that a *graph* is a pair (V, E) consisting of a nonempty set V and a (probably empty) set E elements of which are unordered pairs of different points from V . For a graph $G = (V, E)$, the sets $V = V(G)$ and $E = E(G)$ are called *the set of vertices* and *the set of edges*, respectively. A connected graph without cycles is called a *tree*. A tree T may have a distinguished vertex called the *root*; in this case T is called a *rooted tree*. With every finite ultrametric space (X, d) it is possible to associate a labeled rooted tree T_X , which is called a *representing tree* of the space X , see, for example, [2, P. 109].

Definition 1. Let T_1 and T_2 be rooted trees with the roots v_1 and v_2 respectively. A bijective function $\Psi: V(T_1) \rightarrow V(T_2)$ is an isomorphism of T_1 and T_2 if

$$(\{x, y\} \in E(T_1)) \Leftrightarrow (\{\Psi(x), \Psi(y)\} \in E(T_2))$$

for all $x, y \in V(T_1)$ and $\Psi(v_1) = v_2$. If there exists an isomorphism of rooted trees T_1 and T_2 , then we will write $T_1 \simeq T_2$.

Definition 2. Let (X, d) and (Y, ρ) be semimetric spaces. A bijective mapping $\Phi: X \rightarrow Y$ is a *weak similarity* if there exists a strictly increasing bijection $f: \text{Sp}(X) \rightarrow \text{Sp}(Y)$ such that the equality

$$f(d(x, y)) = \rho(\Phi(x), \Phi(y))$$

holds for all $x, y \in X$. If $\Phi: X \rightarrow Y$ is a weak similarity, then we write $X \stackrel{w}{=} Y$ and say that X and Y are *weakly similar*.

The notion of weak similarity of semimetric spaces was introduced in [3] in a slightly different form, where also some properties of these mappings were studied.

Denote by $\tilde{\mathfrak{R}}$ the class of finite ultrametric spaces X for which T_X has exactly one inner node at each level except the last level. The rooted tree T_X without the labels we will denote by \bar{T}_X .

The next theorem gives a description of finite ultrametric spaces for which the isomorphism of representing trees implies the weak similarity of the spaces.

Theorem 3 ([2]). *Let X be a finite ultrametric space. Then the following statements are equivalent.*

- (i) *The implication $(\bar{T}_X \simeq \bar{T}_Y) \Rightarrow (X \stackrel{w}{=} Y)$ holds for every finite ultrametric space Y .*
- (ii) $X \in \tilde{\mathfrak{R}}$.

Denote by \mathfrak{D} the class of all finite ultrametric spaces X such that the different internal nodes of T_X have the different labels. It is clear that $\tilde{\mathfrak{R}}$ is a subclass of \mathfrak{D} . A question arises whether there exist finite ultrametric spaces $X, Y \in \mathfrak{D}$ which do not belong to the class $\tilde{\mathfrak{R}}$ and for which the isomorphism of \bar{T}_X and \bar{T}_Y implies $X \stackrel{w}{=} Y$.

Let us define a rooted tree T with n levels by the following two conditions:

(A) There is only one inner node at the level k of T whenever $k < n - 1$.

(B) If u and v are different inner nodes at the level $n - 1$ then the numbers of offsprings of u and v are equal.

Denote by \mathfrak{T} the class of all finite ultrametric spaces X for which T_X satisfies conditions (A) and (B).

Theorem 4 ([2]). *Let $X \in \mathfrak{D}$ be a finite ultrametric space. Then the following statements are equivalent.*

- (i) *The implication $(\overline{T}_X \simeq \overline{T}_Y) \Rightarrow (X \stackrel{w}{=} Y)$ holds for every finite ultrametric space $Y \in \mathfrak{D}$.*
- (ii) $X \in \mathfrak{T}$.

REFERENCES

- [1] L. M. Blumenthal. *Theory and applications of distance geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.
- [2] E. Petrov. Weak similarities of finite ultrametric and semimetric spaces. *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, 10(2): 108–117, 2018.
- [3] O. Dovgoshey, E. Petrov. Weak similarities of metric and semimetric spaces. *Acta Mathematica Hungarica* 141(4): 301–319, 2013.

Functions with three critical points on closed non-oriented 3-manifolds

Alexandr Prishlyak

(Taras Shevchenko National University of Kyiv)

E-mail: prishlyak@yahoo.com

Bohdana Hladysh

(Taras Shevchenko National University of Kyiv)

E-mail: biv92@ukr.net

Let M be a closed smooth 3-manifold and $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ be smooth functions.

Definition 1. Functions $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ are called *topologically equivalent* if there are homeomorphisms $h : M \rightarrow M$ and $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f \circ h = k \circ g$. If k additionally preserve the orientation of \mathbb{R} , f and g are called *topologically conjugated* and homeomorphisms k, g by *conjugated*.

The problem of topological classification of Morse functions was solved in [1] and [2] for closed manifolds of different dimensions. The same result for arbitrary functions with isolated critical point on closed 2-manifolds was obtained in [3]. The relevance of this problem is contributed by the close connection with the Hamiltonian dynamical system's classification in dimensions 2 and 4. Local topological classification with isolated critical points and global topological classification with 3 critical points on oriented manifold were obtained in [4] The main issued of this research is to get similar results in non-oriented case.

It is known [3] that if p is an isolated critical point, $y = f(p)$, then there exists closed neighborhood $U(p)$ such that

$$f^{-1}(y) \cap U(p) = \text{Con}(\cup S_i^1).$$

Here $\text{Con}(\cup S_i^1)$ is a cone on a disjoint union of circles S_i^1 , that is the union of two-dimensional disks, the centers of which are pasted together.

In order to describe the behavior of function in a neighborhood of critical point p we will construct a tree (graph without cycles) Gf_p . Let $U(p)$ be the neighborhood described above, which boundary is the sphere S^2 and $\partial(f^{-1}(y) \cap U(p)) = \cup S_i^1$ is the union of the embedded circles. To each component D_j of $S^2 \setminus \cup S_i^1$ we put in correspondence vertex v_j of the graph Gf_p and to each circle S_i^1 we put an edge e_i . The vertex v_j is incident to e_i if the boundary of D_j contains S_i^1 . Thus, v_i and v_j are connected by an edge if D_i and D_j are neighbor.

Theorem 2. *Let p and q be isolated critical points of smooth functions $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ and $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ correspondingly. Then there are neighborhoods U of p and V of q and homeomorphisms $h : U \rightarrow V$ and $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $f \circ h = k \circ g$ if and only if graphs Gf_p and Gg_q are isomorphic.*

We construct a distinguishing graph Gf for the function f with 3 critical points on 3-manifold, such that it has the following properties:

1) The vertices of the graph are divided into four types: white, black, gray and non-colored. The number of vertices of each color (the first three types) is same. The non-colored vertices have degree 3. Each white vertex is equipped with the orientation number (+1 or -1).

2) If from the graph we remove vertices of one color and edges that incident to them, we obtain simply-connected graphs (tree) Gf'_i .

Theorem 3. *Let $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ be smooth functions that have three critical points on a smooth closed 3-manifold. The functions f and g are conjugated if and only if their distinguishing graphs are equivalent.*

Example 4. The number of

- (1) topologically non-equivalent and topologically non-conjugated functions defined on $S^1 \tilde{\times} S^2$ equals 1;
- (2) topologically non-equivalent functions with three critical points on $S^1 \tilde{\times} S^2 \sharp S^1 \tilde{\times} S^2$ equals 16;
- (3) topologically non-conjugated functions defined on $S^1 \tilde{\times} S^2 \sharp S^1 \tilde{\times} S^2$ equals 24.

REFERENCES

- [1] Vladimir Arnold. Topological classification of Morse functions and generalizations of Hilbert's 16th problem. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 10 : 227–236, 2007.
- [2] Aleksei Bolsinov, Anatolii Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology classification*. Boca Raton & London & New York & Washington, D.C. : Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [3] Alexandr Prishlyak. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface. *Topology and its application*, 119(3) : 257–267, 2002.
- [4] Alexandr Prishlyak. *Topological properties of functions on two and three dimensional manifolds, Palmarium. Academic publishing*. Saarbrücken : 2012.

A note on similarity of matrices

Volodymyr M. Prokip

(IAPMM NAS of Ukraine, L'viv, Ukraine)

E-mail: v.prokip@gmail.com

Let \mathbb{F} be a field of characteristic 0. Denote by $\mathbb{F}_{m \times n}$ the set of $m \times n$ matrices over \mathbb{F} and by $\mathbb{F}_{m \times n}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ the set of $m \times n$ matrices over the polynomial ring $\mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Denote by $GL(n, \mathbb{F})$ the group of invertible matrices in $\mathbb{F}_{n \times n}$. In what follows, we denote by I_n the $n \times n$ identity matrix and by $0_{n,k}$ the zero $m \times n$ matrix. The Kronecker product of matrices $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}_{m \times n}$ and B is denoted by

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Matrices $A \in \mathbb{F}_{n \times n}$ and $B \in \mathbb{F}_{n \times n}$ are said to be similar, if there is a nonsingular matrix $P \in \mathbb{F}_{n \times n}$ such that $A = PBP^{-1}$. Two tuples of $n \times n$ matrices over \mathbb{F}

$$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\} \quad \text{and} \quad \mathbf{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$$

are said to be simultaneously similar if there exists a matrix $U \in GL(n, \mathbb{F})$ such that

$$A_i = U^{-1}B_iU \quad \text{for all} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

The task of classifying square matrices up to similarity is one of the core and oldest problems in linear algebra (see [2], [4], [5], [9], [7] and references therein), and it is generally acknowledged that it is also one of the most hopeless problems already for $k = 2$. Standard approaches for deciding similarity depend upon the Jordan canonical form, the invariant factor algorithm and the Smith form, or the closely related rational canonical form. In numerical linear algebra, this leads to deep algorithmic problems, unsolved even up to this date, that are caused by numerical instabilities in solving eigenvalue problems or by the inability to effectively compute sizes of the Jordan blocks or degrees of invariant factors, if the matrix entries are not known precisely.

The purpose of this report is to give an exposition of geometric ideas to solution of similarity of matrices over a field. We propose new necessary and sufficient conditions under which matrices $A \in \mathbb{F}_{n \times n}$ and $B \in \mathbb{F}_{n \times n}$ are similar.

Chris Byrnes and Michael Gauger [6] derived a new type of rank conditions for algebraically deciding similarity of arbitrary pairs of matrices over a field \mathbb{F} . Their main result is that two matrices $A, B \in \mathbb{F}_{n \times n}$ are similar if and only if the following two conditions hold:

1. The characteristic polynomials coincide, i.e. $\det(I_n x - A) = \det(I_n x - B)$.
2. $\text{rank}(I_n \otimes A - A \otimes I_n) = \text{rank}(I_n B - B \otimes I_n) = \text{rank}(B \otimes I_n - I_n \otimes A)$.

In subsequent work by J.D. Dixon [1] it was shown that the first condition on the characteristic polynomials is superfluous, so that similarity can be solely decided based on rank computations. He proved that two matrices $A, B \in \mathbb{F}_{n \times n}$ are similar if and only if

$$r^2(A, B) = r(A, A)r(B, B).$$

Here $r(A, B) = \text{rank}(B \otimes I_n - I_n \otimes A)$ and similarly for $r(A, A)$ and $r(B, B)$.

Over an algebraically closed field, S. Friedland [3] showed the closely related linear dimension inequality

$$2 \dim \text{Ker}(B \otimes I_n - I_n \otimes A) \leq \dim \text{Ker}(A \otimes I_n - I_n \otimes A) + \dim \text{Ker}(B \otimes I_n - I_n \otimes B)$$

and proved that equality holds if and only if matrices A and B are similar.

For given two matrices $A, B \in \mathbb{F}_{n \times n}$ we define the matrix

$$M = [A \otimes I_n - I_n \otimes B] \in \mathbb{F}_{n^2 \times n^2}.$$

For matrix M there exist a matrix $W \in GL(n^2, \mathbb{F})$ such that

$$MW = H_M = \begin{bmatrix} 0_{l,1} & 0_{l,n^2-1} \\ H_1 & 0_{m_1,n^2-1} \\ H_2 & 0_{m_2,n^2-2} \\ \dots & \dots \\ H_k & 0_{m_k,r} \end{bmatrix}$$

is the lower block-triangular matrix and l is the number of first zero rows of matrix M . The matrices H_i are defined as follows:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ * \end{bmatrix} \in M_{m_1,1}(\mathbb{F}), \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix} \in M_{m_2,2}(\mathbb{F}), \quad H_r = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \in M_{m_r,n^2-r}(\mathbb{F})$$

and $l + m_1 + m_2 + \dots + m_k = n^2$.

The lower block-triangular matrix H_M is called the Hermite normal form of the matrix M and the form H_M is uniquely determined by M (see [8]). It is evident that $\text{rank } H_M = n^2 - r$.

Let x_1, x_2, \dots, x_r be independent variables. Consider the vector

$$W \begin{bmatrix} 0_{n^2-r,1} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(x_1, \dots, x_r) \\ W_2(x_1, \dots, x_r) \\ \vdots \\ W_n(x_1, \dots, x_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(\bar{x}) \\ W_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ W_n(\bar{x}) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_{n^2,1}[x_1, x_2, \dots, x_r],$$

where $W_i(\bar{x}) = W_i(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{F}_{n,1}[x_1, x_2, \dots, x_r]$. Put

$$W(\bar{x}) = [W_1(\bar{x}) \quad W_2(\bar{x}) \quad \dots \quad W_n(\bar{x})] \in \mathbb{F}_{n,n}[x_1, x_2, \dots, x_r].$$

Theorem 1. *If matrices $A, B \in \mathbb{F}_{n \times n}$ are similar over \mathbb{F} then $\text{rank } M \leq n^2 - n$.*

Theorem 2. *Matrices $A, B \in \mathbb{F}_{n \times n}$ are similar over \mathbb{F} if and only if matrix $W(\bar{x})$ is nonsingular.*

Corollary 3. *If $A = B \in \mathbb{F}_{n \times n}$ then matrix $W(\bar{x})$ is nonsingular.*

REFERENCES

- [1] J.D. Dixon. An isomorphism criterion for modules over a principal ideal domain. *Linear and Multilinear Algebra*, 8: 69-72, 1979.
- [2] Yu.A. Drozd. Representations of commutative algebras. *Functional Analysis and Its Applications*, 6(4): 286-288, 1972.
- [3] S. Friedland. Analytic similarity of matrices. *In Algebraic and Geometric Methods in Linear Systems Theory*, (eds. C.I. Byrnes and C.F. Martin), Lectures in Applied Math. Amer. Math. Soc., 18: 43-85, 1980.
- [4] S. Friedland. Simultaneous similarity of matrices. *Adv. Math.*, 50: 189-265, 1983.
- [5] S. Friedland. *Matrices: Algebra, Analysis and Applications*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2015.
- [6] M.A. Gauger and C.I. Byrnes. Characteristic free, improved decidability criteria for the similarity problem. *Linear and Multilinear Algebra*, 5: 153-158, 1977.
- [7] K.D. Ikramov. How to check whether given square matrices are congruent? *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*. 439: 99-106, 2015.
- [8] E.D. Nering. *Linear algebra and matrix theory*. New York & London: John Wiley and Sons, Inc., 1963.
- [9] V.V. Sergeichuk. Canonical matrices for linear matrix problems. *Linear Algebra Appl.*, 317: 53-102, 2000.

Inversion with respect to an elliptic cycle of a hyperbolic plane of positive curvature

Lyudmila N. Romakina

(413107, 26 G, Turgeneva Street, Engels, Russia)

E-mail: romakinaln@mail.ru

In the Cayley–Klein projective interpretation, the hyperbolic plane \widehat{H} of positive curvature (see, for instance, [1], [2]) is defined as the exterior (with respect to the oval curve γ , called the absolute of the plane \widehat{H}) domain of the projective plane P_2 . A complete Lobachevskii plane Λ^2 is realized on the domain of the plane P_2 that is interior with respect to the oval curve γ . The planes Λ^2 and \widehat{H} are components of the expanded hyperbolic plane H^2 . The group G of projective automorphisms of the oval curve γ is the fundamental group of transformations for \widehat{H} , H^2 , and the Lobachevskii plane Λ^2 .

In articles [3] and [4], we studied the inversion of the plane \widehat{H} with respect to a hypercycle and a horocycle, respectively. In the present work we investigate the inversion \mathbf{I} with respect to an elliptic cycle of the plane \widehat{H} . We obtain the analytical expression of the inversion in the canonical frame of the first type, and we define the images of lines and cycles which are concentric with the inversion base. Also we investigate the horizons of elliptic and hyperbolic cycles of the plane \widehat{H} .

We formulate the main results of our research in the following theorems. We denote the cycle of the plane \widehat{H} with centre S and radius r by $\omega(S, r)$.

Theorem 1. *Let $\omega(S, r)$ be an elliptic cycle of the hyperbolic plane \widehat{H} of positive curvature. Assume that a hyperbolic cycle $\omega_0(S, r_0)$ of the plane \widehat{H} has the common horizon $\tilde{\omega}(S, \tilde{r})$ with $\omega(S, r)$. Then the inversion \mathbf{I} with respect to the elliptic cycle $\omega(S, r)$ possesses the following properties.*

1. *The cycles $\omega(S, r)$ and $\omega_0(S, r_0)$ are invariant under the inversion \mathbf{I} . The cycle $\tilde{\omega}(S, \tilde{r})$ corresponds under \mathbf{I} to the absolute of the plane \widehat{H} .*

2. *An elliptic cycle $\omega_e(S, r_e)$ of \widehat{H} corresponds under \mathbf{I} to an elliptic cycle $\omega'_e(S, r'_e)$ with radius r'_e which satisfies the following conditions:*

$$\operatorname{tg} \frac{r'_e}{\rho} = \operatorname{tg}^2 \frac{r}{\rho} \operatorname{ctg} \frac{r_e}{\rho}, \quad \operatorname{tg} \frac{r'_e}{\rho} = \tanh \frac{\tilde{r}}{\rho} \operatorname{ctg} \frac{r_e}{\rho}, \quad \operatorname{tg} \frac{r'_e}{\rho} = \tanh^2 \frac{r_0}{\rho} \operatorname{ctg} \frac{r_e}{\rho},$$

where $\rho, \rho \in \mathbb{R}_+$, is a curvature radius of the plane \widehat{H} .

The cycles $\omega_e(S, r_e)$ and $\omega'_e(S, r'_e)$ lie in the different domains of the point S valiana with respect to the cycle $\omega(S, r)$. If $r = \pi\rho/4$, then the height of the cycle $\omega'_e(S, r'_e)$ is equal to r_e .

3. *Assume that $r < \pi\rho/4$, that is, the cycles $\tilde{\omega}(S, \tilde{r})$ and $\omega_0(S, r_0)$ lie in the plane \widehat{H} .*

If a hyperbolic cycle $\omega_h(S, r_h)$ of the plane H^2 is interior with respect to the cycle $\tilde{\omega}(S, \tilde{r})$, then under \mathbf{I} the cycle $\omega_h(S, r_h)$ corresponds to an equidistant $\omega'_h(S, r'_h)$ of the plane Λ^2 . In this case the module of the height of the equidistant $\omega'_h(S, r'_h)$ grows when the radius of the cycle $\omega_h(S, r_h)$ grows.

If a hyperbolic cycle $\omega_h(S, r_h)$ of the plane H^2 lies between the cycles $\tilde{\omega}(S, \tilde{r})$ and $\omega_0(S, r_0)$, then under \mathbf{I} the cycle $\omega_h(S, r_h)$ corresponds to a hyperbolic cycle $\omega'_h(S, r'_h)$ between the absolute of the plane H and the cycle $\omega_0(S, r_0)$. In this case the cycles $\omega_h(S, r_h)$ and $\omega'_h(S, r'_h)$ together approach the cycle ω_0 or move away from this cycle.

4. *Assume that $r = \pi\rho/4$, that is, the cycles $\tilde{\omega}$ and ω_0 coincide with the absolute of the plane \widehat{H} . The hyperbolic cycle $\omega_h(S, r_h)$ of the plane \widehat{H} corresponds under the inversion \mathbf{I} to an equidistant $\omega'_h(S, r'_h)$ of the Lobachevskii plane. In this case the module of the height of the equidistant $\omega'_h(S, r'_h)$ grows when the radius of the cycle $\omega_h(S, r_h)$ grows.*

5. *Assume that $r > \pi\rho/4$, that is, the cycles $\tilde{\omega}$ and ω_0 are equidistants of the plane Λ^2 .*

Let ω_h be an equidistant of the plane Λ^2 , and let ω_h lies in the interior domain with respect to the cycle $\tilde{\omega}$. Then $\omega_h(S, r_h)$ corresponds under the inversion \mathbf{I} to the hyperbolic cycle $\omega'_h(S, r'_h)$ of the plane \widehat{H} . In this case the module of the height of the equidistant $\omega_h(S, r_h)$ grows when the radius of the cycle ω'_h grows.

Let ω_h be an equidistant of the plane Λ^2 , and let ω_h lies between the equidistants $\tilde{\omega}$ and ω_0 . Then $\omega_h(S, r_h)$ corresponds under the inversion \mathbf{I} to the equidistant $\omega'_h(S, r'_h)$ which lies between the absolute of the plane \widehat{H} and the equidistant ω_0 . In this case the equidistants $\omega_h(S, r_h)$ and $\omega'_h(S, r'_h)$ together approach the equidistant ω_0 or move away from this equidistant.

6. The radius r'_h of the image ω'_h of a hyperbolic cycle ω_h of the plane H^2 under the inversion \mathbf{I} can be expressed by the formulae:

$$\tanh \frac{r'_h}{\rho} = \operatorname{tg}^2 \frac{r}{\rho} \coth \frac{r_h}{\rho}, \quad \tanh \frac{r'_h}{\rho} = \tanh \frac{\tilde{r}}{\rho} \coth \frac{r_h}{\rho}, \quad \tanh \frac{r'_h}{\rho} = \tanh^2 \frac{r_0}{\rho} \coth \frac{r_h}{\rho}.$$

Theorem 2. The image l' of a line l under the inversion \mathbf{I} with respect to the elliptic cycle ω of the plane \widehat{H} is symmetric with respect to the common point of the line l and the base of ω . The curve l' contains the centre of the cycle ω , the absolute points of this cycle, the pole of the line l with respect to the cycle ω , and the points of intersection of the line l with ω .

If the line l is the axis of an elliptic cycle ω of the plane \widehat{H} , then the image of l under the inversion \mathbf{I} with respect to ω is couple of lines containing the line l and the base of the cycle ω .

If the line l passes through an absolute point X of the cycle ω , then the image of the line l under the inversion \mathbf{I} is couple of lines containing the parabolic line connecting the center of cycle ω with its absolute point X , and the hyperbolic line connecting the second absolute point Y of ω with the point of the intersection of l and ω .

If the line l is the base of the cycle ω , then the image of l is the couple of parabolic lines with the common point at the cycle ω centre.

If the pole of the line l with respect to the cycle ω lies in the plane Λ^2 , then the image of the line l is a hyperbola (see [5], [2, Section 2.3]) of the plane \widehat{H} .

If the pole of the line l with respect to the cycle ω lies on the absolute of the plane \widehat{H} , then the image of the line l is a hyperbola of the plane \widehat{H} which has one branch and one interior domain.

If the pole of the line l with respect to the cycle ω lies in the plane \widehat{H} and the point of the intersection of the line l with the base of ω lies in the plane Λ^2 , then the image of the line l is a bihyperbola (see [5], [2, Section 2.3]) of the plane \widehat{H} which has one interior domain.

If the pole of the line l with respect to the cycle ω and the point of the intersection of the line l with the base of ω lie in the plane \widehat{H} , then the image of the line l is a bihyperbola of the plane \widehat{H} which has two interior domains.

REFERENCES

- [1] Romakina L. N. *Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature. P. 1: Trigonometry*, Publishing House of the Saratov University : Saratov, 2013.
- [2] Romakina L. N. *Geometry of the hyperbolic plane of positive curvature. P. 2: Transformations and simple partitions*, Publishing House of the Saratov University : Saratov, 2013.
- [3] Lyudmila N. Romakina. Inversion with respect to a hypercycle of a hyperbolic plane of positive curvature. *J. Geom.*, 107(1) : 137–149, 2016.
- [4] Romakina L. N. Inversion with respect to a horocycle of a hyperbolic plane of positive curvature. *Tr. Inst. Mat.*, 25(1) : 82–92, 2017.
- [5] Romakina L. N. Oval lines of the hyperbolic plane of positive curvature. *zv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 12(3) : 37–44, 2012.

On the relationship between the Smith normal forms of matrices and of their least common multiple

Romaniv A. M.

(Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine)

E-mail: romaniv_a@ukr.net

Let R be a commutative principal ideal domain with $1 \neq 0$, $M_n(R)$ be a ring $n \times n$ matrices over R and let $A, B \in M_n(R)$.

