Задача Коши для матричных факторизаций уравнения Гельмгольца в трехмерной неограниченной области

Жураев Д.А.
(Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан)
E-mail: juraev_davron@list.ru

В работе рассмотрена регуляризация задача Коши для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизуемой оператором Гельмгольца в трехмерной неограниченной области. Используя результаты работ ([1]–[5]), построено в явном виде матрица Карлемана и на ее основе регуляризованное решение задачи Коши. Рассматриваемая задача относится к некорректным задачам, т.е. она неустойчива. В некорректных задачах теорема существования не доказывается, существование предполагается заданным априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному. Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена [6]. Условная устойчивость задачи следует из работы А. Н. Тихонова [5], если сузить класс возможных решений до компакта.

В данной работе построено семейство вектор-функций $U_{\sigma\delta}(x) = U_\sigma(x,\, f_\delta)$ зависящих от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ в точке $x \in G$.

Следуя А. Н. Тихонову [5], семейство вектор-функций $U_{\sigma\delta}(x)$ назовем регуляризованным решением задачи. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи. Для специальных областей задача продолжения ограниченных аналитических функций в случае, когда данные задаются точно на части границы, было рассмотрена Т. Карлеманом [2]. Используя идеи М. М. Лаврентьева [3], Ш. Ярмухамедовым было построено в явном виде регуляризованное решение задачи Коши для уравнения Лапласа [4].

Во многих корректных задачах для систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизуемой оператором Гельмгольца, недоступно вычисление значение вектор-функции на всей границе. Поэтому, задача восстановления, решения систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизуемой оператором Гельмгольца ([7]–[8]), является одной из актуальных задач теории дифференциальных уравнений.

Пусть $\mathbb{R}^3$-трехмерное вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \ y = (y_1,\, y_2,\, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$x' = (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ y' = (y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$G \subset \mathbb{R}^3$-неограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂G (∂G-простирается до бесконечности), т.е. $\partial G = S \bigcup T$.

Рассмотрим в области G систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x) = 0, \tag{1}$$

где $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица дифференциальных операторов первого порядка.

Пусть, граница области G состоит из гиперплоскости $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S, простирающейся до бесконечности и лежащей в слое

$$0 \le y_3 \le h,\ \ h = \frac{\pi}{\rho},\ \ \rho > 0.$$

Будем предполагать, что S задано уравнением

$$y_3 = \psi(y_1,\, y_2),\ \ -\infty < y_1 < \infty,\ \ -\infty < y_2 < \infty,$$

где $\psi(y')$ удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial\psi(y')}{\partial y_j}\right| \le M < \infty,\ \ y' \in \mathbb{R}^2,\ \ j = 1,\, 2.$$

Обозначим

$$H_\rho(G) = \left\{ U(y) : U(y) \in H(G),\ |U(y)| \le \exp\left[o\left(\exp\rho\left|y'\right|\right)\right]\,,\ y \to \infty,\ y \in G \right\}. \tag{2}$$

Постановка задачи. Пусть $U(y) \in H_\rho(G)$ и

$$U(y)|_S = f(y),\ \ y \in S. \tag{3}$$

Здесь, $f(y)$ — заданная непрерывная вектор-функция на S. Требуется восстановить вектор-функцию $U(y)$ в области G, исходя из её значений $f(y)$ на S.

Пусть $U(y) \in H_\rho(G)$ и вместе $U(y)$ на S задано ее приближение $f_\delta(y)$, соответственно, с погрешностью $0 < \delta < 1$, $\max\limits_S |U(y) - f_\delta(y)| \le \delta$.

Теорема 1. *Пусть $U(y) \in H_\rho(G)$ удовлетворяет на части плоскости $y_3 = 0$ граничную условию*

$$|U(y)| \le 1,\ \ y \in T. \tag{4}$$

Если

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S N_\sigma(y,\, x) f_\delta(y) ds_y,\ \ x \in G, \tag{5}$$

то справедлива оценка

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \le C_\rho(x)\sigma\delta^{\,\frac{x_3}{h}},\ \ \ \sigma > 1,\ \ \ x \in G. \tag{6}$$

Здесь для удобства, функции, зависящие от x и ρ, обозначим через $C_\rho(x)$. Причем в различных неравенствах они различные.

Следствие 2. *Предельное равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x),$$

имеет место равномерно на каждом компакте из области G.

Литература

[1] Н. Н. Тарханов Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка в частных производных и некоторых его приложениях. *Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Институт физики АН СССР, Красноярск*, 47–160, 1980.

[2] Carleman T. *Les fonctions quasi analytiques.* Paris. Gautier-Villars et Cie. 1926.

[3] М. М. Лаврентьев *О некоторых некорректных задачах математической физики.* Новосибирск: Наука, 1962.

[4] Ш. Ярмухамедов Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа. *Сиб. мат. журнал.* 45(3) : 702–719, 2004.

[5] А. Н. Тихонов О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. *Докл. АН СССР.* 151(3) : 501–504, 1963

[6] А. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер *Уравнения с частными производными.* Москва.: Мир, 1966.

[7] Д. А. Жураев Интегральная формула для систем уравнений эллиптического типа. *II Международная научно-практическая конференция студентов и аспирантов «Математика и ее приложения в современной науке и практике». Курск*, 33–38, 2012.

[8] Д. А. Жураев Регуляризация задача Коши для систем уравнений эллиптического типа первого порядка. *Узбекский Математический журнал.* №. 2. : 61-71, 2016