If $A = BC$, then we will say that B is a left divisor of matrix A and A is a right multiple of B . Moreover, if $M = AA_1 = BB_1$ then the matrix M is called a common right multiple of matrices A and B . If in addition the matrix M is a left divisor of any other common right multiple of matrices A and B then we say that M is a **least common right multiple** of A and B . ($[A, B]_r$ in notation).

In the 80's of the last century, M. Newman formulated the problem to establish of the relationship between the Smith normal forms of matrices and of their least common multiple and greatest common divisor over commutative principal ideal domain. The most important results in the study of M. Newman's problem are obtained in the papers [1], [2, 3] and [4].

Let A be non-singular $n \times n$ matrix over R . Then there exist invertible matrices P_A, Q_A , such that

$$P_A A Q_A = E = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \text{ where } \varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}, i = 1, \dots, n-1.$$

The matrix E is called the Smith normal form, P_A and Q_A are called left and right transforming matrices for matrix A . Denote by \mathbf{P}_A the set of all left transforming matrices for matrix A . Let the Smith normal form of the matrix B is

$$B \sim \Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n), \text{ where } \delta_i | \delta_{i+1}, i = 1, \dots, n-1.$$

Consider the set of matrices

$$\mathbf{L}(E, \Delta) = \{L \in \text{GL}_n(R) \mid \exists L_1 \in M_n(R) : LE = \Delta L_1\}.$$

Theorem 1. *Let R be a commutative principal ideal domain and let*

$$A \sim \text{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon), B \sim \text{diag}(1, \dots, 1, \delta),$$

$P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n$, $P_B \in \mathbf{P}_B$, $P_A \in \mathbf{P}_A$. Then

$$[A, B]_r = (L_A P_A)^{-1} \Omega = (L_B P_B)^{-1} \Omega,$$

where

$$\Omega = \text{diag}\left(\frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{n1})}, \varepsilon, \dots, \varepsilon, [\varepsilon, \delta]\right),$$

L_A, L_B belong to sets $\mathbf{L}(\Omega, E)$, $\mathbf{L}(\Omega, \Delta)$ respectively and satisfy the equality:

$$(P_B P_A^{-1}) L_A = L_B.$$

REFERENCES

- [1] N. Erawaty, M. Bahri, L. Haraynto, A. Amir Greatest common divisors of Euclidean domain matrices. *Far East Journal of Math. Sci.*, 101(4) : 855–872, 2017.
- [2] A. M. Romaniv, V. P. Shchedryk Greatest common divisor of matrices one of which is a disappear matrix. *Ukrainian Mathematical Journal*, 66(3) : 425–430, 2014.
- [3] A. M. Romaniv, V. P. Shchedryk The greatest common left divisor and the least common right multiple of second order matrices. *Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc.*, (9) : 269–284, 2012.
- [4] R. C. Thompson Left multiples and right divisors of integral matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 19(3) : 287–295, 1986.

Estimates for the surface with given average curvature

Olga Ryzanova

(13-30, Osetinskaya St., Samara 443015, Russia)

E-mail: olga.riazanova2011@ya.ru

Let S be a compact regular surface locally defined by equation $r = r^S(u, v)$ in R^3 . Let a function $H(x, y, z)$ be given in some locality of S . We consider a question of the existence some surface S^f homeomorphic to S , defined by an equation $r = r^S(u, v) + f(u, v)\bar{n}^S(u, v)$ and in each point A has average curvature $H(A)$. This problem has been considered in [1] (271-303) and in [2] for the case when S is a sphere or a torus.

There are coordinate system (u, v, ρ) emerges in the locality of S , where (u, v) - local coordinates on S and ρ is offset along perpendicular to S .

This problem reduces to the question of some second-order differential equation solvability on $f(u, v)$ within S . Evaluation of solution and of first derivatives of solution is required for the proof of solvability of this equation.

Let S^ρ be a surface defined by an equation $r = r^S(u, v) + \rho\bar{n}^S(u, v)$ where ρ is a constant, such that $|\rho| < c$. Here $c = \min_{(A \in S, i=1,2)} \{ \frac{1}{k_i(A)} \}$ and $k_i(A)$ are main normal curvatures of S at the point A . Average curvature of S^ρ equals $H^\rho = \frac{k_1}{1-\rho k_1} + \frac{k_2}{1-\rho k_2}$.

We represent H as the sum

$$H(u, v, \rho) = H^\rho(u, v, \rho) + h(u, v, \rho).$$

Theorem 1. *If a and b are constants and $-c < a < b < c$, and if*

$$h(u, v, \rho) < 0 \quad \text{when} \quad \rho < a,$$

$$h(u, v, \rho) > 0 \quad \text{when} \quad \rho > b,$$

there are the following estimates hold for the function $f(u, v)$:

$$a < f(u, v) < b.$$

REFERENCES

- [1] I. Bakelman, A. Verner, B. Kantor. Introduction in differential geometry at all. *Science* Moscow: 1973.
- [2] T. Golubcova. Estimates of torus homeomorphic surface in E^3 with given average curvature *Geometry and topology* vol.2, Leningrad: 76-88, 1974.

Kinematic renormalization of energy in the gravity

Samokhvalov S. E.

(DSTU, Kamyanske, Ukraine)

E-mail: serg_samokhval@ukr.net

The Lagrangian in the theory of gravity in the affine frame (TGAF) [1] is

$$L_\gamma = \delta_{ab}^{\mu\nu} g^{bd} \gamma_{\mu c}^a \gamma_{\nu d}^c, \quad (1)$$

where $\delta_{ab}^{\mu\nu}$ is the alternator, $e_a = h_a^\mu \partial_\mu$ is the affine frame in the Riemann space, and $g_{ab} = e_a \cdot e_b$, γ_{bc}^a are coefficients of the torsion-free and metric-compatible affine connection in the affine frame e_a .

Under GL^g -transformations $e'_a = L_a^{a'} e_{a'}$ Lagrangian L_γ is transformed by the rule:

$$L_{\gamma'} = L_\gamma + \nabla_\sigma \Delta V^\sigma, \quad (2)$$

where $\Delta V^\sigma = \delta_{ab}^{\sigma\nu} g^{bd} \partial_\nu L_{c'}^a L_d^{c'}$. Transformation (2) is canonical transformation and don't changes the equations of motions – Einstein equations:

$$G_a^\mu \equiv -\nabla_\sigma B_a^{\mu\sigma} - t_a^\mu = \tau_a^\mu, \quad (3)$$

but changes energy-momentum tensor of the gravitational field t_a^μ and the superpotential $B_a^{\mu\sigma}$ of the complete energy-momentum tensor of the gravitational and matter fields $T_a^\mu = t_a^\mu + \tau_a^\mu$:

$$t_a'^\mu = t_a^\mu - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{h_\mu^a} (\sqrt{-g} \nabla_\sigma \Delta V^\sigma), \quad (4)$$

$$B_a'^{\mu\nu} = B_a^{\mu\nu} + \partial_{\partial_\nu h_\mu^a} \nabla_\sigma \Delta V^\sigma. \quad (5)$$

This changing permits to renormalize the complete energy by changing general reference frames.

REFERENCES

- [1] S. E. Samokhvalov. General reference frames and definition of energy in theory of gravity (in Ukrainian). *Math. Modelling.*, 2(35), 2016.

Fuzzy metrization of the spaces of idempotent measures

Aleksandr Savchenko

(Kherson State Agrarian University)

E-mail: savchenko.o.g@ukr.net

Let X be a compact Hausdorff space. As usual, by $C(X)$ we denote the space of continuous functions on X endowed with the sup-norm. For any $c \in \mathbb{R}$, we denote by c_X the constant function on X taking the value c .

Let $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. We consider the natural order on \mathbb{R}_{\max} . We also use the following traditional notation from idempotent mathematics: \oplus for max and \odot instead of $+$ (this may concern either numbers or functions).

A functional $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be an *idempotent measure* (Maslov measure) if the following holds: (1) $\mu(c_X) = c$; (2) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$; (3) $\mu(\lambda \odot \varphi) = (\lambda \odot \mu)\varphi$. Remark that the notion of idempotent measure is a counterpart of the notion of probability measure in the so called idempotent mathematics.

The set $I(X)$ is endowed with the weak* topology (see [1]). Actually, the construction I determines a functor in the category of compact Hausdorff spaces. The space $I(X)$ is known to be metrizable for metrizable X .

The aim of the talk is to provide a fuzzy metrization of the space $I(X)$ for fuzzy metrizable X . We use the notion of fuzzy metric in the sense of George and Veeramani [2]. Recall that a triple $(X, M, *)$ is said to be a fuzzy metric space if X is an arbitrary set, $*$ is a continuous t-norm and M is a fuzzy set on $X \times X \rightarrow (0, \infty)$ satisfying the following conditions for all $x, y, z \in X$ and $s, t \in (0, \infty)$:

- (1) $M(x, y, t) > 0$;
- (2) $M(x, y, t) = 1$ if and only if $x = y$;
- (3) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;
- (4) $M(x, y, t) * M(y, z, s) = M(x, z, t + s)$;
- (5) the function $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ is continuous.

Our approach is based on the notion of density of idempotent measure. Also, we use the fuzzy Hausdorff metric on the hyperspaces of fuzzy metric spaces [3]. We also show that the obtained construction determines a functor in the category of compact fuzzy metric spaces and non-expanding maps. We establish some properties of this functor related to the notion of monad.

REFERENCES

- [1] Mikhail M. Zarichnyi. Spaces and maps of idempotent measures. *Izvestiya: Mathematics*, 74(3) : 45–64, 2010.
- [2] A. George and P. Veeramani. On some result in fuzzy metric space. *Fuzzy Sets and System*, 64 : 395–399, 1994.
- [3] J. Rodríguez-López, S. Romaguera. The Hausdorff fuzzy metric on compact sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 147 : 273–283, 2004.

General form of the Maxwellian distribution with arbitrary density

Olena Sazonova

(School of Mechanics and Mathematics, V.N. Karazin Kharkiv National University, Ukraine)

E-mail: olena.s.sazonova@karazin.ua

The kinetic Boltzmann equation is one of the central equations in classical mechanics of many-particle systems. For the model of hard spheres it has a form [1, 2]:

$$D(f) = Q(f, f). \quad (1)$$

As, analogous to [3], we will also consider the distribution function of the form:

$$f = \int_{\mathbb{R}^3} du \int_0^{+\infty} d\rho \varphi(t, x, u, \rho) M(v, u, \rho), \quad (2)$$

which contains the global Maxwellian

$$M(v, u, \rho) = \rho \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-u)^2}. \quad (3)$$

It is required to find $\varphi(t, x, u, \rho)$ and the behavior of all parameters so that the uniform-integral (mixed) or pure integral remainder [4], i.e. the functionals of the form

$$\Delta = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv, \quad (4)$$

$$\Delta_1 = \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \int_{R^3} |D(f) - Q(f, f)| dv, \quad (5)$$

become vanishingly small.

In this work we succeeded a few to generalize results, which obtained in [3], where distributions generalize bimodal distributions obtained earlier. It was assumed that the mass velocity of the global Maxwellian does not take fixed discrete values and becomes an arbitrary parameter taking any values in \mathbb{R}^3 . Now we constructed the continual approximate solution of the Boltzmann equation (1) with arbitrary density [5].

Also some sufficient conditions which minimized the uniform-integral remainder and pure integral remainder between the left- and the right-hand sides of this equation are founded.

REFERENCES

- [1] C. Cercignani. *The Boltzman Equation and its Applications*. Springer, New York, 1988.
- [2] M.N. Kogan. *The dynamics of a Rarefied Gas*. Nauka, Moscow, 1967.
- [3] V.D. Gordevskyy, E.S. Sazonova Continuum analogue of bimodal distributions. *Theor. Math. Phys.*, 171(3) : 839–847, 2012.
- [4] V.D. Gordevskyy An approximate two-flow solution to the Boltzmann equation. *Theor. Math. Phys.*, 114(1) : 99–108, 1998.
- [5] V.D. Gordevskyy, E.S. Sazonova Continual approximate solution of the Boltzmann equation with arbitrary density. *Mat. Stud.*, 45(2) : 194–204, 2016.

The commutator and centralizer of Sylow subgroups of alternating and symmetric groups, its minimal generating set

Ruslan Viacheslavovich Skuratovskii

(Ukraine, Kiev)

E-mail: ruslcomp@mail.ru

Given a permutational wreath product sequence of cyclic groups [1, 3] of order 2 we research a commutator width of such groups and some properties of its commutator subgroup. Commutator width of Sylow 2-subgroups of alternating group A_{2^k} , permutation group S_{2^k} and $C_p \wr B$ were founded. The result of research was extended on subgroups $(Syl_2 A_{2^k})'$, $p > 2$. The paper presents a construction of commutator subgroup of Sylow 2-subgroups of symmetric and alternating groups. Also minimal generic sets of Sylow 2-subgroups of A_{2^k} were founded. Elements presentation of $(Syl_2 A_{2^k})'$, $(Syl_2 S_{2^k})'$ was investigated. We prove that the commutator width [2] of an arbitrary element of a discrete wreath product of cyclic groups C_{p_i} , $p_i \in \mathbb{N}$ is 1.

Lemma 1. *For any group B and integer $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ if $w \in (B \wr C_p)'$ then w can be represented as the following wreath recursion*

$$w = (r_1, r_2, \dots, r_{p-1}, r_1^{-1} r_2^{-1} \dots r_{p-1}^{-1} \prod_{j=1}^k [f_j, g_j]),$$

where $r_1, \dots, r_{p-1}, f_j, g_j \in B$, and $k \leq cw(B)$.

Lemma 2. *An element $(g_1, g_2)\sigma^i \in G'_k$ iff $g_1, g_2 \in G_{k-1}$ and $g_1 g_2 \in B'_{k-1}$.*

Lemma 3. *For any group B and integer $p \geq 2$ inequality*

$$cw(B \wr C_p) \leq \max(1, cw(B))$$

holds.

Corollary 4. *If $W = C_{p_k} \wr \dots \wr C_{p_1}$ then for $k \geq 2$ $cw(W) = 1$.*

Corollary 5. *Commutator width $cw(Syl_p(S_{p^k})) = 1$ for prime p and $k > 1$ and commutator width $cw(Syl_p(A_{p^k})) = 1$ for prime $p > 2$ and $k > 1$.*

Theorem 6. *Elements of $Syl_2 S'_{2^k}$ have the following form $Syl_2 S'_{2^k} = \{[f, l] \mid f \in B_k, l \in G_k\} = \{[l, f] \mid f \in B_k, l \in G_k\}$.*

Theorem 7. *Commutator width of the group $Syl_2 A_{2^k}$ equal to 1 for $k \geq 2$.*

Proposition 8. *The subgroup $(syl_2 A_{2^k})'$ has a minimal generating set of $2k - 3$ generators.*

REFERENCES

- [1] R. Skuratovskii, Generators and relations for Sylows p -subgroup of group S_n .(in ukrainian) Naukovi Visti KPI. 2013, N. 4 pp. 94 -105.
- [2] Alexey Muranov, Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width. arXiv:math/0608688v4 [math.GR] 12 Sep 2009.
- [3] R. V. Skuratovskii, Structure and minimal generating sets of Sylow 2-subgroups of alternating groups. Source: <https://arxiv.org/abs/1702.05784v2>

Semi-lattice of varieties of quasigroups with linearity

Fedir Sokhatsky

(Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 21021, Ukraine)

E-mail: fmsokha@ukr.net

Halyna Krainichuk

(Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnytsia, 21021, Ukraine)

E-mail: kraynichuk@ukr.net

We consider two-placed functions defined on an arbitrary set Q , called *carrier*, whose domain is $Q \times Q$ and the functions are called *binary operations*. *Left* and *right multiplications* are defined on the set of all binary operations \mathcal{O}_2 by

$$(f \oplus_{\ell} g)(x, y) := f(g(x, y), y) \quad \text{and} \quad (f \oplus_r g)(x, y) := f(x, g(x, y))$$

respectively. The obtained groupoids $(\mathcal{O}_2; \oplus_{\ell})$ and $(\mathcal{O}_2; \oplus_r)$ are called *left* and *right symmetric monoids*.

An operation f is called *left (right) invertible* if it has an invertible element ${}^{\ell}f$ (rf) in the left (right) symmetric monoid and *invertible* if both are true. ${}^{\ell}f$ and rf are called *left* and *right divisions*. The sequence $f, {}^{\ell}f, {}^r({}^{\ell}f), {}^rf, \dots$ consists of at most six different operations called *parastrophes* of f :

$${}^{\sigma}f(x_{1\sigma}, x_{2\sigma}) = x_{3\sigma} : \Leftrightarrow f(x_1, x_2) = x_3, \quad \sigma \in S_3 := \{\tau \mid \tau \text{ is a permutation of } \{1, 2, 3\}\}.$$

Every parastrophe of an invertible operation is invertible. In other words, the set of all invertible binary operations Δ_2 defined on a carrier Q is parastrophically closed. The group $\text{Ps}(f) := \{\tau \mid {}^{\tau}f = f\}$ is a subgroup of S_3 and called *parastrophic symmetry group* of f . $(Q; f, {}^{\ell}f, {}^rf)$ is *quasigroup*, if f is invertible operation and Q is its carrier. If, in addition, the operation f is associative, then the quasigroup is a group, i.e., it has a neutral element and every element has an inverse.

Two operations f and g are called *isotopic* if there exists a triple of bijections (δ, ν, γ) called an *isotopism* such that $f(x, y) := \gamma g(\delta^{-1}x, \nu^{-1}y)$ for all $x, y \in Q$. An isotope of a group is called a *group isotope*. A class of quasigroups is called a *variety* if it described by identities.

In most cases solving a problem for some set Φ of invertible functions, we solve it for all parastrophes of functions from Φ . That is why Φ is suppose to be parastrophically closed. Very often it is difficult or even impossible to find the general solution of a problem for all operations from Φ .

Partition problem: *Find a partition of the given parastrophically closed set of invertible functions into parastrophically closed subsets with respect to the given property.*

The second author [1] solved this problem for group isotopes with respect to parastrophic symmetry group. Here we consider a partition of group isotopes on an arbitrary carrier with respect to the property of linearity. Let $(Q; \cdot)$ be a group isotope and 0 be an arbitrary element of Q , then the right part of the formula $x \cdot y = \alpha x + a + \beta y$ is called a *0-canonical decomposition*, if $(Q; +, 0)$ is a group and $\alpha 0 = \beta 0 = 0$. An arbitrary element b uniquely defines *b-canonical decomposition* of an arbitrary group isotope [2].

In this case: the element 0 is a *defining element*; $(Q; +)$ is a *decomposition group*; a is its *free member*; α is its *left*, i.e., *2-coefficient*; β is its *right*, i.e., *1-coefficient*; $J\alpha\beta^{-1}$ is its *middle*, i.e., *3-coefficient*.

An isotope of an arbitrary group with a canonical decomposition $x \cdot y = \alpha x + a + \beta y$ is called

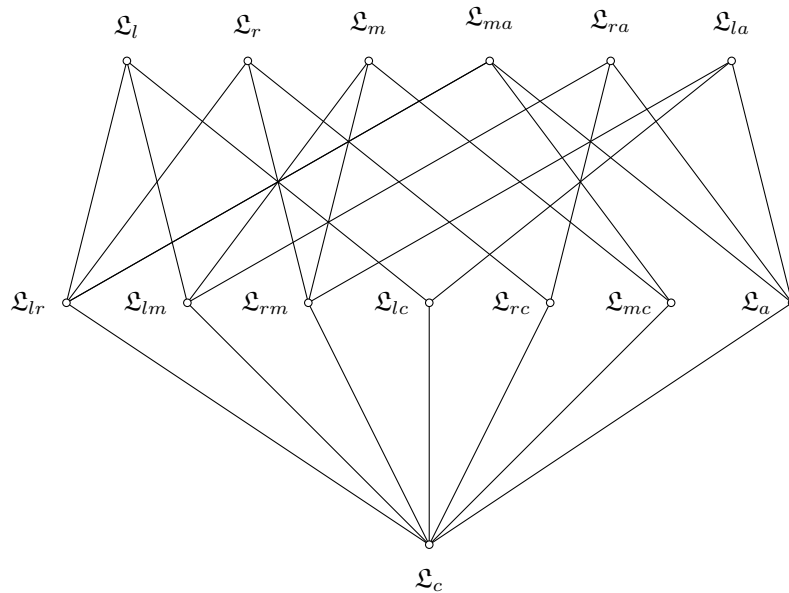
- *(strictly) i-linear*, if the i -coefficient is an automorphism of the decomposition group, where $i = 1, 2, 3$ (another coefficients are neither automorphism nor anti-automorphism);
- *(strictly) i-alinear*, if the i -coefficient is an anti-automorphism of the decomposition group, where $i = 1, 2, 3$ (another coefficients are neither automorphism nor anti-automorphism);
- *semi-linear or one-sided linear*, if it is i -linear for some $i = 1, 2, 3$;

- *semi-central or one-sided central*, if it is semi-linear and its decomposition group is commutative;
- *central* if it is linear and its decomposition group is commutative;
- *semi-alinear or one-sided alinear*, if it is i -linear for some $i = 1, 2, 3$;
- ij -*linear*, if it is i -linear and j -linear; *linear*, if it is i -linear and j -linear for some $i \neq j$;
- *alinear*, if it is i -linear for all $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
- *anti-linear*, if all its coefficients are neither automorphism nor anti-automorphism.

Theorem 1. *All group isotope operations on an arbitrary carrier is parted into the following parastrophically closed blocks: 1) strictly semi-linear operations whose decomposition groups are not commutative; 2) strictly semi-alinear operations whose decomposition groups are not commutative; 3) linear operations whose decomposition groups are not commutative; 4) alinear operations whose decomposition groups are not commutative; 5) strictly semi-central operations; 6) central operations; 7) anti-linear operations.*

Theorem 2. *Let $i \in \{1, 2, 3\}$ and $\sigma \in S_3$. If a group isotope is i -linear (i -alinear), then its σ -parastrophe is $i\sigma^{-1}$ -linear ($i\sigma^{-1}$ -alinear).*

Quasigroups with linearity form 14 varieties: 1) three pairwise parastrophic varieties of one-sided linear quasigroups: left \mathfrak{L}_ℓ , right \mathfrak{L}_r and middle \mathfrak{L}_m ; 2) three pairwise parastrophic varieties of one-sided alinear quasigroups: left \mathfrak{L}_{al} , right \mathfrak{L}_{ar} and middle \mathfrak{L}_{am} ; 3) three pairwise parastrophic varieties of linear quasigroups: left-right linear \mathfrak{L}_{lr} (consequently they are middle alinear), left-middle linear \mathfrak{L}_{lm} (consequently they are right alinear) and right-middle \mathfrak{L}_{rm} linear (consequently they are left alinear); 4) a variety consisting of all left-right-middle alinear quasigroups \mathfrak{L}_a ; 5) three pairwise parastrophic varieties of one-sided central quasigroups: left \mathfrak{L}_{lc} , right \mathfrak{L}_{rc} and middle \mathfrak{L}_{mc} ; and 6) the variety of all central quasigroup \mathfrak{L}_c . The varieties form the following semi-lattice.



REFERENCES

- [1] H.Krainichuk. Classification of Group Isotopes According to Their Symmetry Groups. *Folia Mathematica*, 19(1) : 84–98, 2017.
- [2] F.N. Sokhatskii. About group isotopes I. *Ukrainian Math. J.*, 47(10): 1585–1598, 1995.

Asymptotic behavior of solutions to a nonlinear Beltrami equation

Ruslan Salimov

(Kiev)

E-mail: ruslan.salimov1@gmail.com

Mariia Stefanchuk

(Kiev)

E-mail: stefanmv43@gmail.com

Let D be a domain in \mathbb{C} and $\mu: D \rightarrow \mathbb{C}$ be a measurable function with $|\mu(z)| < 1$ a.e. in D . The linear PDE

$$f_{\bar{z}} = \mu(z)f_z. \quad (1)$$

is called the Beltrami equation; here $z = x + iy$,

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y), \quad f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y).$$

The function μ is called the complex dilatation.

Let $\sigma: D \rightarrow \mathbb{C}$ be a measurable function, and $m \geq 0$. We consider the following nonlinear equation

$$f_r = \sigma(re^{i\theta})|f_\theta|^m f_\theta, \quad (2)$$

written in the polar coordinates (r, θ) . Here f_r and f_θ are the partial derivatives of f in r and θ , respectively, satisfying

$$rf_r = zf_z + \bar{z}f_{\bar{z}}, \quad f_\theta = i(zf_z - \bar{z}f_{\bar{z}}).$$

The equation (2) in the Cartesian coordinates has the form

$$f_{\bar{z}} = \frac{A(z)|zf_z - \bar{z}f_{\bar{z}}|^m - 1}{A(z)|zf_z - \bar{z}f_{\bar{z}}|^m + 1} \frac{z}{\bar{z}} f_z, \quad (3)$$

where $A(z) = \sigma(z)|z|i$.

Note that in the case $m = 0$, the equation (2) is the usual Beltrami equation (1) with the complex dilatation

$$\mu(z) = \frac{z}{\bar{z}} \frac{A(z) - 1}{A(z) + 1}.$$

Let $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Theorem 1. *Let $f: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ be a regular homeomorphic solution of the equation (2) which belongs to Sobolev class $W_{\text{loc}}^{1,2}$, and normalized by $f(0) = 0$. Assume that the coefficient $\sigma: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfies the following condition*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z| < r} \frac{dx dy}{|z| (\text{Im } \bar{\sigma}(z))^{\frac{1}{m+1}}} \right)^{m+1} \leq \sigma_0 < \infty.$$

Then

$$\liminf_{z \rightarrow 0} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq c_m \sigma_0^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

where c_m is a positive constant depending on the parameter m .

REFERENCES

- [1] A. Golberg, R. Salimov and M. Stefanchuk. Asymptotic dilation of regular homeomorphisms. — arXiv:1805.00981v1. — 2018.

On fractal characteristics of the micro-aggregate structure of loess soils

Tatyana P. Mokritskaya

(Dnipro National University, Gagarin Avenue 72, Dnipro, 49050, Ukraine)

E-mail: mokritska@i.ua

Anatolii V. Tushev

(Dnipro National University, Gagarin Avenue 72, Dnipro, 49050, Ukraine)

E-mail: avtus@i.ua

The idea of loess as a natural multi-fractal was formed in the works of Bird [1], Russell [2]. On the basis of the fractal characteristics of the pore and particle structure, there were obtained theoretical models describing diffusion, deformation of the compaction and the shift of the medium [3], [4]. In [2] the distribution function $N_s(L > d_s)$ of the particles sizes is defined as the number of particles of the size L such that $L > d_s$, where d_s runs over the real numbers. The fractal dimension of the particle size distribution function is defined as follows

$$D_s = \lim_{d_s \rightarrow 0} - \frac{\ln(N_s(L > d_s))}{\ln(d_s)}$$

In the presented paper we study subsidence of soils, which are eluvial, eluvial-deluvial loess-like deposits of the Middle-Upper Pleistocene age, lying on the Right-Bank Loess Upland Plain (Middle Dnieper, Ukraine). Under some additional conditions of fractal nature of the loess soil and developing methods introduced in our paper [5] we obtained certain predictive estimations of the coefficient of porosity after the disintegration of micro-aggregates.

The particles forming the ground may have only a finite set of sizes. We denote these sizes $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, d_n$ ranging in decreasing order from the largest. We assume that $\alpha = \alpha_j = d_j/d_{j-1}$, where $2 \leq j \leq n$, does not depend on j . This assumption corresponds to the idea of the self-similarity of fractal structures. In addition, all known mathematical fractals are constructed on this principle. Then we put $\beta_1 = 1$ and $\beta_2 = (d_j/d_{j-1})^{3-D_s} - (d_j/d_{j-1})^3 = \alpha^{3-D_s} - \alpha^3$, where $2 \leq j \leq n$ and D_s is the fractal dimension of the particle size distribution function. As the structures formed by particles of a fixed size are self-similar, we also assume that all these structures have the same coefficient of porosity k_p as well as the same porosity $K_p = k_p/(1 + k_p)$. We discovered that under such conditions two different situations may occurred.

Theorem 1. *In the above denotations, two different situations may occurred:*

1. *If $K_p > \beta_2$, then*

$$e_1 = ((1 + k_p)d_1^{3-D_s}) / (d_1^{3-D_s} + \beta_2(\sum_{j=2}^n d_{j-1}^{3-D_s})) - 1$$

is the porosity coefficient after the disintegration of micro-aggregates.

2. *If $K_p < \beta_2$, then*

$$e_1 = ((1 + k_p)d_n^{3-D_s} + (d_1^{3-D_s} + \beta_2(\sum_{j=2}^n d_{j-1}^{3-D_s}))) / (d_1^{3-D_s} + \beta_2(\sum_{j=2}^n d_{j-1}^{3-D_s})) - 1$$

is the porosity coefficient after the disintegration of micro-aggregates.

Applying the obtained estimations for e_1 , we can obtain a predictive estimate of the volume deformation by the following formula: $\varepsilon = e_1 - e_0$, where e_0 is the coefficient of porosity in the initial (natural) state and e_1 is the predicted value of the porosity coefficient. The results of our experiments and calculations show that on the basis of a new theoretical models and the "Microstructure" technique, having the values of the fractal dimension of the particle size distribution function, it is possible

to forecast the volume deformations after the disintegration of the micro-aggregates.. Depending on the type of loess soil and the specific experimental conditions, this may be the amount of subsidence deformation, swelling or suffusion.

REFERENCES

- [1] N.R.A. Bird, E. Perrier, M. Rieu. The water retention function for a model of soil structure with pore and solid fractal distributions. *Eur. J. Soil Sci.*, 51: 55–63, 2000.
- [2] A. R. Russell, O. Buzzi. A fractal basis for soil-water characteristics curves with hydraulic hysteresis. *Geotechnique*, 62(3) : 269–274, 2012.
- [3] A. N Anderson, J. W. Crawford, A. B. McCartney. On Diffusion in Fractal Soil Structures. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 64 : 19-24, 2000.
- [4] Ce Wang Zhan, Zhang Yang Liu, Shi-min Fan. Geometric and fractal analysis of dynamic cracking patterns subjected to wetting-drying cycles. *Soil and Tillage Research*, 170 : 1–13, 2017.
- [5] Tatiana P. Mokritskaya, Anatoliy V. Tushev, Evgeny V. Nikulchev, Ksenia A. Samoylich. On the Fractal Characteristics of Loess Subsidence. *Contemporary Engineering Sciences*, 9(17) : 799–807, 2016.

Spaces of primitive elements in dual modules over Steenrod algebra

Alexander N. Vasilchenko

(19 Cheluskintsev, apt.32, Samara, phone +78463027287, +79372076904)

E-mail: vass-alexandr@yandex.ru

Presented work studies subspace of all primitives $PB(n)$ in $B(n) = (A(n-1)/A(n))^*$, with respect to the coaction $\phi_n^* : B(n) \rightarrow A^* \otimes B(n)$, where the primitives are those elements $\alpha \in B(n)$ for which $\phi_n^*(\alpha) = 1 \otimes \alpha$, here A^* is dual Steenrod algebra. Modules $B(n)$ were studied in [5, 6, 7]. Works [1, 2, 3, 4, 7] contain all useful notions and results: [3] studies structures of modules over Steenrod algebra A and their duals in dual Steenrod algebra A^* [2, 4]; [1] studies modules $A(n)$ over A generated by annihilators of cohomology classes with degrees no greater then n and $A(n)^*$ is the corresponding dual module of $A(n)$; In [5, 7], $A(n)^+$ is defined as annihilators of cohomology operations with excess greater then n , proved that as vector space over Z_p it is generated by all monomials of A^* with multiplicity no greater then n and $A(n)^+$ can be considered both left and right comodule over A^* . The filtration described in [6] Theorem 1 property 2 and 3 yields $PB(n) = \bigcup_t PB(n)_t$ and $PB(n)_t = \bigoplus_s PB(n)_t^s$, where s is the number of τ operations and where t is the biggest index of such operations. By property 4 Theorem 1 follows: $P(B(n)_t/B(n)_{t-1}) \simeq PB(n-1)_{t-1}$. Found properties of $PB(n)_t$ can be shortly summarized here:

Theorem 1 (Properties of $PB(n)_t$ spaces). (1) $PB(n) = \bigcup_t PB(n)_t$ and the following diagram is commutative with exact rows and columns:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & PB(n)_{t-1} & \xrightarrow{i_{t-1}} & PB(n)_t & \xrightarrow{\pi_t} & PB(n-1)_{t-1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & B(n)_{t-1} & \xrightarrow{i_{t-1}} & B(n)_t & \xrightarrow{\pi_t} & B(n-1)_{t-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_{n-1} \\
 0 & \longrightarrow & A^* \otimes B(n)_{t-1} & \xrightarrow{Id \otimes i_{t-1}} & A^* \otimes B(n)_t & \xrightarrow{Id \otimes \pi_t} & A^* \otimes B(n-1)_{t-1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Here all denoted maps are induced by maps defined in Theorem 1 property 4 [6].

(2) For even n : $PB(n)_{-1} = PB(n)_0 = \langle \xi_1^{n/2} \rangle$; for odd n : $PB(n)_0 = \langle \xi_1^{\frac{n-1}{2}} \tau_0 \rangle$.

(3) $PB(n)_t = \bigoplus_s PB(n)_t^s$ and the following diagram is commutative with exact rows and columns:

$$\begin{array}{ccccccc}
 PB(n)_{t-1}^s & \xrightarrow{i_{t-1}^s} & PB(n)_t^s & \xrightarrow{\pi_t^s} & PB(n-1)_{t-1}^{s-1} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B(n)_{t-1}^s & \xrightarrow{i_{t-1}^s} & B(n)_t^s & \xrightarrow{\pi_t^s} & B(n-1)_{t-1}^{s-1} \\
 \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_{n-1} \\
 A^* \otimes B(n)_{t-1}^s & \xrightarrow{Id \otimes i_{t-1}^s} & A^* \otimes B(n)_t^s & \xrightarrow{Id \otimes \pi_t^s} & A^* \otimes B(n-1)_{t-1}^{s-1}
 \end{array}$$

Here all denoted maps are induced ones as in (1).

(4) Composition of maps

$$PB(n)_t^{s,deg} \longrightarrow B(n)^{s,deg} \twoheadrightarrow B(n)^{s,deg} / (I \cap B(n)^{s,deg})$$

is monomorphism, here $I = \langle \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots \rangle$ is ideal in A^* , where deg is degree. The dimension of $B(n)^{s,deg}/(I \cap B(n)^{s,deg})$ is less or equal 1.

- (5) $\dim(PB(n)_t^{s,deg}) \leq 1$.
(6) For map $PB(2m+1)_t \xrightarrow{\pi_t} PB(2m)_{t-1}$, $\xi_1^m \in \text{Im}(\pi_0)$ and for $t > 0$: $\xi_1^m \notin \text{Im}(\pi_t)$; if $s > 1$ and $\alpha \in PB(n)_t^s$ then $\alpha = \alpha' \tau_0$.
(7) Denote $J(n)^{s,deg} = B(n)^{s,deg}/(I \cap B(n)^{s,deg})$ then the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc}
PB(n)_t^{s,deg} & \xrightarrow{\pi_t^{s,deg}} & PB(n-1)_{t-1}^{s-1,deg-|\tau_t|} \\
\downarrow & & \downarrow \\
B(n)_t^{s,deg} & \xrightarrow{\pi_t^{s,deg}} & B(n-1)_{t-1}^{s-1,deg-|\tau_t|} \\
\downarrow j_n & & \downarrow j_{n-1} \\
J(n)^{s,deg} & & J(n-1)^{s-1,deg-|\tau_t|}
\end{array}$$

These properties may be useful to find bases of $PB(n)_t^{s,deg}$ spaces and $PB(n)$ basis as result.

REFERENCES

- [1] H. Cartan. Algebres d'Eilenberg-MacLane at Homotopie. *Seminare Cartan ENS*, 7e, 1954–1955.
[2] J. Milnor. The Steenrod algebra and its dual. *Annals of Mathematics*, 67 : 150–171, 1958.
[3] J. Milnor, J. Moore. On the structure of Hopf algebras. *Annals of Mathematics*, 81 : 211–264, 1965.
[4] N. Steenrod, D. B. A. Epstein. *Cohomological Operations*, Princeton University Press, 1962.
[5] А. Н. Васильченко. Свойства дуальных модулей над алгеброй Стиррода. Abstracts of the International Conference “Geometry in Odessa” – 2014, Odessa the 26th of May – the 31st of May 2014: p.26
[6] А. Н. Васильченко. Свойства дуальных модулей над алгеброй Стиррода. Abstracts of the International scientific conference “Algebraic and geometric methods of analysis” 2017, Odessa the 31st of May – the 6 June 2017: p.96
[7] А. Н. Васильченко. Свойство дуальных модулей над алгеброй Стиррода. *Вестник СамГУ* 7(118) : 9–16, 2014.

The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains

Damian Wiśniewski

(Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Warmia and Mazury, Olsztyn, Poland)

E-mail: dawi@matman.uwm.edu.pl

Let $B_1(\mathcal{O})$ be the unit ball in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ with center at the origin \mathcal{O} and $G \subset \mathbb{R}^n \setminus B_1(\mathcal{O})$ be an unbounded domain with the smooth boundary ∂G . We assume that there exists $R \gg 1$ such that $G = G_0 \cup G_R$, where G_0 is a bounded domain in \mathbb{R}^n , $G_R = \{x = (r, \omega) \in \mathbb{R}^n \mid r \in (R, \infty), \omega \in \Omega \subset S^{n-1}, S^{n-1}$ is the unit sphere.

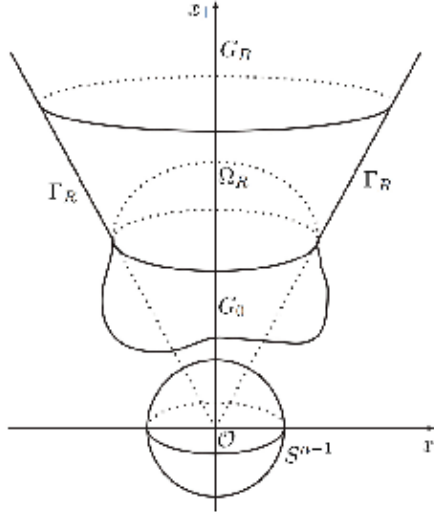


FIGURE 0.1. An unbounded cone-like domain

We consider the following linear problem :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)u_{x_j}) + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), & x \in G; \\ \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{|x|} \gamma\left(\frac{x}{|x|}\right) u = g(x), & x \in \partial G; \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0; \end{cases} \quad (L)$$

here $\frac{\partial}{\partial \nu} = a^{ij}(x) \cos(\vec{n}, x_i) \frac{\partial}{\partial x_j}$, where \vec{n} denotes the unit outward with respect to G normal to ∂G , $\gamma(\omega)$ is positive bounded piecewise smooth function on $\partial\Omega$ such that $\gamma(\omega) \geq \gamma_0 > 0$ and $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in \mathcal{D}; \\ 1, & \text{if } x \notin \mathcal{D}, \end{cases}$ $\mathcal{D} \subseteq \partial G$ is the part of the boundary ∂G , where the Dirichlet boundary condition is posed.

We assume that the following conditions are fulfilled :

(a) *the condition of uniform ellipticity :*

$$\begin{aligned} \nu \xi^2 \leq a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu \xi^2 \quad \forall x \in \overline{G}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; \\ \nu, \mu = \text{const} > 0 \text{ and } \lim_{|x| \rightarrow \infty} a^{ij}(x) = \delta_i^j \end{aligned}$$

(b) $a^{ij}(x) \in C^0(\overline{G})$, $b^i(x) \in L_p(G)$, $p > n$; for them holds inequalities

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a^{ij}(x) - \delta_i^j|^2} \leq \mathcal{A}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \left(\sum_{i=1}^n |b^i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mathcal{A}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \in G_R,$$

where $\mathcal{A}(t)$, $t \geq 0$ is a monotonically increasing, nonnegative function, continuous at zero and $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{A}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$;

(c) $0 \geq c(x) \in L_{p/2}(G) \cap L_2(G)$;

(d) $f(x) \in L_{p/2}(G) \cap L_2(G)$;

(e) there exist numbers $f_1 \geq 0$, $g_1 \geq 0$, $s > 0$ such that $|f(x)| \leq f_1|x|^{-s-2}$, $|g(x)| \leq g_1|x|^{-s-1}$.

In [1] we investigated the behaviour of weak solutions to the problem (L) in a neighborhood of infinity assuming that the function $\mathcal{A}(t)$ is Dini-continuous at zero in the meaning that the integral $\int_0^d \frac{\mathcal{A}(t)}{t} dt$ is finite for some $d > 0$. More precisely, we obtained the following theorem:

Theorem 1. *If the function $\mathcal{A}(t)$ from assumption (b) is Dini-continuous at zero, then*

$$|u(x)| \leq C_0 \left(\|u\|_{2,G} + f_1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}} g_1 \right) \cdot \begin{cases} |x|^{\lambda_-}, & \text{if } s > -\lambda_-; \\ |x|^{\lambda_-} \ln|x|, & \text{if } s = -\lambda_-; \\ |x|^{-s}, & \text{if } 0 < s < -\lambda_-, \end{cases}$$

where $\lambda_- = \frac{2-n-\sqrt{(n-2)^2+4\vartheta}}{2}$, ϑ is the smallest positive eigenvalue of the eigenvalue problem for the Laplace-Beltrami operator on the unit sphere.

In [3] our aim was to derive the estimate of the weak solution modulus for our problems near the infinity under assumption that leading coefficients of the equations **do not** satisfy the Dini-continuity condition. We obtained the following result:

Theorem 2. *Let $u(x)$ be a weak solution of problem (L) and assumptions (a)-(e) be satisfied with $\mathcal{A}(t)$ which is **not Dini-continuous** at zero. Then for all $\varepsilon > 0$ there are $R \gg 1$ and a constant $C_\varepsilon > 0$ such that for all $x \in G_R$*

$$|u(x)| \leq C_\varepsilon \left(\|u\|_{2,G} + f_1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}} g_1 \right) \cdot \begin{cases} |x|^{\lambda_- + \varepsilon}, & \text{if } s \geq -\lambda_-; \\ |x|^{-s}, & \text{if } 0 < s < -\lambda_-. \end{cases}$$

REFERENCES

- [1] Damian Wiśniewski. Boundary value problems for a second-order elliptic equation in unbounded domains. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia Mathematica*, IX (2010) , 87–122
- [2] Mikhail Borsuk, Damian Wiśniewski. Boundary value problems for quasi-linear elliptic second order equations in unbounded cone-like domains. *Central European Journal of Mathematics*, 10(6) (2012), 2051–2071
- [3] Damian Wiśniewski. The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains *Annales Mathematicae Silesianae*, 30 (2016), 203–217
- [4] Mariusz Bodzioch, Damian Wiśniewski, Krzysztof Żyjewski Comments on behaviour of solutions of elliptic quasi-linear problems in a neighbourhood of boundary singularities. *Open Mathematics*, 15 (2017), 667–678

History of formation of the decimal number concept

Iakovlieva O. N.

(Odessa)

E-mail: olganik6505@gmail.com

Lipska Zh. M.

(Odessa)

E-mail: zhannka5zhienko@gmail.com

The precursors of decimal numbers were sexadecimal numbers of Babylonians [1, 240]. In their fractions, the number 60 and its natural powers served as the denominator. These fractions were called physical or astronomical because this number system was widely used in astronomy right up to Renaissance.

The decimal number system has already been used in ancient China in the III-rd century BC. Liu Hui, Chinese mathematician of that time, recommended to use fractions with 10, 100, etc. as the denominator while extracting square roots. He meant the following rule:

$$\sqrt{a} = \frac{1}{10^n} \sqrt{a10^{2n}}.$$

The first systematic presentation. The theory of decimal numbers was systematically expounded by Samarkand mathematician Giyas-ad-din Jamshid ibn Mas'ud al-Kashi in his work 'The Key to Arithmetics' in the first half of the XVth century. He gave rules of arithmetics of decimals, the rules for converting sexadecimal numbers to decimal ones. However, his works were unknown in Europe. Al-Kashi separated the integer part of a number from its fractional part by a vertical line, he inscribed its decimal place above each digit and etc.

Decimal numbers in Europe. In Europe the idea of decimal numbers was systematically developed by I. Bonfis from Tarascon (Southern France) in the mid of the XIV-th century. He described the system of fractions in which 1 = 10 primas, 1 prima = 10 seconds, etc., and briefly explained the rules of the basic operations on these fractions in his manuscript [2, 360]. Bonfis's work called 'The Way of Division' was discovered only in the 20-th century. First decimal numbers in Europe were written as integers in a certain agreed scale. For example, the trigonometric tables of Regiomontan (1467) contained values magnified by 100,000 and then rounded up to the nearest integer.

The discovery and promotion of decimals in Europe is a merit of Flemish engineer S. Stevin. He published his brochure 'De Thiende, La Disme' in 1585, where he introduced the decimal system of monetary units, measures, weights as the natural completion of the idea of decimal numbers [1, 243]. Stevin indicated the digit place by an encircled number after each digit (or above it). First using the decimal point for writing decimal numbers occurred in 1592 [3, 56].

J. Wallis continued the work on the theory of decimal numbers. He proved that the fraction with the denominator $2^m 5^n$ can be turned into a finite decimal fraction in his 'Treatise on Algebra' in 1685. In the XVIII century German mathematician J. Lambert proved that a purely periodic decimal fraction can be turned into a usual fraction, i.e. it is a rational number [2, 367]. Deep properties of periodic decimal fractions were described in K. Gauss's 'Arithmetic Studies'. For example, Gauss proved that the largest number of digits in the period for the fraction $\frac{p}{q}$, where q is a prime number, is less or equal $q - 1$ [4, 109].

Justification of the theory of decimal fractions. In the XIX century German mathematician Karl Weierstrass considered decimal numbers as a model of the system of real numbers.

REFERENCES

- [1] И. Я. Депман “История арифметики” Изд. “Просвещение”, Москва, 1965.
- [2] Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия, Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, Москва, 1960 г.
- [3] Свечников А. “Путешествие в историю математики или Как люди учились считать: Книга для тех, кто учит и учится.” М.: Педагогика-Пресс, 1995 г.
- [4] Tent Margaret “The Prince of Mathematics: Carl Friedrich Gauss”, 2006.

Some new applications on absolute matrix summability

Sebnem Yildiz

(Department of Mathematics, Ahi Evran University, Kirsehir, Turkey)
E-mail: sebnemyildiz@ahievran.edu.tr; sebnem.yildiz82@gmail.com

In this paper, Theorem 1 and Theorem 2 on weighted mean summability methods of Fourier series have been generalized for $|A, p_n|_k$ summability factors of Fourier series by using different matrix transformations. New results have been obtained dealing with some other summability methods.

Theorem 1. *Let (p_n) be a sequence such that*

$$P_n = O(np_n) \quad (1)$$

$$P_n \Delta p_n = O(p_n p_{n+1}). \quad (2)$$

If $\varphi_1(t)$ is of bounded variation in $(0, \pi)$ for any $x \in (-\pi, \pi)$ and (λ_n) is a sequence such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\lambda_n|^k < \infty \quad (3)$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta \lambda_n| < \infty, \quad (4)$$

then the series $\sum C_n(t) \frac{\lambda_n P_n}{np_n}$ is summable $|\bar{N}, p_n|_k$, $k \geq 1$ (taken from [2]).

Theorem 2. *If the sequences (p_n) and (λ_n) satisfy the conditions (1)-(4) of Theorem 1 and*

$$B_n \equiv \sum_{v=1}^n v a_v = O(n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

then the series $\sum a_n \frac{\lambda_n P_n}{np_n}$ is summable $|\bar{N}, p_n|_k$, $k \geq 1$ (taken from [2]).

Lemma 3. *If $\varphi_1(t)$ is of bounded variation in $(0, \pi)$ for any $x \in (-\pi, \pi)$, then*

$$\sum v C_v(x) = O(n) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (6)$$

(taken from [11]).

Lemma 4. *If the sequence (p_n) such that conditions (1) and (2) of Theorem 1 are satisfied, then*

$$\Delta \left\{ \frac{P_n}{p_n n^2} \right\} = O \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (7)$$

(taken from [2]).

Acknowledgments

This work supported by Ahi Evran University Scientific Research Projects Coordination Unit. Project Number: FEF.A3.17.003

REFERENCES

- [1] H. Bor. On two summability methods. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 97: 147–149, 1985.
- [2] H. Bor. Multipliers for $|\bar{N}, p_n|_k$ summability of Fourier series. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 17: 285–290, 1989.
- [3] H. Bor. On the local property of $|\bar{N}, p_n|_k$ summability of factored Fourier series. *J. Math. Anal. Appl.*, 163: 220–226, 1992.
- [4] H. Bor. On local property of $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ summability of factored Fourier series. *J. Math. Anal. Appl.*, 179: 646–649, (1993).
- [5] H. Bor. On the local property of factored Fourier series. *Z. Anal. Adwend.*, 16: 769–773, (1997).
- [6] H. Bor. Factors for $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ summability of Fourier series. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, 3: 399–406, 2008.
- [7] H. Bor. Some new results on infinite series and Fourier series. *Positivity*, 19: 467–473, (2015).
- [8] H. Bor. Some new results on absolute Riesz summability of infinite series and Fourier series. *Positivity*, 20: 599–605, 2016.
- [9] G. H. Hardy. Divergent Series. *Oxford University Press Oxford* (1949).
- [10] T. M. Flett. On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 7: 113–141, (1957).
- [11] K. N. Mishra. Multipliers for $|\bar{N}, p_n|$ summability of Fourier series. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 14: 431–438, (1986).
- [12] H. S. Özarlan and Ş. Yıldız. A new study on the absolute summability factors of Fourier series. *J. Math. Anal.*, 7: 31–36, (2016).
- [13] W. T Sulaiman. Inclusion theorems for absolute matrix summability methods of an infinite series. *IV Indian J. Pure Appl. Math.*, 34(11): 1547–1557, (2003).
- [14] N. Tanovič-Miller. On strong summability. *Glas. Mat.*, 34 (14): 87–97, (1979).
- [15] S. Yıldız. A new theorem on local properties of factored Fourier series. *Bull. Math. Anal. Appl.*, 8 (2): 1–8, (2016).
- [16] S. Yıldız. A new note on local property of factored Fourier series. *Bull. Math. Anal. Appl.*, 8 (4): 91–97, (2016).
- [17] S. Yıldız. On Riesz summability factors of Fourier series. *Trans. A. Razmadze Math. Inst.*, 171: 328–331, (2017).
- [18] S. Yıldız. A new generalization on absolute matrix summability factors of Fourier series. *J. Inequal. Spec. Funct.*, 8 (2): 65–73, (2017).
- [19] S. Yıldız. On Absolute Matrix Summability Factors of infinite Series and Fourier Series. *Gazi Univ. J. Sci.*, 30 (1): 363–370, (2017).
- [20] Ş. Yıldız. A new theorem on absolute matrix summability of Fourier series. *Pub. Inst. Math. (N.S.)*, 102 (116):107–113,(2017).
- [21] S. Yıldız. On Application of Matrix Summability to Fourier Series. *Math. Methods Appl. Sci.*, 41 (11):1–7, (2018).
- [22] S. Yıldız. On the absolute matrix summability factors of Fourier Series. *Math. Notes*, 103 (2):155–161, (2018).

An Extension on localization property of Fourier series

Sebnem Yildiz

(Department of Mathematics, Ahi Evran University, Kırsehir, Turkey)
E-mail: sebnemyildiz@ahievran.edu.tr; sebnem.yildiz82@gmail.com

The local property problem of the factored Fourier series plays an important role in many areas of applied mathematics and mechanics. The convergence of Fourier series at any point $t = x$ is a local property of the generating function f . Hence, the summability of this series at the point by any regular linear summability method is also a local property of f . Mazhar [5] proved the following theorem concerning the local property of the summability $|\bar{N}, p_n|_k$ of Fourier series

Theorem 1. *Let (p_n) satisfy the following conditions:*

$$\left\{ \frac{p_n}{P_n} \right\} \downarrow \quad (1)$$

$$\frac{P_{2n}}{p_{2n}} = O\left(\frac{P_n}{p_n}\right) \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n P_n} < \infty \quad (3)$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|C_n(x)|^k p_n}{P_n} < \infty, \quad (4)$$

then the summability $|\bar{N}, p_n|_k$ of $\sum C_n(t)$ depends only on the behaviour of the generating function at the point $t = x$.

In this paper, we propose to examine the local property of the summability $|\bar{N}, p_n, \theta_n|_k$ of Fourier series.

REFERENCES

- [1] H. Bor. On two summability methods. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 97: 147–149, 1985.
- [2] H. Bor. On the local property of $|\bar{N}, p_n|_k$ summability of factored Fourier series. *J. Math. Anal. Appl.*, 163: 220–226, 1992.
- [3] H. Bor. On local property of $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ summability of factored Fourier series. *J. Math. Anal. Appl.*, 179: 646–649, (1993).
- [4] H. S. Özarslan and Ş. Yıldız. Local properties of absolute matrix summability of Factored of Fourier series. *Filomat*, 31 (15):4897-4903, (2017).
- [5] S.M. Mazhar. An aspect of local property of $|\bar{N}, p_n|_k$ summability of Fourier series, *Int. J. Appl. Math.*, 9:141-152, (2002).
- [6] W. T Sulaiman. On some summability factors of infinite series, *Proc. Amwe. Math. Soc.*, 115:313-317, (1992).
- [7] S. Yıldız. A new theorem on local properties of factored Fourier series. *Bull. Math. Anal. Appl.*, 8 (2): 1–8, (2016).
- [8] S. Yıldız. A new note on local property of factored Fourier series. *Bull. Math. Anal. Appl.*, 8 (4): 91–97, (2016).

Про А-деформацію поверхні, обмежену умовою стаціонарності сітки асимптотичних ліній

Безкоровайна Лілія

(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)

E-mail: liliyabezka@gmail.com

У тривимірному евклідовому просторі розглядаємо однозв'язну поверхню $S \in C^4$ від'ємної гауссової кривини та її ареальну нескінченно малу деформацію першого порядку (А-деформацію), при якій сітка асимптотичних ліній зберігається з точністю до малих порядку вище першого відносно параметра деформації.

Попередньо відзначимо, що при А-деформаціях варіативні властивості сіток (асимптотичних ліній, ліній кривини або ж ліній скруту (LGT)) раніше досліджувалися в основному за умови стаціонарності довжин їх ліній.

Легко бачити, що при означених у назві обмеженнях поверхня не може допускати нетривіальних нескінченно малих згинань. Але у випадках ареальної або ж квазіареальної деформацій постановка такого роду задачі незалежно від її кінцевого результату, на наш погляд, має сенс.

Поле зміщення $\bar{U}(x^1, x^2)$ при А-деформації шукаємо з векторної системи рівнянь

$$\bar{U}_i = c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^{\alpha\bar{n}},$$

при цьому звівши задачу до однорідної системи двох диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку відносно T^α , $\alpha = 1, 2$,

$$\left(d^{\alpha\gamma} T_{,\gamma}^\beta\right)_{,\alpha} + \left(d^{\beta\gamma} T_{,\gamma}^\alpha\right)_{,\alpha} + 2b_\alpha^\beta T^\alpha = 0. \quad (1)$$

В інваріантній формі знаходимо деякий ненульовий розв'язок системи (1) та встановлюємо необхідну і достатню умову існування нетривіальної (тривіальної) А-деформації зі стаціонарною сіткою асимптотичних ліній.

Позначення основних геометричних величин поверхні запозичено з монографії [1] І. Н. Векуа.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] И. Н. Векуа. *Обобщенные аналитические функции*. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грасмановим образом

Гречнёва М.О.

(Запоріжжя, Запорізький національний університет)
E-mail: mag83@list.ru

Стеганцева П.Г.

(Запоріжжя, Запорізький національний університет)
E-mail: steg_pol@mail.ru

Задача відновлення поверхні за її грасмановим образом зводиться до доведення існування розв'язку диференціального рівняння другого порядку у частинних похідних. Ця задача розв'язувалась як локально, так і в глобальному аспекті у евклідовому просторі [1] та у просторі Мінковського [2]. У роботі [3] розглядається задача відновлення поверхні з краєм у евклідовому просторі, що має заданий грасманів образ.

Нами розв'язана задача відновлення двовимірної неізотропної поверхні з краєм простору Мінковського за її грасмановим образом. Доведена можливість відновлення такої часоподібної поверхні V^2 класу C^2 в 1R_4 , яка бієктивно проектується на часоподібну поверхню \tilde{V}^2 тривимірного простору 1R_3 , причому \tilde{V}^2 має бієктивний сферичний образ. Тоді поставлену задачу можна почати з відновлення поверхні \tilde{V}^2 , яка при вказаних умовах повністю визначається своєю опорною функцією. Вказані вимоги можна задовольнити наступним чином. Розглянемо центральне проектування із центру сфери одиничного радіусу простору 1R_3 на дотичну до неї площину в точці $O(0, 0, 1)$. Центральне проектування є гомеоморфізмом півсфери і області на дотичній площині, декартові координати x, y точок якої задовольняють умову $x^2 - y^2 < 1$. Саме ці декартові координати оберемо в якості внутрішніх координат шуканої поверхні. Для отримання рівняння відносно опорної функції (основного рівняння) рухомий репер $(\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3, \bar{f}^4)$ простору Мінковського обираємо спеціальним чином, пов'язуючи його з розглянутою півсферою. Помістивши вектори \bar{f}^1, \bar{f}^2 у дотичну площину поверхні V^2 , а вектори \bar{f}^3, \bar{f}^4 – у її нормальну площину, отримаємо рухомий репер поверхні V^2 .

Якщо поверхню V^2 задавати радіус-вектором $\bar{r}(x, y) = (z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), z^4(x, y))$, а тривимірний простір 1R_3 рівнянням $z^4 = 0$, то поверхня \tilde{V}^2 має векторне рівняння $\bar{r}_1(x, y) = (z^1(x, y), z^2(x, y), z^3(x, y), 0)$. У випадку часоподібної поверхні основне рівняння набуває вигляду

$$A_y h_{xx} - (A_x + B_y) h_{xy} + B_x h_{yy} = 0,$$

в якому коефіцієнтами є частинні похідні функцій $A = -(\frac{k\lambda}{n} + \frac{xy}{n}\mu)$, $B = n\mu$ від локальних координат x, y, λ, μ грасманового многовиду, $k = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$, $n = \sqrt{1 + y^2}$. Введемо ще позначення $a = \sqrt{1 + \mu^2} - \lambda^2$. Заданий грасманів образ будемо задавати явними рівняннями $\lambda = \lambda(x, y)$, $\mu = \mu(x, y)$. Зрозуміло, що використання спеціалізованого рухомого реперу визначає певний вигляд плокерових координат грасманового образу. Має місце

Теорема 1. *Нехай $\Gamma^2 \subset^S PG(2, 4)$ – двовимірна поверхня в 3R_6 , задана радіус-вектором*

$$\bar{\sigma}(x, y) = \left(\frac{yA + xB}{ak}, \frac{A}{ak}, \frac{x}{ak}, -\frac{B}{ak}, \frac{y}{ak}, \frac{1}{ak} \right),$$

де x, y – координати на півсфері S^2 одиничного радіусу. Нехай Ω – область на S^2 , обмежена двома кривими, які є перетинами півсфери площинами, що проходять через її діаметр; Ω' – проекція області Ω на дотичну площину до S^2 . Функції $A(x, y)$, $B(x, y)$ є функціями класу C^2

в області Ω' й разом зі своїми похідними до другого порядку включно обмежені в Ω' . Нехай виконуються умови

$$D = 4A_y B_x - (A_x + B_y)^2 < 0,$$

$$\min_{\Omega'} \{ |4A_y B_x - (A_x + B_y)^2|, |A_y|, |B_x| \} \geq n_0 = \text{const} > 0$$

і нехай на одній із кривих l , що обмежують область Ω , задана неперервна функція $\bar{R}(s) = (R^1(s), R^2(s), R^3(s), R^4(s))$, $R_s^3 = -a_o R_s^1 - s R_s^2$, $R_s^4 = -A|_l R_s^1 + B|_l R_s^2$, $a_o = \text{const}$. Тоді існує єдина двовимірною регулярною часоподібною поверхню V^2 класу C^1 в 1R_4 така, що її грассманів образ збігається з поверхнею Γ^2 й край поверхні V^2 збігається з кривою $\bar{R} = \bar{R}(s)$.

Перша з умов теореми визначає гіперболічний тип основного рівняння. Доведена також можливість відновлення просторовоподібної поверхні за її грассмановим образом.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ю. А. Аминов. *Геометрия подмногообразий*// *Наукова думка* К, 2002, 467с.
- [2] М.А. Гречнева, П.Г. Стеганцева. О существовании поверхности псевдоевклидова пространства с заданным грассмановым образом. *Укр. мат. журнал.*, 68(10) : 1320-1329, 2016.
- [3] К.О. Кизбикенов. Двумерные поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве с данным грассмановым образом. *ЛГПИ, Рук. деп. В ВИНТИ* 5.12.83. №6568-83 ДЕП, 25с., 1983.

Двоточкова нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними над полем p -адичних чисел

Антон Кузь

(Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підтригача НАН України)

E-mail: kuz.anton87@gmail.com

Одним із важливих напрямків сучасної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, який активно розвивається упродовж останніх десятиліть, є вивчення властивостей розв'язків таких задач із p -адичними змінними. Мотивацією до розв'язування крайових (в тому числі нелокальних) задач для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними над неархімедовим полем p -адичних чисел, що є поповненням поля раціональних чисел за p -адичною нормою, є стрімких розвиток p -адичної математичної фізики, зокрема дослідження p -адичних моделей квантової механіки, теорії гравітації тощо [1, 2, 4]. Основою цього альтернативного розділу математичної фізики слугує ідея В.С.Владімірова та І.В.Воловіча [1], що на планківських відстанях структура простору-часу повинна описуватися неархімедовим полем p -адичних чисел.

Нехай p – просте число, \mathbb{Q}_p – поповнення [3] поля раціональних чисел за p -адичною нормою $|\cdot|_p$; $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$, $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} (d/dx)^k e^{-x^2}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – поліноми Ерміта; $L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)$, $w(x) = e^{-x^2}$, – простір усіх рядів $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k H_k(x)$, для яких $\lim_{k \rightarrow \infty} |f_k|_p \sqrt{|k!2^k|_p} = 0$; $\mathcal{A}(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))$ – простір усіх рядів $u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) H_k(x)$, де $u_k(t)$, $k \geq 0$, – аналітичні функції на \mathbb{Z}_p , для яких $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in \mathbb{Z}_p} |u_k(t)|_p \sqrt{|k!2^k|_p} = 0$; норми в просторах $L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)$ та $\mathcal{A}(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))$ визначаються рівностями [4]

$$\|f; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)\| = \max_k |f_k|_p \sqrt{|k!2^k|_p},$$

$$\|u; \mathcal{A}(\mathbb{Z}_p; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))\| = \max_k \max_{t \in \mathbb{Z}_p} |u_k(t)|_p \sqrt{|k!2^k|_p}.$$

$\bar{L}_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)$ – простір вектор-функції $\vec{v} = \text{col}(v^1, v^2)$ таких, що $v^j \in L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)$, для кожного $j = 1, 2$, із нормою $\|\vec{v}; \bar{L}_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)\| = \max_j \|v^j; L_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)\|$. Простір $\mathcal{A}(\mathbb{Z}_p; \bar{L}_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))$ означаємо аналогічним чином.

У даній роботі розглядаємо таку двоточкову нелокальну задачу

$$\frac{\partial^2 \vec{u}(t, x)}{\partial t^2} + \mathbf{B}_1 A(\partial/\partial x) \frac{\partial \vec{u}(t, x)}{\partial t} + \mathbf{B}_2 A^2(\partial/\partial x) \vec{u}(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}_p, \quad x \in \mathbb{Q}_p, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^{j-1} \vec{u}(t, x)}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=0} - \mu \left. \frac{\partial^{j-1} \vec{u}(t, x)}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=T} = \vec{\varphi}_j(x), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

де $\vec{u}(t, x) = \text{col}(u^1(t, x), u^2(t, x))$, a_1, \dots, a_n , $\mu \in \mathbb{Q}_p$, $A(\partial/\partial x) = -\partial^2/(\partial x^2) + 2x\partial/\partial x$, $T \in \mathbb{Z}_p$, $T \neq 0$, $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ – квадратні матриці з p -адичними елементами.

Встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі (1), (2) в просторі $\mathcal{A}(\mathbb{Z}_p; \bar{L}_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx))$, який неперервно залежить від функцій $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2 \in \bar{L}_2(\mathbb{Q}_p, w(x)dx)$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. *p*-адический анализ и математическая физика. Москва: Физматлит, 1994.
- [2] Горбачук М.Л., Горбачук В.И. О задаче Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве над полем p -адических чисел. *Тр. МИАН*, 245: 99–106, 2004.
- [3] Коблиц Н. *p*-адические числа, p -адический анализ и дзета-функции. Москва: Мир, 1982.
- [4] Хренников А. Ю. Математические методы неархимедовой физики. *УМН*, 45(4): 79–110, 1990.

Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум

В. Маркітан

(Інститут математики НАН України)

E-mail: v.p.markitan@pru.edu.ua

М. Працьовитий

(НПУ імені М.П.Драгоманова, Інститут математики НАН України)

E-mail: prats4444@gmail.com

Геометричні засоби допомагають вивчати збіжні та розбіжні числові ряди, їх швидкість збіжності і "розподіл" сум підрядів на числовій прямій. А це дозволяє властивості рядів інтегрувати у тополого-метричних термінах, а також в термінах теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу). Початком досліджень в галузі геометрії числових рядів є робота Какея [1]. З цих пір теорія суттєво збагатилась і сьогодні магістральними напрямками її розвитку слід вважати:

- 1) пошук критеріїв ніде не щільності, нуль-мірності та канторвальності [4];
- 2) встановлення фрактальних характеристик множин підсум абсолютно збіжних рядів [2, 5];
- 3) вивчення властивостей арифметичних сум (скінченних та нескінченних) числових множин [2], а також
- 4) знаходження застосувань тополого-метричних властивостей рядів і теорії розподілів випадкових величин (нескінченні згортки Бернуллі) та ймовірнісної теорії чисел [4].

Означення 1. *Неповною сумою (підсумою) заданого збіжного числового ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

залежною від множини $M \subset \mathbb{N}$, називається число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varepsilon_n, \quad \text{де } \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \notin M. \end{cases}$$

Означення 2. *Множиною (всіх) неповних сум (множиною підсум) ряду (1) називається множина*

$$E(u_n) = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \quad (\varepsilon_n) \in A^{\infty}, \quad A = \{0, 1\} \right\}.$$

Добре відомо, що множина неповних сум ряду є континуальною, досконалою множиною одного з наступних топологічних типів:

- 1) скінченним об'єднанням відрізків;
- 2) гомеоморфною множині Кантора (додатної або нульової міри Лебега);
- 3) канторвалом – множиною гомеоморфною множині неповних сум ряду

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + \dots, \quad (2)$$

яка є специфічним об'єднанням відрізків і ніде не щільної множини. Необхідні і достатні умови належності кожному з двох останніх типів сьогодні невідомі, хоча відомі деякі достатні умови. Для окремих вузьких класів рядів критерії також є відомими.

Зауважимо, що ряд (2) є результатом додавання двох рядів, які є сумами всіх членів нескінченно спадних геометричних прогресій. Їх множини неповних сум просто виражаються у термінах

четвіркового зображення чисел, а саме:

$$E' \left(\frac{3}{4^n} \right) = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^4, \alpha_n \in \{0, 3\} \right\},$$

$$E'' \left(\frac{2}{4^n} \right) = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^4, \alpha_n \in \{0, 2\} \right\}.$$

Для арифметичної суми цих множин виконується рівність

$$E' \left(\frac{3}{4^n} \right) \oplus E'' \left(\frac{2}{4^n} \right) = E \left(\frac{3}{4^{2k-1}} + \frac{2}{4^{2k}} \right).$$

Об'єктом нашого розгляду є структурні та тополого-метричні властивості множини неповних сум ряду (2) і розподілу випадкової величини

$$\xi = \frac{3\eta_1}{4} + \frac{2\eta_2}{4} + \frac{3\eta_3}{4^2} + \frac{2\eta_4}{4^2} + \dots + \frac{3\eta_{2k-1}}{4^k} + \frac{2\eta_{2k}}{4^k} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{4^k}, \quad (3)$$

де (η_k) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями p'_{0k} та p'_{1k} відповідно. Тоді (τ_k) – послідовність випадкових величин, які набувають значень 0, 2, 3, 5 відповідно з ймовірностями:

$$p_{0k} = p'_{0,2k-1} \cdot p'_{0,2k}, \quad p_{2k} = p'_{0,2k-1} \cdot p'_{1,2k}, \quad p_{3k} = p'_{1,2k-1} \cdot p'_{0,2k}, \quad p_{5k} = p'_{1,2k-1} \cdot p'_{1,2k}.$$

Зауважимо, що розподіл випадкової величини ξ належить до класу нескінченних згорток Бернуллі, вивчення яких ведеться більше ста років і чимало проблем, з ними пов'язаних, до цих пір чекають на своє вирішення [4].

Зауважимо також, що випадкова величина ξ за формою є випадковою величиною, представленою четвірковим розкладом (в четвірковій системі числення) з нестандартним набором цифр $\{0, 2, 3, 5\} \equiv A^*$, які є незалежними випадковими величинами.

Симетрії алфавіту A^* в значній мірі індують структурні властивості спектра S_ξ (множини точок росту функції розподілу F_ξ , що рівносильно мінімального замкненого носія розподілу).

Пропонуються результати дослідження лебегівської структури розподілу випадкової величини ξ (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярно неперервної компонент); автомобельних властивостей спектра розподілу; поведінки модуля характеристичної функції, тобто значення

$$L_\xi = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_\xi(t)|, \quad \text{де} \quad f_\xi(t) = M e^{it\xi} = \prod_{n=1}^{\infty} (p_{0n} + p_{2n} e^{\frac{it2}{4^n}} + p_{3n} e^{\frac{it3}{4^n}} + p_{5n} e^{\frac{it5}{4^n}});$$

автозгорток розподілу тощо.

Теорема 3. Розподіл випадкової величини ξ має чистий лебегівський тип, причому є

1) чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \max_{i \in A^*} \{p_{in}\} > 0; \quad (4)$$

2) чисто сингулярним, якщо $M = 0$ і $p_{2n} \cdot p_{3n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

3) абсолютно неперервним, якщо $p_{0n} = p_{2n} = p_{3n} = p_{5n} = \frac{1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Крім вказаних об'єктів дослідження у доповіді розглядається інші числові ряди, що володіють певними властивостями однорідності, їх множини неповних сум та розподіли випадкових підсум незалежними доданками або ж такими, що мають марковську залежність.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Takeya S.* On the partial sums of an infinite series // Tôhoku Sci Rep. — 1914. — **3**, no. 4. — P. 159–164.
- [2] *Pratsiomytyi M.V., Kovalenko V.M.* Probability measures on fractal curves (probability distributions on Vicsek fractal) // Random Operators and Stochastic equations, 2015; **23(3)**. — P. 161 – 168.
- [3] *Працьовитий М.В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2012. — 68с.
- [4] *Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2014. — **91**. — С. 133–142.
- [5] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296с.

Про стаціонарність довжин LGT -ліній при деформаціях поверхонь

Т. Ю. Подоусова

(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)

E-mail: tatyana_top@mail.ru

Нехай при нескінченно малій (н.м.) деформації першого порядку однозв'язної регулярної поверхні, заданої у E_3 -просторі, диференціал дуги кривої на ній не змінюється (в головному).

Тоді рівняння

$$\epsilon_{ij} dx^i dx^j = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

можна тлумачити як диференціальне рівняння ліній, що зберігають свою довжину при н.м. деформації. Тут ϵ_{ij} -варіації метричного тензора g_{ij} . Очевидно, у випадку $\epsilon_{ij} = 0$ рівняння (1) задовольняється довільними диференціалами dx^1, dx^2 і будь-яка крива на поверхні зберігає свою довжину, що відповідає н.м. згинанням.

Із (1) випливає наступне: на будь-якій регулярній поверхні існують два дійсних однопараметричних сімейства ліній, що зберігають свою довжину при н.м. деформації за умови $\epsilon_{12}^2 - \epsilon_{11}\epsilon_{22} > 0$.

У роботі [1] доведено, що на будь-якій регулярній поверхні без омбілічних точок існують лінії геодезичного скруту (LGT -лінії), диференціальне рівняння яких має вигляд:

$$h_{ij} dx^i dx^j = 0 \quad i, j = 1, 2,$$

де $h_{ij} = 2(Hg_{ij} - b_{ij})$, b_{ij} -коефіцієнти другої квадратичної форми, H -середня кривина поверхні.

Будемо вимагати, щоб при н.м. деформації диференціальне рівняння LGT -ліній і ліній стаціонарної довжини представляли на поверхні один і той же геометричний образ.

Справедлива наступна

Теорема 1. *Кожна н.м. деформація першого порядку регулярної однозв'язної поверхні без омбілічних точок із стаціонарними довжинами LGT -ліній завжди буде н.м. ареальною деформацією (А-деформацією) першого порядку.*

Слід відзначити, що н.м. ареальні деформації першого порядку зі стаціонарними довжинами ліній геодезичного скруту вивчалися в роботі [2].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Вашпанова Т.Ю., Безкоровайна Л.Л. LGT -сітка та її властивості. Вісник КПУ ім.Т.Г.Шевченка, серія фіз.-мат. науки, вип.2.-2010.-с.7-11.
- [2] Безкоровайна Л.Л., Вашпанова Т.Ю. А-деформації зі стаціонарними довжинами LGT -ліній. Укр.мат.журн.,-2010,т.62,№7,с.878-884

Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь

Т. Ю. Подоусова

(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)

E-mail: tatyana_top@mail.ru

Н. В. Вашпанова

(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)

E-mail: vasha_nina@ukr.net

Нехай у E_3 -просторі задана однозв'язна регулярна поверхня S класу C^3 рівнянням $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$, де x^1, x^2 -криволінійні координати змінної точки S .

Регулярне сімейство поверхонь S_t , яке залежить від малого параметра t ,

$$\tilde{\mathbf{r}}(x^1, x^2, t) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + t\mathbf{y}(x^1, x^2) \quad (1)$$

зветься нескінченно малою (н.м) деформацією першого порядку з вектором зміщення $\mathbf{y}(x^1, x^2)$ класу C^3 .

Припустимо, що при н.м. деформації (1) лінії геодезичного скруту (LGT-лінії) [1] переходять у лінії геодезичного скруту (в головному) і зберігається повна гаусова кривина K поверхні S .

Аналітично задача про існування таких н.м. деформацій S зводиться до дослідження і розв'язування наступної системи рівнянь відносно невідомих $T^{\alpha\beta}$, T^α , μ , ψ :

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha k} - b_\alpha^k T^\alpha = \mu_\alpha c^{k\alpha}, & b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + T_{,\alpha}^\alpha = 0, & c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0, \\ (c_{\alpha i} h_{j\beta} + 2H c_{\beta i} g_{\alpha j}) T^{ij} = (\psi + \mu) h_{\alpha\beta} + 2c_{\alpha i} T_{,\beta}^i - c_k^j g_{\alpha\beta} T_{,j}^k, \\ c_{i\alpha} T_{,j}^\alpha d^{ij} + 2\mu = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де $g_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ - метричний, дискримінантний та сітковий тензори S відповідно, H -середня кривина, $b_{\alpha\beta}$ -коефіцієнти другої квадратичної форми S , $b_\alpha^k = g^{k\beta} b_{\beta\alpha}$, $g^{\alpha\beta}$ - елементи матриці оберненої до матриці $\|g_{ij}\|$, $d^{ij} = \frac{1}{K} c^{i\alpha} c^{j\beta} b_{\alpha\beta}$, комою позначено коваріантне диференціювання на базі g_{ij} , індекси всюди приймають значення 1,2.

Через будь-який роз'язок системи рівнянь (2) вектор зміщення набуває вигляду

$$\mathbf{y}(M) = \int_{M_0 M} \left(c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\beta - \mu \mathbf{r}_i + c_{i\alpha} T^\alpha \mathbf{n} \right) dx^i + \mathbf{y}_0,$$

де криволінійний інтеграл обчислюється вздовж будь-якої спрямованої кривої, що належить S і з'єднує довільно фіксовану точку M_0 із змінною точкою M . Векторне поле \mathbf{y} при цьому буде однозначною функцією (з точністю до сталого вектора \mathbf{y}_0), в силу однозв'язності S .

Нехай S - мінімальна поверхня ($H = 0$).

Справедлива наступна

Теорема 1. *Н.м. деформація першого порядку мінімальної поверхні S із стаціонарними LGT-лініями і повною гаусовою кривиною цілком визначається тензорами*

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left(d^{\alpha i} T_{,i}^\beta + d^{\beta i} T_{,i}^\alpha \right)$$

та функціями $\mu = -\psi = -\frac{1}{2} c_{i\alpha} T_{,j}^\alpha d^{ij}$, які представлені через контраваріантний вектор T^α , який є розв'язком наступної системи рівнянь:

$$K_\alpha d^{\alpha i} T_{,i}^\beta - K d^{\alpha i} \left(T_{,i}^\beta \right)_{,\alpha} + K^2 d_\alpha^\beta T^\alpha = 0. \quad (3)$$

Очевидно, що система рівнянь (3) завжди має розв'язок $T^\alpha = 0$. Тоді вектор зміщення $\mathbf{y} = const$, що означає жорсткість поверхні S при даній н.м. деформації.

Позначимо $T^1 = \psi(x^1, x^2)$, $T^2 = \nu(x^1, x^2)$ і віднесемо поверхню S до ліній кривини, які в даному випадку утворюють ізотермічну сітку. Тоді система рівнянь (3) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \psi_{11} - \psi_{22} + a\psi_1 + b\psi_2 + c\psi = 0, \\ \nu_{11} - \nu_{22} + d\nu_1 + e\nu_2 + f\nu = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де a, b, c, d, e, f -відомі функції точки S . Кожне із цих рівнянь є однорідним диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних гіперболічного типу. Будемо шукати інтеграли цих рівнянь, які приймають певні значення

$$\psi \Big|_{x^1+x^2=x'_0} = t_1(x^1+x^2), \quad \psi \Big|_{x^1-x^2=y'_0} = s_1(x^1-x^2)$$

для рівняння (4.1) на характеристиках $x^1+x^2=x'_0$ і $x^1-x^2=y'_0$
і

$$\nu \Big|_{x^1+x^2=x''_0} = t_2(x^1+x^2), \quad \nu \Big|_{x^1-x^2=y''_0} = s_2(x^1-x^2)$$

для рівняння (4.2) на характеристиках $x^1+x^2=x''_0$ і $x^1-x^2=y''_0$.

Будемо рахувати, що функції

$$t_1(x^1+x^2), s_1(x^1-x^2), t_2(x^1-x^2), s_2(x^1-x^2)$$

мають неперервні похідні першого порядку і

$$t_1(y'_0) = s_1(x'_0), t_2(y''_0) = s_2(x''_0).$$

Згідно задачі Гурса [2], яку ми отримали, кожній парі функцій

$$t_1(x^1+x^2), s_1(x^1-x^2), \quad t_2(x^1-x^2), s_2(x^1-x^2)$$

відповідають єдині розв'язки цих рівнянь $\psi(x^1, x^2)$ і $\nu(x^1, x^2)$ відповідно.

Отже, має місце

Теорема 2. *Кожна мінімальна поверхня допускає н.м. деформацію зі стаціонарними LGT-лініями та повною гаусовою кривиною. Вектор зсуву $\mathbf{y}(x^1, x^2)$ при цьому залежить від наступних довільних регулярних функцій*

$$t_1(x^1+x^2), t_2(x^1-x^2), s_1(x^1-x^2), s_2(x^1-x^2).$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Вашпанова Т.Ю., Безкоровайная Л.Л. LGT-сеть и ее деформации. Современные проблемы математики и механики, Том 4. Математика, Вып.№2. К 100-летию со дня рождения Ефимова Н.В – Москва, 2011, с.157-163.
- [2] Кошляков Н.С. и др. Уравнения в частных производных математической физики. Учебное пособие для мех.-мат. фак.ун-тов, М., "Высшая школа 1970, 712 с.

Геометрія одного двосимвольного кодування дійсних чисел

Працьовитий М.В.

(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Інститут математики НАН України)

E-mail: prats4444@gmail.com

Лисенко І.М.

(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

E-mail: iryna.pratsiovyta@gmail.com

У математиці та її різноманітних застосуваннях використовується багато різних двосимвольних систем зображення чисел, які ґрунтуються на розкладах чисел в ряди, ланцюгові дроби, нескінченні добутки тощо. Такі системи кодування дійсних чисел називаються аналітичними. Ряди, які використовуються в якості моделей дійсних чисел в переважній більшості є або додатними, або почережними. Ми пропонуємо нову систему, залежну від двох параметрів, один з яких є додатним, а інший – від’ємним. Продуктивність нового зображення ілюструється застосуваннями.

Далі використовуватимемо позначення: $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ – алфавіт s -кової системи числення; $L_s = A_s \times A_s \times \dots \times A_s \times \dots$ – простір послідовностей алфавіту.

Нехай $\bar{g} = (g_0; g_1)$, де $0 < g_0 < 1$, $g_0 - g_1 = 1$, $g_0 > -g_1$, $\delta_0 \equiv 0$, $\delta_1 \equiv g_0$.

Лема 1. Для будь-якої послідовності $(\alpha_n) \in L_2$ ряд

$$\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1)$$

є збіжним і його сума належить відріzkи $[0; g_0]$.

Зауважимо, що має місце наступне очевидне твердження: значення виразу

$$\delta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j} = u_{n+1}$$

є нулем, тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{n+1} = 0$;

додатним числом, якщо $\alpha_{n+1} = 1$ і кількість одиниць серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є парним числом;

від’ємним числом, якщо $\alpha_{n+1} = 1$ і кількість одиниць серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є непарним числом. Тому, коли послідовність (α_n) містить нескінченну кількість 1, то ряд (1) містить нескінченну кількість як додатних, так і від’ємних членів. Після видалення нульових членів ряду (1) він стане знаковмінним (почережним), причому члени з непарними номерами додатні, а з парними – від’ємні.

Теорема 2. Для будь-якого числа $x \in [0; g_0]$ існує послідовність (α_k) така, що

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots} \quad (2)$$

Скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}$ ряду (2) і його суми x називається їх Δ -зображенням. При цьому число $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n -ою цифрою цього зображення.

Переважає більшість чисел відріzkи $[0; g_0]$ має єдине Δ -зображення, зліченна множина чисел має їх два, а саме: $\Delta_{01(0)} = \Delta_{11(0)}$, $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k 11(0)} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k 01(0)}$.

Геометрію зображення дійсних чисел (топологічні, метричні та фрактальні властивості) в значній мірі розкривають властивості циліндричних та хвостових множин, ергодичні властивості оператора зсуву цифр, метрична незалежність цифр та множин, частотні характеристики, зокрема, середнє значення цифр зображення тощо.

Означення 3. Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ для Δ -зображення називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} \equiv \{x : \alpha_i(x) = c_i, i = \overline{1, m}\}.$$

Якщо $\sigma_m = c_1 + c_2 + \dots + c_m$ є парним числом, то циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1(0)}$ і $b = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(0)}$, якщо ж σ_m – число непарне, то

$$\Delta_{c_1 \dots c_m} = [b; a].$$

Тоді $|\Delta_{c_1 \dots c_m}| = |b - a| = -g_1 \prod_{j=1}^m g_{c_j}$, $|\Delta_{c_1 \dots c_m i}| = |g_i| |\Delta_{c_1 \dots c_m}|$.

Якщо $\sigma_m = 2k$, то $\sup \Delta_{c_1 \dots c_m 0} = \inf \Delta_{c_1 \dots c_m 1}$.

Якщо $\sigma_m = 2k - 1$, то $\sup \Delta_{c_1 \dots c_m} = \inf \Delta_{c_1 \dots c_m 0}$.

Міра Лебега є інваріантною мірою оператора лівостороннього зсуву цифр Δ -зображення, означеного рівністю:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k \dots}.$$

Ця функція є кусково-лінійною і має вираз $\omega(x) = \frac{1}{g_{\alpha_1(x)}} x - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}$. Якщо $N_i(x, n)$ – це кількість цифр i серед перших n цифр Δ -зображення числа x , то границя (якщо вона існує) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, n)}{n} = \nu_i(x)$, $i \in \{0; 1\}$, називається частотою цифри i у Δ -зображенні числа x .

Теорема 4. Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел x відрізка $[0; g_0]$ мають місце рівності:

$$\nu_0(x) = g_0, \quad \nu_1(x) = -g_1.$$

Теорема 5. При $\tau_0 \neq g_0$ множина $M[\tau_0, \tau_1] = \{x : \nu_0(x) = \tau_0, \nu_1(x) = \tau_1\}$ є фрактальною і її розмірність Хаусдорфа-Безиковича обчислюється за формулою:

$$\alpha_0(M[\tau_0, \tau_1]) = \frac{\ln \tau_0^{\tau_0} \tau_1^{\tau_1}}{\ln g_0^{\tau_0} |g_1|^{\tau_1}}.$$

Теорема 6. Нехай $\bar{g} = (g_0, g_1, g_2)$, де $g_0, -g_1, g_2 \in (0; 1)$, $g_0 > 0 < g_2$, $g_0 + g_1 + g_2 = 1$. Неперервна ніде не монотонна функція f , означена рівністю

$$y = f(x) = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3) = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^G,$$

$\delta_0 = 0$, $\delta_1 = g_0$, $\delta_2 = g_0 + g_1$, $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3 = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-4} \alpha_n$ встановлює бієктивне відображення множини канторівського типу $C[\Delta^3, \{0, 1\}]$ з фрактальною розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\log_3 2$ на відрізок $[0; g_0]$.

У доповіді пропонуються розв'язки і інших тополого-метричних та ймовірнісних задач, що стосуються цього нового зображення дійсних чисел

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2012. — 68с.

- [2] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [3] *Турбин А.Ф., Працьовитий Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. - Київ: Наукова думка, 1992. - 208 с.

Інваріант Пейксото для хордових діаграм на поверхні з межею

Пришляк Олександр Олегович

(м.Київ)

E-mail: prishlyak@yahoo.com

Прус Андрій Анатолійович

(м.Київ)

E-mail: andrei.prus@mail.ru

У роботі М.М.Пейксото [1] ввів поняття «розрізуючого графа», який ставиться у відповідність довільному потоку Морса та довів теорему про те, що даний граф є повним топологічним інваріантом, який класифікує потоки Морса на двовимірних многовидах з точністю до топологічної еквівалентності.

Нашою метою є узагальнити відомості про даний інваріант для поверхонь з межею та описати процес побудови «розрізуючого графа» для потоків Морса на зв'язних компактних поверхнях зі зв'язною межею, заданих за допомогою хордових діаграм. В якості кола(виділеного циклу) будемо розглядати межу поверхні, а хордами будуть сепаратриси сідлових точок межі.

Задача побудови інваріанта Пейксото для деякого потоку Морса еквівалентна задачі побудови так званої системи обертання (rotation system) [2] для даного потоку. Опишемо процес побудови системи обертання для потоку, заданого за допомогою хордової діаграми.

Пронумеруємо всі ребра діаграми та будемо по черзі розглядати особливі точки потоку. Навколо кожної особливої точки опишемо коло достатньо малого радіуса. Проходячи по тій частині кола, яка знаходиться всередині діаграми на своєму шляху ми будемо зустрічати ребра, які входять або виходять із особливої точки. Номера ребер записуємо до списку в такому порядку, в якому вони зустрічалися при обході. Якщо в результаті розрізання поверхні по деякому ребру на діаграмі присутні два ребра, які ототожнюються, то в такому випадку при обході деякої особливої точки та проході через одне з таких ребер ми переносимося на інше та продовжуємо обхід по колу навколо відповідної особливої точки, що еквівалентна початковій.

Отримані списки, у кількості яка дорівнює кількості особливих точок, і будуть складати систему обертання даного потоку. Дві системи будуть еквівалентними, якщо одну з іншої можна отримати за допомогою підстановки на множині номерів ребер або зміною порядку номерів у списку на протилежний одночасно для всіх списків.

Теорема 1. *Два потоки Морса з особливими точками на межі будуть траєкторно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх системи обертання еквівалентні.*

Приклад 2. Для тора з діркою з 6 особливими точками на межі існує 2 різних хордових діаграм. Системи обертання для даних діаграм мають наступний вигляд:

$$(1; 2; 3; 4), (5; 6; 7; 8), (9; 6; 1), (8; 3; 9), (4; 7; 10), (10; 2; 5)$$

$$(1; 2; 3; 4), (5; 6; 7; 8), (9; 2; 5), (8; 3; 10), (10; 6; 1), (4; 7; 9)$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] M. M. Peixoto. On the classification of flows on 2-manifolds. In book: "Dynamical systems", New York, London: Academic Press, 1973, p. 389–419.
- [2] Jonathan L. Gross, Thomas W. Tucker. *Topological Graph Theory*, Courier Corporation, 1987. ISBN: 0486417417, 9780486417417

Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах періодичних цілих функцій

А. С. Сердюк

(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua

І. В. Соколенко

(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

E-mail: sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і L_p , $1 \leq p \leq \infty$, — простори 2π -періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$. Позначимо через $C_{\bar{\beta},1}^\psi$ класи 2π -періодичних функцій f , які зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{\bar{\beta}}(x-t)\varphi(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

в якій $\varphi \perp 1$, $\|\varphi\|_1 \leq 1$, а $\Psi_{\bar{\beta}}(\cdot)$ — ядра вигляду

$$\Psi_{\bar{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\pi\beta_k}{2}\right), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) > 0, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty. \quad (3)$$

Якщо послідовності $\bar{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ є стаціонарними послідовностями, тобто $\beta_k = \beta$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, то класи $C_{\bar{\beta},1}^\psi$ позначатимемо через $C_{\beta,1}^\psi$. Якщо $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, класи $C_{\bar{\beta},1}^\psi$ і $C_{\beta,1}^\psi$ будемо позначати через $C_{\bar{\beta},1}^{\alpha,r}$ та $C_{\beta,1}^{\alpha,r}$, відповідно. Останні класи називають іноді класами узагальнених інтегралів Пуассона.

Будемо розглядати класи $C_{\bar{\beta},1}^\psi$ за умови, що послідовність $\psi(k) > 0$ така, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \quad (4)$$

Як впливає з [1, с. 139-145], класи $C_{\bar{\beta},1}^\psi$ за виконання умови (4) складаються із функцій, які допускають регулярне продовження в усю комплексну площину, тобто складаються із цілих функцій. З іншого боку, як показано в [2], для того, щоб функція f належала до множини усіх дійснозначних на дійсній осі цілих функцій, необхідно і достатньо, щоб вона могла бути зображена згорткою вигляду (1) у якій $\varphi \in L_1$, а коефіцієнти $\psi(k)$ ядра $\Psi_{\bar{\beta}}$ вигляду (2) задовольняли умову (4).

Нехай $f \in C$. Через $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$ позначатимемо тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у рівномірно розподілених вузлах $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Порядкові оцінки збіжності інтерполяційних поліномів $\tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)$ до f в метриках просторів C і L_p , що виражались в термінах послідовностей найкращих наближень функцій в C і L_p , одержані у роботах І.І. Шарпудінова (1983) та К.І. Осколкової (1986).

Розглянемо величину

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\bar{\beta},1}^\psi)_{L_p} = \sup_{f \in C_{\bar{\beta},1}^\psi} \|f(\cdot) - \tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)\|_p. \quad (5)$$

При $p = 1$ асимптотична поведінка величин вигляду (5) при $n \rightarrow \infty$ в залежності від тих чи інших обмежень на послідовності $\psi(k)$ та β_k досліджувалась у роботах [3]–[6]. Зокрема у [4, с. 994] за виконання умови (4) для довільних $\beta_k \in \mathbb{R}$ встановлено асимптотичну рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi)_{L_1} = \frac{16}{\pi^2} \psi(n) + O(1) \left(\frac{\psi(n)}{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) \right), \quad (6)$$

в якій $O(1)$ рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.

Крім того, у роботі [7, с. 279-280] отримано результати, з яких випливає, що за виконання умови (4) при довільних $\beta_k \in \mathbb{R}$ має місце асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi)_{L_\infty} = \frac{2}{\pi} \psi(n) + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k), \quad (7)$$

в якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.

Питання про асимптотичну поведінку величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi)_{L_p}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, за виконання умови (4) при $1 < p < \infty$ залишалось відкритим.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $1 \leq p \leq \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, а $\psi(k) > 0$ задовольняє умову (3). Тоді при всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце оцінка*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi)_{L_p} = \frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\pi^{1+\frac{1}{p}}} \|\cos t\|_p^2 \psi(n) + O(1) \left(\frac{\psi(n)}{n} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \psi(\nu) \right), \quad (8)$$

в якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів. Якщо, крім того, $\psi(k)$ задовольняє умову (4), то при $n \rightarrow \infty$ оцінка (8) є асимптотичною рівністю.

Наведемо наслідок з теореми 1 у випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 1$.

Теорема 2. *Нехай $r > 1$, $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що*

$$n^{1-r} \ln(n+1) \leq \alpha r, \quad (9)$$

має місце рівномірна відносно усіх розглядуваних параметрів оцінка

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\alpha,r})_{L_p} = e^{-\alpha n^r} \left(\frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\pi^{1+\frac{1}{p}}} \|\cos t\|_p^2 + O(1) \frac{1}{n} \right). \quad (10)$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] А. И. Степанец. *Методы теории приближений: В 2 ч.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, Ч. 1, 2002.
- [2] Степанец А.И., Сердюк А.С., Шидлич А.Л. Классификация бесконечно дифференцируемых периодических функций // *Укр. мат. журн.*, 60, № 12: 1686–1708, 2008.
- [3] В.П. Моторний. Приближение периодических функций интерполяционными многочленами в L_1 . *Укр. мат. журн.*, 42, № 6: 781–786, 1990.
- [4] Сердюк А.С. Наближення періодичних функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L_1 . *Укр. мат. журн.*, 52, № 7: 994–998, 2000.
- [5] А.С. Сердюк. Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами нескінченно диференційовних періодичних функцій в інтегральній метриці. *Укр. мат. журн.*, 53, № 12: 1654–1663, 2001.
- [6] А.С. Сердюк. Наближення періодичних аналітичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці простору L . *Укр. мат. журн.*, 54, № 5: 692–699, 2002.
- [7] А.С. Сердюк, В.А. Войтович. Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена. *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 7, № 1: 274–297, 2010.

Деякі аспекти теорії проєктивних перетворень просторів дотичних розшарувань зі спеціальною метрикою

Синюкова Олена Миколаївна

(ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», Одеса, Україна)

E-mail: olachepok@ukr.net

У результаті досліджень у межах інваріантної теорії наближень геометричних об'єктів ріманова простору V^n , $n \in N$, на дотичному розшаруванні $T(V^n)$ було побудовано кілька різних метрик та кілька різних об'єктів афінного зв'язку [1]. Кожна з таких метрик породжує на $T(V^n)$ певну геометрію, природним чином пов'язану з інваріантною теорією наближень базового ріманова простору V^n [2].

У роботі розглянуто простір $T(V^n)$ з метрикою

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\tilde{D}y^\alpha\tilde{D}y^\beta + \tilde{g}_{\alpha\beta}(x; y)Dy^\alpha Dy^\beta. \quad (1)$$

У (1) $g_{\alpha\beta}(x)$ — компоненти метричного тензора базового ріманова простору V^n ,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x; y) = g_{\alpha\beta}(x) + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}(x)y^i y^j;$$

$$Dy^\alpha = dy^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x)y^\beta dx^\gamma;$$

$$\tilde{D}y^\alpha = dy^\alpha + \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(x; y)y^\beta dx^\gamma;$$

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(x; y) = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) - \frac{1}{3}R_{(\beta\gamma)\sigma}^\alpha(x)y^\sigma,$$

де $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x)$, $R_{\beta\gamma\sigma}^\alpha(x)$, $R_{i\alpha\beta j}(x)$ — відповідно, компоненти афінного зв'язку, тензора Рімана і тензора кривини базового ріманова простору V^n .

У явному вигляді підраховані компоненти $g_{ij}(x; y)$ метричного тензора метрики (1). Спираючись на них, за формулами, аналогічними до стандартних формул ріманової геометрії (розглядаються частинні похідні лише за компонентами змінної x), спочатку введені символи Кристофеля першого роду, а потім, за допомогою елементів матриці, оберненої до матриці метричного тензора $g_{ij}(x; y)$, символи Кристофеля другого роду, отримані рівняння, що визначають криві, які називаються геодезичними лініями простору $T(V^n)$.

Далі природним чином введено поняття проєктивного перетворення простору $T(V^n)$, проаналізовано проблему існування проєктивних перетворень, які є продовженнями відповідних перетворень бази, проєктивних перетворень, які зберігають структуру розшарування, і загальних проєктивних перетворень. Знайдені внутрішні достатні умови тензорного характеру локального існування проєктивних перетворень простору $T(V^n)$ перших двох типів. Показано, що дані умови справджуються, зокрема, у випадку, коли базовий простір V^n є простором постійної кривини.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Н. С. Синюков., Е. Н. Синюкова., Ю. А. Мовчан Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и её обобщений *Изв. вузов. Математика*, 3(382) : 76–80, 1994.
- [2] Е. Н. Синюкова. Геометрия касательного расслоения риманова пространства, индуцированная инвариантной теорией приближений базового пространства. *Сборник трудов Международной научной конференции "Современная геометрия и её приложения"* Казань, Изд-во Казан ун-та.: 125–127, 2017.

Двопараметричні особливості одnogілкових алгебраїчних кривих

Руслан Скуратовський

(МАУП, факультет Інформаційних і комп'ютерних технологій)

E-mail: ruslcomp@mail.ru

Встановлено необхідні і достатні умови того, що плоска особливість алгебраїчної кривої з одною гілкою має як максимум двопараметричні сімейства ідеалів. Нагадаємо, що плоска особливість алгебраїчної кривої над полем k — це k -алгебра вигляду $R = k[[x,y]]/(f)$. Вона зветься одnogілковою, якщо R не має дільників нуля. Кажуть, що R домінує особливість R' , якщо $R \supseteq R'$.

Теорема 1. *Нехай R є одnogілковою особливістю. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

1) R має як максимум двопараметричні сімейства ідеалів.

2) Якщо $\text{char } k \neq 2$, то R домінує одну з наступних особливостей:

$$E_{30}, E_{32}, W_{24}, W_{2*}^{\#}, W_{30}, N_{20}, N_{24}, N_{28}.$$

2a) Якщо $\text{char } k = 2$, то R домінує одну з наступних особливостей:

$$E_{30}, E_{32}, W_{18}, W_{1,*}^{\#}, N_{20}, N_{24}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. V. Skuratovskii. Ideals of one branch curve singularities of type W. *Ukrainian Math. J.*, 62(4) : 530–536, 2010.
- [2] Y. A. Drozd, R. V. Skuratovskii. Cubic rings and their ideals (in Ukrainian) *Ukr. Mat. Zh.*, 62(11) : 464–470, 2010.
- [3] Y. Drozd, R. Skuratovskii. One branch curve singularities with at most 2-parameter families of ideals. *Algebra and Discrete Math.*, 13(2) : 209–219, 2012.

Псевдо-вайсманові многовиди та їх приклади

Є. В. Черевко

(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)

E-mail: cherevko@usa.com

О. Є. Чепурна

(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)

E-mail: chepurna67@gmail.com

Псевдовайсманові многовиди (pseudo-Vaisman manifolds) – це такі ЛКК-многовиди, форма Лі яких задовільняє умові [1]:

$$\Phi_4(\nabla_X \omega(Y)) = \frac{\|\omega\|^2}{2} g(X, Y). \quad (1)$$

де Φ_4 – четвертий проекційний оператор Обати:

$$\Phi_4(\omega_{i,j}) = \frac{1}{2}(\delta_i^a \delta_j^b + J_i^a J_j^b) \omega_{a,b},$$

Умову (1) можна підсилити, а саме, вимагати

$$\nabla \omega(X, Y) = \frac{\|\omega\|^2}{2} g(X, Y) \quad (2)$$

ЛКК-многовиди, для яких виконується умова (2) матимуть назву *сильно псевдовайсманові многовиди* (*strong pseudo-Vaisman manifolds*). Наведемо приклади таких многовидів.

Приклад 1. На добутку $E \times \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{m-1}$, де $E = \{z^1 = x^1 + iy^1 \in \mathbb{C} : z^1 \cdot \bar{z}^1 > 1\}$ можна

задати конформно-келерову метрику таким чином

$$g = \frac{1}{\ln(z^1 \cdot \bar{z}^1)} \delta_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta. \quad (3)$$

Відповідно, фундаментальна форма:

$$\Omega = -\sqrt{-1} \frac{1}{\ln(z^1 \cdot \bar{z}^1)} \delta_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta, \quad (4)$$

та форма Лі:

$$\omega = -\frac{(z^1)^{-1} dz^1 + (\bar{z}^1)^{-1} d\bar{z}^1}{\ln(z^1 \cdot \bar{z}^1)}.$$

У (3) та (4) $\alpha, \beta = \overline{1, m}$, m – комплексна розмірність многовиду. Відмінні від нуля коефіцієнти зв'язності, що є узгодженою з метрикою (4).

Приклад 2. Розглянемо добуток $H \times \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{m-1}$, де H є правою півплощиною площини

комплексних чисел $H = \{z^1 = x^1 + iy^1 \in \mathbb{C} : x^1 > 0\}$. Метрика

$$g = \frac{2}{z^1 + \bar{z}^1} \delta_{\alpha\beta} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta; \quad \alpha, \beta = \overline{1, m}.$$

на многовиді $M^n = H \times \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{m-1}$, ($n = 2m$) є конформно-келеровою. Фундаментальна

форма матиме вигляд

$$\Omega = -\sqrt{-1} \frac{2}{z^1 + \bar{z}^1} \delta_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta; \quad \alpha, \beta = \overline{1, m}.$$

А форма Лі

$$\omega = -\frac{dz^1 + d\bar{z}^1}{z^1 + \bar{z}^1}$$

У дійсних координатах метрика виглядатиме таким чином:

$$g_{ij} = \frac{1}{x^1} \delta_{ij}, \quad (5)$$

а форма Лі, відповідно

$$\omega = -\frac{dx^1}{x^1}.$$

Цей многовид є псевдо-вайсмановим многовидом з посиленою умовою.

Для наведених ЛКК-метрик обчислені узгоджені з ними коефіцієнти зв'язності, та компоненти тензорів Рімана та Річчі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Cherevko Y., Cherpurna O. Complex and Real Hypersurfaces of Locally Conformal Kähler Manifolds. *Proceedings of the Eighteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*, Sofia: Avangard Prima, 2017, p. 117 - 129.

Про Р-деформації поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини

Федченко Ю.С.

(Одеська національна академія харчових технологій)

E-mail: fedchenko_julia@ukr.net

Вивчаємо нескінченно малі геодезичні деформації поверхонь (Р-деформації) [1], [2] за умови стаціонарності відхилення від дотичної площини у будь-якому напрямі [3].

Розглянемо поверхню S класу C^3 в евклідовому просторі E_3 з векторно-параметричним рівнянням $\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2)$ та її деформацію S_ε : $\bar{r}_\varepsilon = \bar{r}(x^1, x^2) + \varepsilon \bar{U}(x^1, x^2)$. Тут $\bar{U}(x^1, x^2)$ - вектор зміщення, ε - малий параметр.

Нехай $\bar{U}_i = c_{i\alpha} \left(T^{0\alpha\beta} - \frac{3}{2} \psi c^{\alpha\beta} + c_1 c^{\alpha\beta} \right) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^\alpha \bar{n}$, де $T^{0\alpha\beta}$, T^α - тензорні поля на S , а ψ - опорна функція деформації [2].

Знайдено основні рівняння Р-деформацій поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини:

$$\begin{cases} \nabla_j T^k = -b_{\beta j} T^{0k\beta} - \left(\frac{3}{2} \psi - C_1 \right) b_{\alpha j} c^{\alpha k}; \\ \nabla_i T^{0kh} = T^\alpha b_{i\alpha} g^{kh} + \frac{1}{2} \psi_i c^{kh} + \psi_\alpha c^{\alpha k} \delta_i^h. \end{cases} \quad (1)$$

Р-деформації, для яких $\psi_i = 0$ називаються афінними (РА-деформації); вважаємо їх тривіальними нескінченно малими геодезичними деформаціями.

У результаті дослідження основних рівнянь встановлено, що якщо поверхня $K \neq 0$ допускає Р-деформацію зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі, то така деформація є афінною.

Для РА-деформацій поверхонь виписано представлення тензорних полів T^{0kh} , T^k в явному вигляді.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ж. Радулович, Й. Микеш, М. Л. Гаврильченко *Геодезические отображения и деформации римановых пространств*. Одесса, Оломоуц: 127, 1997.
- [2] Ю. С. Федченко. Нескінченно малі геодезичні деформації поверхонь. *Proceedings of the international geometry center*, 4(1) : 50–63, 2011.
- [3] Л. Л. Безкоровайная. Деформация поверхности со стационарным отклонением от касательной плоскости. *Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2006"*: 34–35, 2006.

Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі

Хомич Юлія

(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)
E-mail: khomych.yuliia@gmail.com

Піструїл Маргарита

(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)
E-mail: margaret.pistruil@gmail.com

Поверхня Гауді широко застосовується в сучасній архітектурі. Надзвичайно важливо визначити можливість її неперервного деформування за умови тих чи інших обмежень. В роботах [1], [2] доведено існування нетривіальних нескінченно малих згинань та встановлено їх довільність. У цій роботі для поверхні Гауді досліджується більш широкий клас нескінченно малих деформацій, а саме таких, при яких варіація елемента площі $\delta d\sigma$ є заданою функцією. Такі деформації називаються квазіареальними [3]. Запропоновано варіант математичної моделі зазначеної деформації для поверхні Гауді, за допомогою якої знайдено її поля зміщення квазіареальної деформації та встановлено деякі властивості. Поверхня Гауді допускає ареальну нескінченно малу деформацію, при якій існує дійсна ортогональна сітка ліній стаціонарної довжини.

Припустимо, що векторно-параметричне рівняння поверхні Гауді задано у вигляді:

$$S : \bar{r}(x^1, x^2) = \left\{ x, y, mx \sin \frac{y}{a} \right\}, \quad (1)$$

де a і m – довільні відмінні від нуля константи, $x \neq 0$, $\frac{y}{a} \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Наведемо деякі її диференціально-геометричні характеристики:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a}; \quad g_{12} = \frac{1}{2a} m^2 x \sin \frac{2y}{a}; \quad g_{22} = 1 + \frac{1}{a^2} m^2 x^2 \cos^2 \frac{y}{a}; \\ g^{11} &= \frac{1}{a^2 g} \left(a^2 + m^2 x^2 \cos^2 \frac{y}{a} \right); \quad g^{12} = -\frac{1}{2ag} m^2 x \sin \frac{2y}{a}; \\ g^{22} &= \frac{1}{g} \left(1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} \right); \quad g = 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + \frac{1}{a^2} m^2 x^2 \cos^2 \frac{y}{a}; \\ K &= -\frac{m^2}{a^2 g^2} \cos^2 \frac{y}{a}; \quad 2H = -\frac{mx \sin \frac{y}{a}}{a^2 g \sqrt{g}} \left(2 + m^2 \cos^2 \frac{y}{a} \right). \end{aligned}$$

Варіація елемента площі $\delta d\sigma$ виражається через перший тензор деформації $2\varepsilon_{ij} = \delta g_{ij}$:

$$\delta d\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} d\sigma$$

при нескінченно малій деформації поверхні

$$\bar{r}^*(x^1, x^2, t) = \bar{r}(x^1, x^2) + t\bar{U}(x^1, x^2), \quad (2)$$

де $\bar{U}(x^1, x^2)$ – поле зміщення, $t \rightarrow 0$. Очевидно, величину $\delta d\sigma$ можна вважати заданою тоді і лише тоді, коли є заданою функція $\varphi(x^1, x^2) \in C^1$ точки поверхні, яка задовольняє умову

$$\varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 2\varphi.$$

Поле зміщення \bar{U} розкладемо через вектори $\bar{r}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha}$, \bar{n} :

$$\bar{U} = U^\alpha \bar{r}_\alpha + U^\circ \bar{n}, \quad (3)$$

де U^α – деяке поле контраваріантного вектора на S , а U° – поле інваріанта.

Теорема 1. Нескінченно мала деформація поверхні Гауді є квазіареальною тоді і лише тоді, коли компоненти поля зміщення та функція φ класу C^1 задовольняють диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^1}{\partial x} + \frac{\partial U^2}{\partial y} + \frac{1}{ga^2} m^2 x \cos^2 \frac{y}{a} U^1 + \frac{1}{2a^3 g} m^2 (a^2 - x^2) \sin \frac{2y}{a} U^2 + \\ + \frac{1}{a^2 g \sqrt{g}} m x (2 + m^2 \cos^2 \frac{y}{a}) \sin \frac{y}{a} U^0 = 2\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 2. Поверхня Гауді ($a = m = 1$) допускає нескінченно малу деформацію з заданою варіацією елемента площі. При цьому поле зміщення через довільну функцію $\varphi \in C^1$ виражається явно:

$$\bar{U}(x, y) = \left\{ \frac{-\varphi g}{2x(2 + \cos^2 y)}, \frac{-\varphi g \sqrt{g} \operatorname{ctg} y - 2 \cos^2 y - 4}{2\sqrt{g}(2 + \cos^2 y)}, \frac{\varphi g \sqrt{g} - x^2(2 + \cos^2 y) \sin 2y}{2x\sqrt{g}(2 + \cos^2 y) \sin y} \right\}.$$

За умови $\varphi = 0$ нескінченно мала квазіареальна деформація є ареальною. Вона зберігає елемент площі поверхні.

Теорема 3. Поверхня Гауді ($a = m = 1$) допускає ареальну нескінченно малу деформацію з полем зміщення

$$\bar{U}(x, y) = \left\{ 0, \frac{-1}{\sqrt{g}}, \frac{-x \cos y}{\sqrt{g}} \right\}. \quad (5)$$

Теорема 4. При ареальній нескінченно малій деформації з полем зміщення (5) на поверхні Гауді існує дійсна ортогональна сітка ліній стаціонарної довжини, диференціальне рівняння якої має вигляд:

$$(1 + \sin^2 y) \cos y dx^2 - x(1 + \sin^2 y) \sin y dx dy - (1 + x^2) \cos y dy^2 = 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] L. S. Velimirovic, M. D. Cvetkovic *Gaudi surfaces and curvature based functional variations* // Applied Mathematics and Computation, №228, P. 377-383, (2014).
- [2] L. S. Velimirovic, M. D. Cvetkovic, M. S. Ciric, N. Velimirovic. *Analysis of Gaudi surfaces at small deformations* // Applied Mathematics and Computation, №218(13), P. 6999-7004, (2012).
- [3] Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич. *Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3* // Proc. Intern. Geom. Center, №7(2), С. 6-19, (2014).

Постоянство типа обобщенных многообразий Кенмоцу

Арсеньева Ольга Евгеньевна
(МПГУ, Москва, Россия)
E-mail: oe.ars@yandex.ru

Кириченко Вадим Федорович
(МПГУ, Москва, Россия)
E-mail: highgeom@yandex.ru

Рустанов Алигаджи Рабаданович
(ИСГО МПГУ, Москва, Россия)
E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Определение 1. [1] Класс почти контактных метрических многообразий, характеризуемых тождеством $\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi X - \eta(X)\Phi Y$; $X, Y \in X(M)$, называется *обобщенными многообразиями Кенмоцу* (короче, *GK-многообразиями*).

Определение 2. [2] Комплексная K -алгебра \mathfrak{R} называется *K -алгеброй постоянного типа*, если $\exists c \in \mathbb{C} \forall X, Y \in \mathfrak{R} : \langle \langle X, Y \rangle \rangle = 0 \Rightarrow \|X * Y\|^2 = c\|X\|^2\|Y\|^2$.

Теорема 3. *GK-многообразие постоянного ненулевого типа является SGK-многообразием II рода.*

Теорема 4. *Класс SGK-многообразий II рода нулевого постоянного типа совпадает с классом многообразий Кенмоцу. Класс SGK-многообразий II рода ненулевого постоянного типа конциркулярным преобразованием переводятся в почти контактные метрические многообразия локально эквивалентных произведению шестимерного собственного NK-многообразия на вещественную прямую.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Умнова С.В. Геометрия многообразий Кенмоцу и их обобщений: Дис. канд. физ.-мат. наук. М.: МПГУ, 2002. – 88 с.
[2] Кириченко В.Ф. K -алгебры и K -пространства постоянного типа с индефинитной метрикой. *Мат. заметки*, т. 29, №2, 265–278, 1981.

Геометрическая интерпретация законов физиологического развития растений

Т. Н. Болотова, В. И. Макаров

(ХНАДУ, 61000, Украина, г. Харьков, ул. Ярослава Мудрого, 25)

E-mail: tatabolotova1975@gmail.com, v.i.makarov37@gmail.com

Биологические характеристики развития растений существуют в ограниченном интервале факторов, влияющих на физиологию развития растений. Нижнюю границу этого интервала определяет закон минимального ограничивающего фактора — закон минимума Либиха [1]. Верхнюю границу этого интервала определяет закон максимального ограничивающего фактора — закон толерантности Шелфорда [2]. В экспериментах Гельрегеля [3] и Аррениуса [4] было установлено, что существуют два типа однофакторных зависимостей урожая сельскохозяйственных культур от внешних факторов. Первый тип зависимостей урожая сельскохозяйственных культур от внешнего фактора (например, яровой ячмень) — кривая параболического типа с одной точкой максимума [3]. Второй тип зависимостей урожая сельскохозяйственных культур (например, гороха) от внешнего фактора — двухвершинная кривая, имеющая точку минимума и две точки максимума [4]. Если однофакторные функции урожайности это биологические кривые, существующие в ограниченном интервале внешнего фактора, то многофакторные функции урожайности — это биологические поверхности, существующие в ограниченной области пространства внешних факторов. В нашем случае имеется 3 фактора — это калий К, фосфор Р и азот N, т.е. функция урожайности — это функция от трех переменных $Y(K, P, N)$. На границе области функция урожайности обращается в ноль. Поэтому в семействе поверхностей уровня функции существует хотя бы одна выделенная поверхность уровня с градиентом равный нулю в некоторой точке. Из соображений общего положения можно считать, что мы имеем дело с морсовской функцией. В окрестности морсовской особой точки уравнение поверхности уровня можно представить в явном виде. Это будут центральные поверхности 2-го порядка, которые имеют два типа особых точек: эллиптические (минимумы и максимумы, соответствующие индексу ± 1) и гиперболические (соответствующие индексу ± 1 в зависимости от индекса перестройки Морса). Статистический анализ (методом наименьших квадратов) базы данных из 81 точки, опубликованных в [5], показал наличие у функции урожайности точки максимума и двух различных типов гиперболических точек (индексов $+1$ и -1). Если предположить, что область определения функции гомеоморфна шару, то это коррелирует с тем, что эйлерова характеристика шара равна 1.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Liebig.. *Chemistry in Its Application to Agriculture and Physiology*. 4th-ed., Taylor and Walton, London, 1847.
- [2] V. E. Schelford *Animal Communities in Temperate America*. University of Chicago, 1913.
- [3] В. Р. Вильямс *Почвоведение. Земледелие с основами почвоведение*. 5-е изд, Москва, Госиздатсельхозлит, 1940.
- [4] Д. А. Сабинин *Физиологические основы питания растений*. Москва, Изд-во АН СССР, 1955.
- [5] В. Н. Перегудов *Планирование многофакторных полевых опытов с удобрениями и математическая обработка их результатов*. Москва, Колос, 1978.

Об изотопности некоторых функций

Бондарь О. П.

(ЛНА НАУ, Кропивницкий)

E-mail: bondarkla@ukr.net

В.В.Шарко, [1], определил и использовал для изучения свойств многообразий изотопные функции Морса — функции, соединяемые гладким путем в пространстве функций Морса. Обобщением их есть изотопные функции, определенные, [2], так:

Определение 1. Функции f_0 и f_1 на многообразии M называются изотопными (C^r -изотопными или непрерывно изотопными или изотопными функциями Морса), если существуют такая неподвижная на X изотопия $H : (M, X) \times I \rightarrow (M, X) \times I$ и изотопия $h : [0, 1] \times I \rightarrow [0, 1] \times I$, $H_t \in Iso_0(M, X)$ и $h_t \in Iso_0^+([0, 1])$, что для всех $t \in [0, 1]$ $f_t = h_t \circ f_0 \circ H_t^{-1}$ - функции одинакового вида (C^r -гладкие или непрерывные или функции Морса).

В [3] была показана изотопность функций леммы Морса. Следующие два утверждения, важные для классификации отображений многообразий, несложно получить непосредственно из теории Морса.

Предложение 2. Пусть $f_0 : R^n \rightarrow R$ - гладкая функция в окрестности U_0 регулярной точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ этой функции и $(\partial f_0 / \partial x^i)(x_0) \neq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Тогда можно указать координатную форму изотопии $H : U_0 \times [0, 1] \rightarrow U_1 \times [0, 1]$ окрестности U_0 точки x_0 на некоторую окрестность U_1 начала координат пространства R^n , такую, что дифференцируемые отображения $H_t \subset Iso_0(U_1)$, $H_0 = id_{U_1}$, $t \in [0, 1]$, и для всех точек $y = (y^1, \dots, y^n) \in U_1$, для которых $y^i(x_0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, функция

$$f_1 = s^1 y_1^1 + \dots + s^n y_1^n, \text{ где}$$

$s^i = \text{sign}((\partial f_0 / \partial x^i)(0))$, $i = 1, \dots, n$, будет правоизотопной функции $f_0 : f_1 = f_0 \circ H_1^{-1}$, то есть существует такое локальное изотопное преобразование системы координат, что функция f_0 будет дифференцируемо изотопна функции f_1 .

Предложение 3. Пусть $f_0 : R \rightarrow R$ — гладкая функция в окрестности U_0 нуля, для которой функция и ее производные $f_0(0) = f_0'(0) = \dots = f_0^{(k-1)}(0) = 0$, но $f_0^{(k)}(0) \neq 0$.

Тогда можно указать координатную форму изотопии $H : U_0 \times [0, 1] \rightarrow U_1 \times [0, 1]$, окрестности U_0 нуля на, возможно, меньшую его окрестность U_1 такую, что дифференцируемые отображения $H_t \subset Iso_0^+(U_1)$, $H_0 = id_{U_1}$, $t \in [0, 1]$, и для всех точек $y \in U_1$, для которых $y(0) = 0$, функция

$$f_1 = \text{sign} f_0^{(k)}(0) y^k$$

будет правоизотопной функции f_0 .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. В. Шарко. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). — Киев: Наук. думка, 1990.
- [2] О.П.Бондарь. Об определении изотопных функций // Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2015" С.67.
- [3] О.П.Бондар. Про ізотопність функцій леми Морса // Algebraic and geometric methods of analysis, Odessa, 2017. https://www.imath.kiev.ua/topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf P.4.

Управление структурой кластеров в перколяционных задачах с самоорганизацией

Гергега А.Н.

(Одесская национальная академия пищевых технологий)

E-mail: aherega@gmail.com

Кривченко Ю.В.

(Одесская национальная академия пищевых технологий)

E-mail: yuri_v_k@rambler.ru

Перколяционные задачи с самоорганизацией – неотъемлемая составляющая теории самоорганизующейся критичности, предложенной в [1],[2] в первую очередь, для осмысления связи между локальной организацией структуры и механизмом развития критичности [3].

К наиболее общим закономерностям эволюции перколяционных систем с взаимодействующими элементами относится существование в них неравновесных квазистационарных состояний, возникающим за счет многомасштабных корреляций в пространстве и времени [4]. Известно, что пространственные корреляции обнаруживают себя в структуре перколирующих фрактальных множеств вблизи порога протекания, временные – в движении к таким состояниям при медленных воздействиях на систему, позволяющих протекать процессам самоорганизации. При этом стремление к самоорганизующейся критичности приобретает универсальный характер, а значит, не зависит от специфики системы. Это можно понять в контексте принципа наименьшего действия, регулирующего поведение динамических систем в наиболее общем виде: из всего многообразия неравновесных стационарных состояний при бесконечно медленном внешнем воздействии самосогласованная динамическая система выбирает то, для которого действие минимально [4].

В развитие исследований таких систем предложена компьютерная модель управления структурой перколяционных кластеров в процессе их формирования. Построение кластерной системы в модели проводится методом Монте-Карло с использованием итерационного алгоритма реализации взаимодействия ее элементов, при этом применяются два вида законов притяжения: с силами пропорциональными $1/R$ или $1/R^2$.

В модели исследована зависимость структуры и свойств самоорганизующихся кластеров от степени самоорганизации, характерных значений длины корреляции, скорости генерации системы; для этого исследуют их зависимость соответственно от количества актов взаимодействия частиц, от максимального расстояния, на котором элементы системы могут объединяться в кластер, а также от количества частиц, генерируемых на перколяционном поле на каждом шаге создания бесконечного кластера. Получены аналитические выражения для зависимости от этих параметров мощности бесконечного кластера, его радиуса гирации, степени анизотропии и лакуарности, а также рассчитаны первые три размерности спектра Реньи. Количество модельных экспериментов, проводимых с фиксированными значениями параметров, позволило получить результаты со стандартной для таких задач относительной погрешностью, не превышающей $10 \div 12$ процентов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld. *Phys. Rev. Lett*, 59: 381, 1987.
- [2] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld. *Phys. Rev. Lett*, 38: 364, 1987.
- [3] A. Herega. *Nanomechanics Science and Technology*, 4(2): 119, 2013.
- [4] L. Zelenyi, A. Milovanov. *Phys. Usp.*, 47: 749, 2004.

Функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и метризуемость компактов

А. А. Зайтов

(Ташкентский архитектурный и строительный институт)

E-mail: adilbek_zaitov@mail.ru

Х. Ф. Холтураев

(Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства)

E-mail: xolsaid_81@mail.ru

В работе показано, что если для натурального числа n , $n \geq 3$, пространство $I_n X \setminus X$, наследственно нормально, то бикompакт X метризуем.

Рассмотрим множество $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с двумя алгебраическими операциями: сложением \oplus и умножением \odot определенными следующим образом $u \oplus v = \max\{u, v\}$ и $u \odot v = u + v$ где \mathbb{R} множество действительных чисел.

Пусть X – компактное Хаусдорфово пространство, $C(X)$ – алгебра непрерывных функций на X с обычными алгебраическими операциями. На $C(X)$ операции \oplus и \odot определим по правилам $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$ и $\varphi \odot \psi = \varphi + \psi$, где $\varphi, \psi \in C(X)$.

Напомним, что функционал $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется [1] идемпотентной вероятностной мерой (мерой Маслова) на X , если он обладает следующими свойствами:

- (1) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, где λ_X – постоянная функция;
- (2) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$;
- (3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$;

Для компактного Хаусдорфово пространства X обозначим через $I(X)$ множество для идемпотентных вероятностных мер на X . Рассмотрим $I(X)$ как подпространство пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$. Для заданных компактных Хаусдорфовых пространств X, Y и непрерывного отображения $f : X \rightarrow Y$ можно проверить, что естественное отображение $I(f) : I(X) \rightarrow I(Y)$, определенное по формуле $I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f)$, непрерывно. Более того, конструкция I является нормальным функтором. Поэтому для произвольной идемпотентной вероятностной меры $\mu \in I(X)$ можно определить понятие носителя:

$$Supp \mu = \cap \{A \subset X : \bar{A} = A, \mu \in I(A)\}.$$

Для положительного целого числа n определим следующее множество

$$I_n(X) = \{\mu \in I(X) : |Supp \mu| \leq n\}.$$

Положим

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Множество $I_\omega(X)$ всюду плотно [1] в $I(X)$. Идемпотентную вероятностную меру $\mu \in I_\omega(X)$ называют идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем.

Заметим, что если μ – идемпотентная вероятностная мера с конечным носителем $Supp \mu = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, то μ можно представить в виде $\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus \dots \oplus \lambda_k \odot \delta_{x_k}$ единственным образом, где $-\infty < \lambda_i \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \dots \oplus \lambda_k = 0$.

Здесь, как обычно, для $x \in X$ через δ_x обозначен функционал на $C(X)$, определенный формулой $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in C(X)$, и называемый мерой Дирака. Она сосредоточена в точке x .

Для бикомпактов X и Y через $C(X, Y)$ обозначается пространство непрерывных отображений из X в Y , снабженное компактно-открытой топологией. Ясно, что $C(k, Y)$ естественно гомеоморфно k -той степени Y^k пространства Y , где k – дискретное пространство, состоящее из k точек. Для функтора F , бикомпактов X и k определим отображение

$$\pi_{I, X, k} : C(k, X) \times I(k) \rightarrow I(X)$$

равенством

$$\pi_{I, X, k}(\xi, a) = I(\xi)(a), \xi \in C(k, X), a \in I(k).$$

Имеет место

Предложение 1. Для компакта X и натурального числа k отображение $\pi_{I, X, k}$ непрерывно. Для компакта X , непустого множества $A \subset X$ положим

$$S_I(A) = \{a \in I(X) : \text{supp } a \cap A \neq \emptyset\}.$$

Ясно, что $S_I(\emptyset) = \emptyset$, $S_I(X) = I(X)$. По построению, включение $A \subset B$ влечет $S_I(A) \subset S_I(B)$.

Предложение 2. Для компакта X , всякого его открытого подмножества U имеет место

$$I(X \setminus U) = I(X) \setminus S_I(U).$$

Следствие 3. Для всякого открытого подмножества U компакта X множество $S_I(U)$ открыто в $I(X)$.

Отметим, что многозначное отображение $\text{supp} : I(X) \rightarrow X$ полунепрерывно снизу.

Предложение 4. Для всякого замкнутого подмножества Φ компакта X множество $S_I(\Phi)$ замкнуто в $I(X)$.

Для компакта X введем обозначение $I_n^0 X = I_n X \setminus I_{n-1} X$.

Для бесконечного кардинала τ через αN_τ обозначим Александровскую одноточечную компактификацию дискретного множества N_τ мощности τ .

Предложение 5. Если τ – несчетный кардинал, то пространство $I_3^0(\alpha N_\tau)$ не нормально.

Теорема 6. Пусть X – бикомпакт. Если пространство $I_3 X \setminus X$ наследственно нормально, то X метризуем.

Следствие 7. Пусть X – бикомпакт и $n \geq 4$. Если пространство $I_n X \setminus X$ наследственно нормально, то бикомпакт X метризуем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. M. Zarichnyi. Idempotent probability measures, I. *arXiv: math/060854v1 [math.GN]* 30 Aug 2006.
- [2] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, and G. B. Shpiz, Idempotent functional analysis: An algebraic approach, *Translated from Matematicheskie Zametki*, vol.69, no. 5, 2001, pp. 758-797.
- [3] Т. Ф. Жураев. Функтор λ и метризуемость бикомпактов. *Вестник МГУ. Серия: Механика-математика*. Москва, 1999, № 4, стр. 54-56.

Инфинитезимальные конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения

Калинина Т.И.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова)
E-mail: kalinina@gmail.com

Покась С.М.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова)
E-mail: pokas@onu.edu.ua

Цехмейструк Л.Г.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова)
E-mail: lida2007gc@gmail.com

В римановом пространстве $V_n(x; g)$ зафиксируем точку M_0 и построим пространство второго приближения $\tilde{V}_n^2(y; \tilde{g})$, определив его метрический тензор $\tilde{g}_{ij}(y)$ [2]:

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1l_2j} y^{l_1} y^{l_2} \quad (1)$$

Где $g_{ij} = g_{ij}(M_0)$, $R_{il_1l_2j} = R_{il_1l_2j}(M_0)$.

В пространстве \tilde{V}_n^2 изучаются аналитические инфинитезимальные конформные преобразования

$$y^h = y^h + \tilde{\xi}^h(y) \delta t \quad (2)$$

Где вектор смещения $\tilde{\xi}^h(y)$ удовлетворяет обобщенные уравнения Киллинга [1], [3]

$$L_{\tilde{\xi}} \tilde{g} = \psi \tilde{g} \quad (3)$$

Рассмотрен случай, когда исходное V_n - риманово пространство ненулевой постоянной кривизны, а функция $\psi(y)$ в (3) имеет вид

$$\psi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} \left(b_{2k} = b_{l_1 \dots l_{2k}} y^{l_1} \dots y^{l_{2k}}, b_0 = b, b_{l_1 \dots l_{2k}} = \text{const} \right) \quad (4)$$

В явном виде найден $\tilde{\xi}^h(y)$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^h(y) = & a^h + a^h_{.l} y^l + \frac{k}{3} (a_{l_1} \delta_{l_2}^h - a^h_{.l_1 l_2}) y^{l_1} y^{l_2} - \frac{kb}{12} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} y^h + \\ & + a^\alpha t_\alpha^h \sum_{p=2}^{\infty} \frac{A^{p-1}}{2^{p-1}} - b y^h \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(2p-3)(2p-5) \dots 5 \cdot 3}{p! 2^{p+1}} A^p \\ & \left(t_k^h = \frac{1}{3} R_{.l_1 l_2 k}^h y^{l_1} y^{l_2}, \quad A = \frac{k}{3} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) a^h - произвольные постоянные, $a^h_{.l}$ - постоянные, удовлетворяющие уравнениям

$$a^h_{.(i j)\alpha} = b g_{ij} \quad (6)$$

Доказана абсолютная и равномерная сходимость рядов (5).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аминова А.В. Пространственные преобразования псевдоримановых многообразий. Москва: Янус – К, 2003.
- [2] Покась С.М. Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения. *Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского* № 26, 4№ 21, стр 173-183, 2011
- [3] Покась С.М. Бесконечно малые преобразования в римановом пространстве второго приближения *Proceedings of the International Geometry Center* vol 7, № 2, 36-50, 2014

Свойства кривизны почти $C(\lambda)$ -многообразий

Кириченко Вадим Федорович

(МПГУ, Москва, Россия)

E-mail: highgeom@yandex.ru

Рустанов Алигаджи Рабаданович

(ИСГО МПГУ, Москва, Россия)

E-mail: aligadzhi@yandex.ru

Харитоновна Светлана Владимировна

(ОГУ, Оренбург, Россия)

E-mail: hcb@yandex.ru

Определение 1. [1], [2] Почти контактное метрическое многообразие называется *почти $C(\lambda)$ -многообразием*, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет следующему соотношению:

$$\langle R(Z, W)Y, X \rangle = \langle R(\Phi Z, \Phi W)Y, X \rangle - \\ - \lambda \{g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W) - g(X, \Phi W)g(Y, \Phi Z) + g(X, \Phi Z)g(Y, \Phi W)\},$$

где $X, Y, Z, W \in X(M)$, а λ – вещественное число.

Определение 2. [1], [2] Нормальное почти $C(\lambda)$ -многообразие называется *$C(\lambda)$ -многообразием*.

Теорема 3. Почти $C(\lambda)$ -многообразие является многообразием точечно постоянной кривизны λ , тогда и только тогда, когда его тензор римановой кривизны удовлетворяет тождеству

$$R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z + R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z - R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z = \\ = 2\lambda\Phi^2 X \langle \Phi Y, \Phi Z \rangle + \Phi X \langle \Phi Y, \Phi^2 Z \rangle; \forall X, Y, Z \in X(M).$$

Теорема 4. Почти $C(\lambda)$ -многообразие является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры выполняется соотношение

$$R_{bc}^{ad} = \frac{1}{2}(c\tilde{\delta}_{bc}^{ad} - \lambda\delta_{bc}^{ad}).$$

Теорема 5. Если почти $C(\lambda)$ -многообразие является η -эйнштейновым многообразием типа (α, β) , тогда на пространстве присоединенной G -структуры справедливо

$$\alpha = \frac{1}{n}R_{cb\hat{c}}^a + \lambda n, \\ \beta = -\frac{1}{n}R_{cb\hat{c}}^a + \lambda n.$$

Если почти $C(\lambda)$ -многообразие является многообразием постоянной кривизны, то, с учетом предыдущей теоремы, оно является эйнштейновым многообразием с космологической константой $\alpha = 2\lambda n$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. Janssen, L. Vanhecke. Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Math. J.*, 4, 1 – 27, 1981.
 [2] Z. Olszak, R. Rosca. Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds *Publ. Math. Debrecen*, 39:3-4, 315 – 323, 1991.

Нижняя оценка для объёма образа шара

Клищук Богдан

(Институт математики НАН Украины)

E-mail: kban1988@gmail.com

Салимов Руслан

(Институт математики НАН Украины)

E-mail: ruslan.salimov1@gmail.com

Пусть задано семейство Γ кривых γ в пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.

Борелевскую функцию $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называют *допустимой* для Γ , пишут $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_{\gamma} \rho(x) ds \geq 1$$

для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$.

Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда p -модулем семейства Γ называется величина

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x).$$

Здесь m обозначает меру Лебега в \mathbb{R}^n .

Для произвольных множеств E, F и G в \mathbb{R}^n , через $\Delta(E, F, G)$ обозначим семейство всех непрерывных кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в G , т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Пусть D — область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $x_0 \in D$ и $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$. Положим

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ является кольцевым Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля в точке $x_0 \in D$, если соотношение

$$\mathcal{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \int_{\mathbb{A}} Q(x) \eta^p(|x - x_0|) dm(x)$$

выполнено для любого кольца $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1.$$

Теорема 1. Пусть D — ограниченная область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, и $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — кольцевой Q -гомеоморфизм относительно p -модуля в точке $x_0 \in D$ при $p > n$. Предположим, что функция Q удовлетворяет условию

$$q_{x_0}(t) \leq q_0 t^{-\alpha}, \quad q_0 \in (0, \infty), \quad \alpha \in [0, \infty),$$

для $x_0 \in D$ и п.в. всех $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$. Тогда при всех $r \in (0, d_0)$ имеет место оценка

$$m(fB(x_0, r)) \geq \Omega_n \left(\frac{p-n}{\alpha+p-n} \right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} q_0^{\frac{n}{n-p}} r^{\frac{n(\alpha+p-n)}{p-n}},$$

где $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}$, $q_{x_0}(t) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} Q(x) d\mathcal{A}$ — среднее интегральное значение по сфере $S(x_0, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = t\}$, Ω_n — объём единичного шара в \mathbb{R}^n , ω_{n-1} — площадь единичной сферы \mathbb{S}^{n-1} в \mathbb{R}^n , $d\mathcal{A}$ — элемент площади поверхности.

О решениях некоторых гибридных систем функционально-дифференциальных уравнений

Кузина Ю.В., Лавренюк И.В.

(Одесса 65016, ул Арбузная,9/1)

E-mail: yuliak@te.net.ua

О решениях некоторых гибридных систем функционально-дифференциальных уравнений
В докладе рассматриваются задачи Коши

$$\begin{aligned}\alpha(t)x_1'(t) &= f_1(t, x(g(t)), x'(h(t))), \\ x_2'(t) &= f_2(t, x(g(t)), x'(h(t))), \\ x(0) &= \text{col}(0, 0).\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\alpha(t)x_1'(t) &= f_1(t, x(g(t)), x'(h(t))), \\ \beta(t)x_2'(t) &= f_2(t, x(g(t)), x'(h(t))), \\ x(0) &= \text{col}(0, 0).\end{aligned}$$

где $x : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^2$ - неизвестная функция, $x = \text{col}(x_1, x_2)$, $\alpha : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$, $\beta : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ - непрерывные функции, $\alpha(t) \rightarrow 0$, $\beta(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +0$, $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывные функции, $i \in \{1, 2\}$, $D \subset (0, \tau) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $g : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$, $h : (0, \tau) \rightarrow (0, +\infty)$ - непрерывные функции, $g(t) \leq t$, $h(t) \leq t$ при $t \in (0, \tau)$. Под решением данных задач Коши понимается непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho) \rightarrow \mathbb{R}^2$, ($\rho \leq \tau$), которая при $t \in (0, \rho)$ тождественно удовлетворяет уравнениям рассматриваемых систем, и при этом $x \rightarrow \text{col}(0, 0)$ при $t \rightarrow +0$. Формулируются достаточные условия, при выполнении которых у каждой из данных задач существует непустое множество решений с определенными асимптотическими свойствами при $t \rightarrow +0$. При анализе задач используются методы функционального анализа и качественной теории дифференциальных уравнений.

Об одном типе квадриструктур на римановом пространстве

Курбатова И.Н.

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Хаддад М.

(г.Хомс, Сирия)

E-mail: akkad@ukr.net

Пересторонина Е.

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

При изучении подмногообразий в почти контактных многообразиях К.Яно, С.Хоу и В.Чен [2] пришли к понятию *квадриструктуры* (ее структурный аффинор удовлетворяет уравнению 4-й степени) $\phi^4 \pm \phi^2 = 0$.

Такая аффинорная структура является естественным обобщением *e-структуры* [1], которая определяется наличием на многообразии X_n тензорного поля типа (1,1) F_i^h , удовлетворяющего условиям

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = e \delta_i^h, \quad e = \pm 1, 0, \quad i, h, \alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n.$$

При $e = 1$ ее называют *гиперболической*, при $e = -1$ - *эллиптической*, при $e = 0$ - *параболической*.

Если *e-структура* задана на римановом пространстве (V_n, g_{ij}) и согласована с метрикой в виде

$$F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha,$$

ее называют *почти эрмитовой*, а при условии

$$F_{i,j}^h = 0$$

келеровой. Здесь $\langle\langle, \rangle\rangle$ - знак ковариантной производной в V_n .

Мы показали, что римановы пространства (V_n, g_{ij}, F_i^h) , структурный аффинор F которых удовлетворяет условиям

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_\delta^\beta F_i^\delta + \epsilon F_\alpha^h F_i^\alpha = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha, \quad F_{i,j}^h = 0$$

приводимы и представляют собой произведение параболически келерова пространства на гиперболически келерова при $\epsilon = -1$ и параболически келерова пространства на эллиптически келерова при $\epsilon = +1$.

Получены также свойства тензора Римана и Риччи, а также выяснено строение метрического тензора в адаптированной к аффинору системе координат изучаемого класса пространств.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств. Москва: Наука, 1979.
 [2] Yano Kentaro, Houh Chorng-Shi, Chen Bang-Yen. Structures defined by a tensor field ϕ of type (1,1), satisfying $\phi^4 \pm \phi^2 = 0$. *Tensor*, 23(1): 81-87, 1972.

Рекуррентно-параболические пространства, допускающие канонические квази-геодезические отображения

Лозиенко Д.В.

(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail: lozienkodv@gmail.com

Курбатова И.Н.

(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

В [2] авторы ввели в рассмотрение *рекуррентно-параболическую* структуру на (V_n, g_{ij}) как аффинорную структуру $F_i^h(x)$, для которой

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i},$$

$$F_{i,j}^h = \rho_j(x) F_i^h(x), \quad i, h, j, \alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n,$$

где ρ_j - ковектор, «,» - знак ковариантной производной в V_n . Само V_n при этом также назвали *рекуррентно-параболическим*.

Пусть римановы пространства (V_n, g_{ij}) и $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$ находятся в квази-геодезическом отображении, основные уравнения которого в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид [1]:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x) \delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x) F_{j)}^h(x)$$

$$\bar{F}_{(ij)}(x) = 0, \quad \bar{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x) \bar{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ - компоненты объектов связности пространств \bar{V}_n и V_n , соответственно; ψ_i, φ_i - ко-векторы; F_i^h - аффинор.

Мы рассмотрели *канонические* квази-геодезические отображения - класс квази-геодезических отображений, для которого в основных уравнениях $\psi_i \equiv 0$.

Нами построены геометрические объекты как неоднородные (типа проективных параметров Томаса в теории геодезических отображений [3]), так и тензорного характера (типа тензора Вейля), инвариантные относительно рассматриваемых отображений.

В специальной системе координат найдены метрики рекуррентно-параболических пространств, допускающих каноническое квази-геодезическое отображение на плоское пространство.

Указаны рекуррентно-параболические пространства с векторными полями определенного типа, допускающие нетривиальные канонические квази-геодезические отображения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. З. Петров. Моделирование физических полей. *Гравитация и теория относительности*, No. 4-5 : 7–21, 1968.
- [2] И. Н. Курбатова, О. Т. Сисюк. Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств. *Proceedings of the International Geometry Center*, volume 8, No. 1 : 57–66, 2015.
- [3] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств . Москва : Наука, 1979.

Группа Ли движений в симметрическом римановом пространстве 1-го класса

Покась С.М.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова)

E-mail: pokas@onu.edu.ua

Червинский Р.В.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова)

E-mail: chervinskiy@gmail.com

Цехмейструк Л.Г.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова)

E-mail: lida2007gc@gmail.com

В римановом пространстве $V_n(x; g)$ зафиксируем точку M_0 и построим пространство второго приближения $\tilde{V}_n^2(y; \tilde{g})$, определив его метрический тензор $\tilde{g}_{ij}(y)$ [1]:

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{il_1l_2j} y^{l_1} y^{l_2} \quad (1)$$

Где $g_{ij} = g_{ij}(M_0)$, $R_{il_1l_2j} = R_{il_1l_2j}(M_0)$

П.А. Широковым [3] были найдены все неприводимые симметрические римановы пространства 1-го класса. В частности, при $n = 4$ метрический тензор такого V_n имеет вид

$$g_{ij}(x) = g_{ij} + \frac{1}{3} (b_{i\alpha} b_{j\beta} - b_{ij} b_{\alpha\beta}) x^\alpha x^\beta \quad (2)$$

Где

$$\|g_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \|b_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cccc} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad (\varepsilon_i = \pm 1) \quad (3)$$

Сравнивая (1) и (2), видим, что приближение второго порядка для рассматриваемого V_4 изометрично самому пространству. Следовательно, группы Ли движений в V_4 и в \tilde{V}_4^2 изоморфны.

Используя результаты исследований преобразований римановых пространств второго приближения [1], [2], получена группа Ли G_8 движений в симметрическом римановом пространстве 1-го класса V_4 .

Найдены компоненты базисных операторов данной группы и структурные константы группы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Покась С.М. Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения. *Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского* № 26, 4№ 21, стр 173-183, 2011
- [2] Покась С.М. Бесконечно малые преобразования в римановом пространстве второго приближения *Proceedings of the International Geometry Center* vol 7, № 2, 36-50, 2014
- [3] Широков П.А. Избранные работы по геометрии Казань, 1966

Качественный анализ некоторого сингулярного функционально-дифференциального уравнения

Полищук О.Р.

(Одесская Мариинская гимназия)

E-mail: olgapolchai@gmail.com

В докладе излагаются результаты качественного анализа уравнений

$$tx'(t) = a(t) + b_1(t)x(t) + b_2(t)x(g(t)) + b_3(t)tx'(h(t)) \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = 0, \quad (2)$$

где $x : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ – неизвестная функция,

$$a(t) = \sum_{k=1}^n a_k t^k + \bar{o}(t^n), b(t) = \sum_{k=1}^n b_{ik} t^k + \bar{o}(t^n), i \in \{1, 2, 3\},$$

$$g(t) = \sum_{k=1}^n g_k t^k + \bar{o}(t^n), h(t) = \sum_{k=1}^n h_k t^k + \bar{o}(t^n).$$

Для каждого $\rho \in (0, \tau)$ решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

- (1) при всех $t \in (0, \rho)$ выполнено равенство (1);
- (2) $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = 0$.

Указываются достаточные условия, при которых каждая из этих задач имеет непустое множество решений $x : (0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ (ρ достаточно мало) с определенными свойствами при $t \rightarrow +0$. Одновременно обсуждаются вопросы единственности и неединственности таких решений. Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений и функционального анализа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
- [2] Данченко В. И., Данченко Д. Я. О приближении наименьшими дробями // *Матем. заметки*. 2001. Т. 70. №4. С. 553–559.
- [3] Данченко В. И., Данченко Д. Я. О единственности наименьшей дроби наилучшего приближения // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010). М.: МИАН, 2010. С. 71–72.

Классификация омега-устойчивых потоков на поверхностях

Ольга Починка

(HSE, Russia, 603105, N.Novgorod, B.Pecherskaya, 25)

E-mail: opochinka@hse.ru

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях заключается в разбиении несущего многообразия на области с предсказуемым поведением траекторий – *ячеек*. Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1], опубликованной в 1937 году. В этой статье они рассмотрели систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x), \quad (1)$$

где $v(x)$ это C^1 -векторное поле на 2-диске, ограниченном кривой без контакта на плоскости, и нашли критерий грубости системы (1).

Более общий класс потоков на 2-сфере рассмотрен в работах Е. А. Леонтович-Андроновой и А. Г. Майера [5, 6], где топологическая классификация таких потоков тоже была основана на разбиении на ячейки, поскольку описание их типов и взаимного расположения (*схема Леонтович-Майера*) полностью определяет качественное разбиение фазового пространства на траектории. Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения – незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была доказана А.Г. Майером [7] в 1939 году и позже М. Пейшото [10, 11] для структурно устойчивых потоков на поверхностях любого рода. В 1971 в работе [12] М. Пейшото обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков, опять-таки изучив все допустимые ячейки для них и введя комбинаторный инвариант – *ориентированный граф*, обобщающий схему Леонтович-Майера.

В 1976 году Д. Нейманом и Т. О’Брайеном [8] на произвольных поверхностях были рассмотрены так называемые *регулярные потоки* – потоки без нетривиальных периодических траекторий, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков – *орбитальный комплекс*, который представляет из себя пространство орбит потока, оснащенное некоторой дополнительной информацией. В 1998 году А.А. Ошемков и В.В. Шарко [9] ввели новый инвариант для потоков Морса на поверхностях – *трехцветный граф*. В той же работе они получили полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на поверхностях в терминах атомов и молекул, введённых в работе А.В. Болсинова, С.В. Матвеева, А.Т. Фоменко [2].

Структурно устойчивые (грубые) потоки на поверхностях имеют только конечное число особых точек и конечное число замкнутых траекторий, каждая из которых гиперболична; кроме того такие потоки не имеют траекторий, соединяющих седла. Нарушение последнего условия приводит к Ω -устойчивым потокам на поверхностях, которые не являются структурно устойчивыми. Однако, топологическая классификация таких потоков также сводится к комбинаторному решению. Полным топологическим инвариантом является мультиграф.

Несущая поверхность разбивается на так называемые *элементарные области* удалением из поверхности предельных циклов. Компонента связности получившегося множества и есть элементарная область. Области подразделяются на типы в зависимости от наличия или отсутствия предельных циклов, седловых точек и элементов неблуждающего множества в целом. Затем каждой области ставится в соответствие вершина графа, а граничной окружности – ребро, направленное в соответствии с направлением движения траекторий через граничную окружность. Вершина,

соответствующая области, содержащей седловые точки, оснащается *четырёхцветным мультиграфом*, являющимся обобщением трёхцветного графа Ошемкова-Шарко [9], а вершина, соответствующая области, не содержащей элементов неблуждающего множества, оснащается *весом* “+” или “-” в зависимости от взаимной ориентации предельных циклов в областях, прилегающих к рассматриваемой области. Далее, рёбра, инцидентные вершине, соответствующей области с седловыми точками, оснащаются специальными ориентированными циклами четырёхцветного мультиграфа, с помощью которых сможем потом распознать ориентации предельных циклов потока (см. Рисунок 0.1).

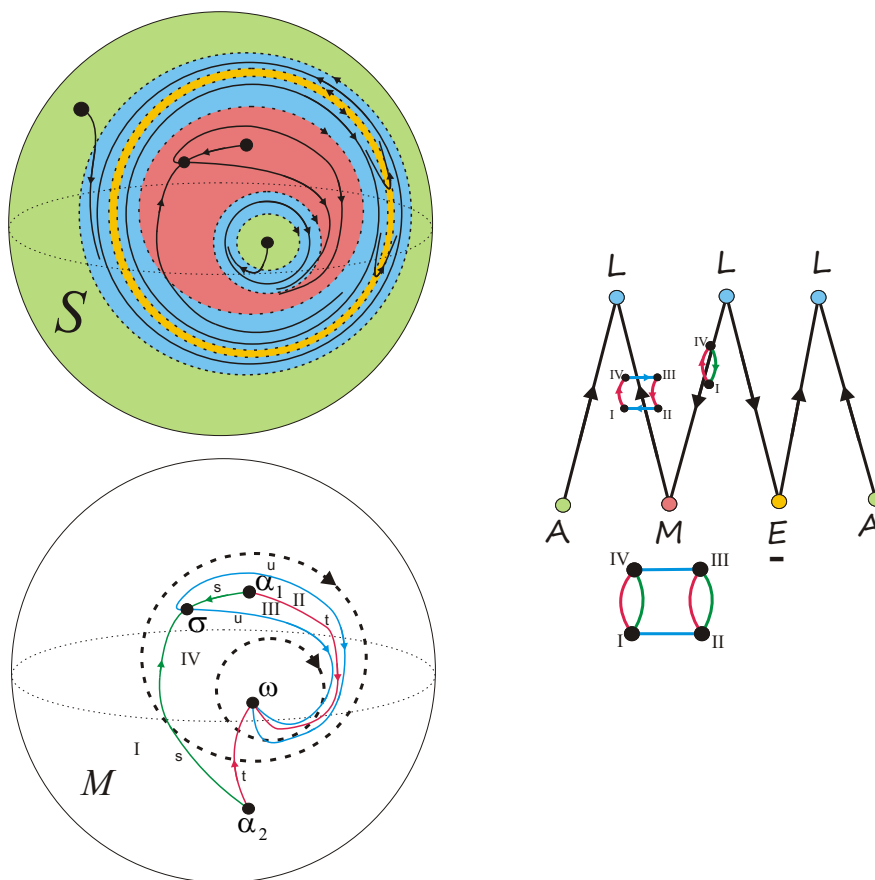


Рис. 0.1. Построение графа омега-устойчивого потока

Теорема 1. *Класс изоморфности оснащенного графа омега-устойчивого потока является полным топологическим инвариантом. Каждый класс изоморфности допустимого оснащенного графа реализуется омега-устойчивым потоком на поверхности.*

Принято считать, что алгоритм решения задачи распознавания изоморфности графов (в каком-нибудь классе графов) является эффективным, если время его работы ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. Такое определение эффективной разрешимости восходит к А. Кобхэму [3]. Стандартом труднорешаемости является NP-полнота задачи [4]. Сложностной статус задачи распознавания изоморфизма графов не известен до сих пор, т.е. в классе всех графов для этой задачи не доказана ни полиномиальная разрешимость, ни

НР-полнота. А.А. Ошемков и В.В. Шарко [9] описали алгоритм распознавания изоморфности графов потоков Морса-Смейла, который, однако, не является эффективным, то есть время его работы не ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. Вместе с тем, многоцветные графы не являются графами общего вида, поскольку они вложимы в несущую поверхность, на которой заданы соответствующие им омега-устойчивые потоки. Используя этот факт, для омега-устойчивых потоков удалось построить эффективный алгоритм.

Теорема 2. *Изоморфизм оснащённых графов омега-устойчивых потоков может быть распознан за полиномиальное время. Ориентируемость несущей поверхности может быть проверена за линейное время и эйлера характеристика поверхности может быть вычислена за квадратичное время.*

Благодарности. Результаты были получены в соавторстве с В.Е. Кругловым и Д.С. Малышевым при финансовой поддержке РФФ (проект № 17-11-01041).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы / Андронов А.А., Понтрягин Л.С. // Доклады Академии наук СССР. —1937. —Т. 14, № 5. —С. 247–250.
- [2] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Е. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности / Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Е. // УМН. —1990. —Т. 45, № 2(272). —С. 49–77.
- [3] Cobham A. The intrinsic computational difficulty of functions // Proceedings of the 1964 international congress for logic, methodology, and philosophy of science, North-Holland, Amsterdam. 1964. P. 24-30.
- [4] Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир. 1982.
- [5] Леонтович Е.А., Майер А.Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории / Леонтович Е.А., Майер А.Г. // Докл. Акад. АН СССР. —1937. —Т. 14, № 5. —С. 251–257.
- [6] Леонтович Е.А., Майер А.Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории / Леонтович Е.А., Майер А.Г. // Докл. Акад. АН СССР. —1955. —Т. 103, № 4. —С. 557–560.
- [7] Майер А.Г. Грубые преобразования окружности / Майер А.Г. // Уч. Зап. ГГУ. Горький, публикации. ГГУ —1939. —Т. 12. —С. 215–229.
- [8] Neumann D., O'Brien T. Global structure of continuous flows on 2-manifolds / Neumann D., O'Brien T. // J. Diff. Eq. —1976. —V. 22, № 1. —P. 89–110.
- [9] Ошемков А.А., Шарко В.В. О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях / Ошемков А.А., Шарко В.В. // Математический сборник. —1998. —Т. 189, № 8. —С. 93–140.
- [10] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds / Peixoto M. // Topology —1962. —V. 1, № 2. —P. 101–120.
- [11] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks) / Peixoto M. // Topology —1963. —V. 2, № 2. —P. 179–180.
- [12] Peixoto M. On the classification of flows on two manifolds / Peixoto M. // Dynamical systems Proc. —1971.

Бесконечно малые изгибания с нулевой вариацией объема многогранника

И. Х. Сабитов

(Россия, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)

E-mail: isabitov@mail.ru

Светлой памяти А.Д. Милки посвящаю

Известно, что всякий изгибаемый многогранник является также и нежестким относительно бесконечно малых (б.м.) изгибаний, причем б.м. изгибание, порожденное изгибанием, обладает тем свойством, что соответствующая вариация объема многогранника оказывается равной нулю. Известно также, что существуют нежесткие многогранники, для б.м. изгибаний которых вариация объема отлична от нуля, и поэтому можно утверждать, что такие б.м. изгибания многогранника нельзя продолжить в его изгибание. Следовательно, требование равенства нулю вариации объема разбивает все б.м. изгибания на два класса: те, которые заведомо не продолжимы в изгибания, и другие, для которых выполнено необходимое условие (в виде равенства нулю соответствующей вариации объема) их продолжимости в изгибания. Продолжая эту классификацию с требованием равенства нулю первой, второй и n -й вариации объема, мы получаем также классы деформаций разных порядков, промежуточных между б.м. изгибаниями первого порядка и изгибаниями. По-видимому, те многогранники, которые А.Д. Милка назвал в [1] и [2] *флексорами*, как раз и отличаются от обычных нежестких многогранников и от изгибаемых многогранников порядком нулевой вариации объема (кстати, поскольку для изгибаний вариации объема всех порядков равны нулю, то немедленно встает обратный вопрос - какова природа тех аналитических деформаций многогранника, для которых вариации объема всех порядков равны нулю?).

Формально описать нежесткие многогранники с нулевой вариацией объема очень легко, для этого достаточно добавить к обычным уравнениям б.м. изгибаний еще одно уравнение $\delta V = 0$. Мы же хотим выяснить природу тех многогранников и их б.м. изгибаний, для которых близкие к ним нежесткие многогранники тоже имеют нулевую вариацию объема. Пусть нежесткий симплицальный многогранник P_0 имеет n вершин M_i с координатами (x_i, y_i, z_i) , $1 \leq n$ и пусть $\{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$ Тогда объем $V(\varepsilon)$ деформированного многогранника с координатами вершин $M_i(\varepsilon) = (x_i + \varepsilon\xi_i, y_i + \varepsilon\eta_i, z_i + \varepsilon\zeta_i)$ имеет представление

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \varepsilon^3 V_3,$$

где V_0 - объем исходного многогранника, а V_1 - первая вариация объема. Рассматривая объем многогранника как сумму объемов тетраэдров с общей вершиной и предполагая, что для всех аффинно преобразованных многогранников (а они, как известно, тоже нежесткие) вариации объема тоже нулевые, получаем, что такое возможно, только если б.м. изгибания рассматриваемого многогранника удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \sum_{\langle i,j,k \rangle} \det \begin{pmatrix} \xi_i & y_i & z_i \\ \xi_j & y_j & z_j \\ \xi_k & y_k & z_k \end{pmatrix} &= 0, \\ \sum_{\langle i,j,k \rangle} \det \begin{pmatrix} x_i & \eta_i & z_i \\ x_j & \eta_j & z_j \\ x_k & \eta_k & z_k \end{pmatrix} &= 0, \\ \sum_{\langle i,j,k \rangle} \det \begin{pmatrix} x_i & y_i & \zeta_i \\ x_j & y_j & \zeta_j \\ x_k & y_k & \zeta_k \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

с суммированием по согласованно ориентированным граням. Далее, для б.м. изгибаний аффинно преобразованных многогранников тоже должны выполняться аналогичные равенства, что приводит к следующим новым условиям на б.м.изгибания исходного многогранника

$$\sum_{\langle i,j,k \rangle} \left(\det \begin{pmatrix} x_i & y_i & \eta_i \\ x_j & y_j & \eta_j \\ x_k & y_k & \eta_k \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} x_i & z_i & \zeta_i \\ x_j & z_j & \zeta_j \\ x_k & z_k & \zeta_k \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\sum_{\langle i,j,k \rangle} \left(\det \begin{pmatrix} x_i & y_i & \xi_i \\ x_j & y_j & \xi_j \\ x_k & y_k & \xi_k \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} z_i & y_i & \zeta_i \\ z_j & y_j & \zeta_j \\ z_k & y_k & \zeta_k \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\sum_{\langle i,j,k \rangle} \left(\det \begin{pmatrix} y_i & z_i & \eta_i \\ y_j & z_j & \eta_j \\ y_k & z_k & \eta_k \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} x_i & z_i & \xi_i \\ x_j & z_j & \xi_j \\ x_k & z_k & \xi_k \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Оказывается, требование выполнения этих новых условий для б.м. изгибаний аффинно преобразованных многогранников уже не приводит к появлению других новых условий, т.е. появляется какой-то неисследованный еще аналог венка Дарбу с обрывом или замыканием цепочки таких конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А.Д. Милка. Нежесткие звездчатые бипирамиды А.Д. Александра и С.М. Владимировой *Труды по анализу и геометрии*. Новосибирск,Изд-во Института Математики им. С.Л. Соболева, 2000, с. 414-430.
- [2] A.D. Milka. Linear bendings of star-like bipyramids. *European J. of Combinatorics*, 31 (4):1050-1064.

Самосжимающиеся кривые, лежащие в компакте, имеют конечную длину

Яна Теплицкая

(Санкт-Петербург 199178, 14 линия В.О., дом 29Б)

E-mail: janejashka@gmail.com

Определение 1. Кривая $\theta : I \rightarrow E$ в метрическом пространстве E с расстоянием d , где $I \subset \mathbb{R}$ — (возможно неограниченный) интервал, называется самосжимающейся, если для любых трех моментов времени $\{t_i\} \subset I$, где $t_1 \leq t_2 \leq t_3$, выполняется $d(\theta(t_3), \theta(t_2)) \leq d(\theta(t_3), \theta(t_1))$.

Пример 2. Кривая, проходящая по трем последовательным сторонам квадрата $[0, 1]^2$ (по часовой стрелки, от начала координат к $(0, 1)$, затем к $(1, 1)$ и, наконец, к $(1, 0)$) является самосжимающейся относительно максимальной (т.е. ℓ_2^∞) нормы в \mathbb{R}^2 , но не самосжимающаяся относительно евклидовой нормы.

Изначально, в работах [3] и [4], такие кривые возникают как кривые градиентного спуска для выпуклых функций и для функций с выпуклыми линиями уровня (иногда также называемых квази-выпуклыми) в пространстве Евклида.

В работе [1] был поставлен вопрос, обязательно ли самосжимающиеся кривые, лежащие в компакте, имеют конечную длину. К этому моменту разные авторы получили частичный положительный ответ на этот вопрос:

Теорема 3.

- для евклидовой нормы в \mathbb{R}^2 , 2010 год (см [3]);
- для евклидовой нормы в \mathbb{R}^n , 2015 год (в [2]);
- для евклидовой нормы и непрерывных кривых, 2015 год ([4]);
- для произвольной выпуклой C^2 -гладкой нормы в \mathbb{R}^2 , 2016 год (см [1]).

В нашей работе удалось положительно ответить на данный вопрос:

Теорема 4. Пусть E — конечномерное пространство, снабженное нормой $\|\cdot\|$, и пусть $\theta : I \rightarrow E$, где $I \subset \mathbb{R}$ является (возможно неограниченным) интервалом, является самосжимающейся кривой, след которой лежит в ограниченном множестве $D \subset E$. Тогда $l(\theta) \leq C \operatorname{diam} D$ для некоторого $C > 0$, зависящего только от $\|\cdot\|$ и от размерности пространства.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Lemenant. *Rectifiability of non Euclidean self-contracted curves*, arXiv preprint arXiv:1604.02673, 2016.
- [2] Daniilidis, A. and David, G. and Durand-Cartagena, E. and Lemenant, A., *Rectifiability of self-contracted curves in the Euclidean space and applications*, volume 25 of *The Journal of Geometric Analysis* Springer, 2015.
- [3] Daniilidis, A. and Ley, O. and Sabourau, S. *Asymptotic behaviour of self-contracted planar curves and gradient orbits of convex functions*, volume 94 of *Journal de mathématiques pures et appliquées.* : Elsevier, 2010.
- [4] Longinetti, M. and Manselli, P. and Venturi, A. *Bounding regions to plane steepest descent curves of quasiconvex families*, *Journal of Applied Mathematics.* : Hindawi, 2016.

Структурные особенности 2F-планарных отображений римановых пространств с f -структурой

Цвентух Е.

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail: ktsventoukh@gmail.com

Курбатова И.Н.

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Рассмотрим риманово пространство (V_n, g_{ij}, F_i^h) с метрическим тензором g_{ij} и аффинорной структурой F_i^h . Говорят, что F_i^h определяет f -структуру [2], если имеют место условия

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta + F_i^h = 0, \quad i, h, \alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n,$$

$$Rg \| F_i^h \| = 2k \quad (2k < n).$$

Будем считать f -структуру согласованной с метрикой в виде

$$F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha$$

Обозначим

$$F_i^h = F_i^h, \quad F_i^h = F_\alpha^h F_i^\alpha.$$

В дальнейшем полагаем аффинор ковариантно постоянным:

$$F_{i,j}^h = 0,$$

где $\langle\langle, \rangle\rangle$ - знак ковариантной производной в V_n .

Пусть (V_n, g_{ij}, F_i^h) и $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ - римановы пространства с заданными на них аффинорными структурами. 2F-планарное отображение (2FПО) [1] (V_n, g_{ij}, F_i^h) на $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ по необходимости сохраняет структуру, то есть в общей по отображению системе координат (x^i)

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x),$$

и основные уравнения 2FПО имеют вид

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i} \delta_{j)}^h + \phi_{(i} F_{j)}^h + \sigma_{(i} F_{j)}^h,$$

где $\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$ - компоненты объектов связности V_n, \bar{V}_n ; $\psi_i(x), \phi_i(x), \sigma_i(x)$ - некоторые ковекторы, а круглыми скобками обозначена операция симметрирования. 2FПО считается тривиальным при $\psi_i = \phi_i = \sigma_i = 0$.

Мы показали, что $\sigma_i = 0$ эквивалентно $\psi_i = \phi_i = 0$, то есть в этом случае 2FПО тривиально, так что нетривиальные 2FПО следует искать среди отображений (V_n, g_{ij}, F_i^h) на $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ с вышеуказанными основными уравнениями, где имеет место один из вариантов:

$$I \quad \psi_i = 0, \quad \phi_i \neq 0, \quad \sigma_i \neq 0;$$

$$II \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i = 0, \quad \sigma_i \neq 0;$$

$$III \quad \psi_i \neq 0, \quad \phi_i \neq 0, \quad \sigma_i \neq 0.$$

Будем называть 2F-планарное отображение *каноническим I(II) типа* и обозначать 2FПО(I)(2FПО(II)) в случае I(II) и просто 2FПО в случае III.

Оказывается, что отображаемые пространства представляют собой произведение римановых пространств, одно из которых келерово, причем на компонентах этого произведения исходное $2F$ -планарное отображение в зависимости от типа индуцирует геодезическое, голоморфно-проективное или аффинное отображение [3].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Raad Kadem. О $2F$ -планарных отображениях пространств аффинной связности. *Abstracts of the Colloquium on Differential Geometry, Eger, Hungary* : 20–25, 1989.
- [2] А.П.Широков. Структуры на дифференцируемых многообразиях. *Итоги науки. Сер.Мат.Алгебра.Топол.Геом.1967*: 127–188, 1969.
- [3] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств . Москва : Наука, 1979.

Зміст

N. Aygor, H. Burhanzade <i>Secondary school students' misconceptions about linear algebra</i>	3
S. Bardyla, H. Kvasnytsia <i>Semitopological graph inverse semigroups</i>	4
B. A. Bhayo <i>On inequalities of generalized elliptic integrals</i>	5
Bodzioch M., Choiński M., Foryś U. <i>A criss-cross model of tuberculosis for heterogenous population</i>	6
Bolotov D. V. <i>Foliations with leaves of non-positive curvature and bounded total curvature on closed 3-manifolds</i>	7
E. Bonacci <i>Algebraic and geometric questions about a 6D physics</i>	9
F. Bulnes <i>Mukai-Fourier Transform in Derived Categories to Solutions of the Field Equations: Gravitational Waves as Oscillations in the Space-Time Curvature/Spin IV</i>	10
H. Burhanzade, N. Aygor <i>A study on the teaching methods in determinants</i>	12
Damla Yaman <i>Order continuity properties of lattice ordered algebras</i>	13
Denega I. <i>Problem on non-overlapping polycylindrical domains with poles on the boundary of a polydisk</i>	14
A. Dudko, V. Pivovarchik <i>Inverse three spectra problem for a Stieltjes string with the Neumann boundary conditions</i>	16
Eftekharinasab K. <i>On the existence of a global diffeomorphism between Fréchet spaces</i>	18
Glazunov N. <i>Class groups of rings with divisor theory, L-functions and moduli spaces</i>	19
O. Gok <i>b-bimorphisms</i>	21
Gül E. <i>On the second regularized trace formula for a differential operator with unbounded coefficients</i>	22
Hentosh O. Ye., Prykaratsky Ya. A. <i>The Lie-algebraic structure of the Lax-Sato integrable superanalogs for the Liouville heavenly type equations</i>	24
V. Herasymov <i>In a natural topological sense a typical linear nonhomogeneous differential equation in the ring $Z[[x]]$ has no solutions from $Z[[x]]$.</i>	26
Juraev D. A. <i>On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation</i>	27
M. E. Kansu <i>Macroscopic electromagnetism via complex quaternions</i>	29
Vladimir V. Kisil <i>An extension of Möbius–Lie geometry with conformal ensembles of cycles</i>	30
Konovenko N., Lychagin V. <i>Rational differential invariants for oriented primary visual cortex</i>	32

V. Lomadze <i>A purely algebraic construction of Schwartz distributions</i>	34
S. Maksymenko <i>Deformation of functions on orientable surfaces by symplectic diffeomorphisms</i>	36
Martseniuk V., Bondarenko A., Gefter S. <i>Application the p-adic topology on Z for study determinants of infinite order with integer coefficients</i>	37
K. Matsumoto <i>Warped product semi-slant submanifolds in locally conformal Kaehler manifolds, II</i>	38
Mormul P. <i>What points in Goursat Monster Tower are strongly nilpotent</i>	39
Mukhamadiev F. G. <i>The local density and the local weak density of N_7^φ-kernel of a topological spaces</i>	40
Tetiana V. Obikhod <i>Topological invariants and microscopic quantum description</i>	41
A. Ozkan <i>On the misconceptions of 10th grade students about analytical geometry</i>	42
Parasyuk I. O. <i>Hyperbolic quasiperiodic motion of charged particle on 2-sphere</i>	43
E. Petrov <i>Representing trees of finite ultrametric spaces and weak similarities</i>	45
Prishlyak A., Hladysh B. <i>Functions with three critical points on closed non-oriented 3-manifolds</i>	47
V.M. Prokip <i>A note on similarity of matrices</i>	49
Romakina L.N. <i>Inversion with respect to an elliptic cycle of a hyperbolic plane of positive curvature</i>	51
Romaniv A. M. <i>On the relationship between the Smith normal forms of matrices and of their least common multiple</i>	53
Ryazanova O. <i>Estimates for the surface with given average curvature</i>	54
Samokhvalov S. E. <i>Kinematic renormalization of energy in the gravity</i>	55
Savchenko A. <i>Fuzzy metrization of the spaces of idempotent measures</i>	56
Sazonova O. <i>General form of the Maxwellian distribution with arbitrary density</i>	57
Skuratovskii R. <i>The commutator and centralizer of Sylow subgroups of alternating and symmetric groups, its minimal generating set</i>	58
Sokhatsky F., Krainichuk H. <i>Semi-lattice of varieties of quasigroups with linearity</i>	59
Salimov R., Stefanchuk M. <i>Asymptotic behavior of solutions to a nonlinear Beltrami equation</i>	61
Mokritskaya T. P., Tushev A. V. <i>On fractal characteristics of the micro-aggregate structure of loess soils</i>	62
Vasilchenko A. N. <i>Spaces of primitive elements in dual modules over Steenrod algebra</i>	64

Damian Wi an iewski <i>The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains</i>	66
Iakovlieva O. N., Lipska Zh. M. <i>History of formation of the decimal number concept</i>	68
Yildiz S. <i>Some new applications on absolute matrix summability</i>	70
Yildiz S. <i>An Extension on localization property of Fourier series</i>	72
Безкоровайна Л. <i>Про A-деформацію поверхні, обмежену умовою стаціонарності сітки асимптотичних ліній</i>	73
Гречнєва М. О., Стеганцева П. Г. <i>Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грасмановим образом</i>	74
Кузь А. М. <i>Двоточкова нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними над полем p-адичних чисел</i>	76
Маркітан В., Працьовитий М. <i>Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум</i>	77
Подоусова Т. Ю. <i>Про стаціонарність довжин LGT-ліній при деформаціях поверхонь</i>	80
Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В. <i>Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь</i>	81
Працьовитий М. В., Лисенко І. М. <i>Геометрія одного двосимвольного кодування дійсних чисел</i>	83
Пришляк О. О., Прус А. А. <i>Інваріант Пейкото для хордових діаграм на поверхні з межею</i>	86
Сердюк А. С., Соколенко І. В. <i>Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах періодичних цілих функцій</i>	87
Синюкова О. М. <i>Деякі аспекти теорії проєктивних перетворень просторів дотичних розшарувань зі спеціальною метрикою</i>	89
Скуратовський Р. В. <i>Двопараметричні особливості одногілкових алгебраїчних кривих</i>	90
Черевко Є. В., Чепурна О. Є. <i>Псевдо-вайсманові многовиди та їх приклади</i>	91
Федченко Ю. С. <i>Про P-деформації поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини</i>	93
Хомич Ю., Піструїл М. <i>Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі</i>	94
Арсеньєва О. Е., Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. <i>Постоянство типа обобщенных многообразий Кенмоцу</i>	96
Бологова Т. Н., Макаров В. И. <i>Геометрическая интерпретация законов физиологического развития растений</i>	97

Бондарь О. П. <i>Об изотопности некоторых функций</i>	98
Герега А.Н., Кривченко Ю.В. <i>Управление структурой кластеров в перколяционных задачах с самоорганизацией</i>	99
Зайтов А. А., Холтураев Х. Ф. <i>Функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и метризуемость компактов</i>	100
Калинина Т. И., Покась С. М., Цехмейструк Л. Г. <i>Инфинитезимальные конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения</i>	102
Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р., Харитонова С. В. <i>Свойства кривизны почти $C(\lambda)$-многообразий</i>	104
Клищук Б., Салимов Р. <i>Нижняя оценка для объёма образа шара</i>	105
Кузина Ю.В., Лавренюк И.В. <i>О решениях некоторых гибридных систем функционально-дифференциальных уравнений</i>	107
Курбатова И. Н., Хаддад М., Пересторонева Е. <i>Об одном типе квадриструктур на римановом пространстве</i>	108
Лозиенко Д. В., Курбатова И. Н. <i>Рекуррентно-параболические пространства, допускающие канонические квази-геодезические отображения</i>	109
Покась С.М., Червинский Р.В., Цехмейструк Л.Г. <i>Группа Ли движений в симметрическом римановом пространстве 1-го класса</i>	110
Полищук О. Р. <i>Качественный анализ некоторого сингулярного функционально-дифференциального уравнения</i>	111
Починка О. <i>Классификация омега-устойчивых потоков на поверхностях</i>	112
И. Х. Сабитов <i>Бесконечно малые изгибания с нулевой вариацией объёма многогранника</i>	115
Теплицкая Я. <i>Самосжимающиеся кривые, лежащие в компакте, имеют конечную длину</i>	117
Цвентух Е., Курбатова И. Н. <i>Структурные особенности $2F$-планарных отображений римановых пространств с f-структурой</i>	118