Классификация точек поверхности пространства Минковского

Стеганцева П.Г.
(Запорожье, ул.Жуковского,66)
E-mail: steg_pol@mail.ru

Гречнева М.А.
(Запорожье, ул.Жуковского,66)
E-mail: mag83@list.ru

Задача классификации точек поверхности относится к основным задачам локальной дифференциальной геометрии. Точки гиперповерхностей евклидова пространства можно классифицировать несколькими способами: по числу асимптотических направлений в точке, по знаку и значениям главных кривизн гиперповерхности, с помощью гауссовой кривизны, по виду соприкасающегося параболоида. В случае, когда коразмерность поверхности больше единицы, решение подобной задачи имеет особенности и не является простым повторением классического случая гиперповерхности. Например, в этом случае не всегда точки поверхности можно разбить на конечное число классов. Задача классификации точек поверхности тесно связана с другими задачами локальной дифференциальной геометрии. Например, в работе [4] автор описывает преобразования, сохраняющие грассманов образ двумерной поверхности четырехмерного евклидова пространства, и их связь с классификацией точек грассманова образа поверхности [1] и аффинной классификацией точек самой поверхности [2]. Был исследован вопрос об эквивалентности этих двух классификаций. Ряд дополнительных особенностей возникает при решении задачи классификации точек поверхностей неевклидовых пространств.

В четырехмерном пространстве Минковского ${}^1R_4$ с метрикой $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ будем рассматривать неизотропные (пространственноподобные и времениподобные) двумерные поверхности.

Рассмотрим пучок вторых квадратичных форм $A^1 - \lambda A^2$ времениподобной поверхности $V^2 \subset^1 R_4$. В зависимости от вида элементарных делителей пучка уравнение соприкасающегося параболоида невырожденным аффинным преобразованием объемлющего пространства приводится к одному из следующих канонических видов:

1) $x^3 = (x^1)^2$, $x^4 = (x^2)^2$, для случая элементарных делителей $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$;

2) $x^3 = 2x^1x^2$, $x^4 = (x^2)^2$, если имеем один линейный элементарный делитель кратности 2, то есть $(\lambda - \lambda_1)^2$, $\lambda_1 \in R$;

3) $x^3 = 2x^1x^2$, $x^4 = (x^1)^2 - (x^2)^2$, для квадратичного элементарного делителя $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)$, $\beta \neq 0$.

Таким образом, точки поверхности можно разбить на три класса. Такая классификация точек называется аффинной. Заметим, что этот результат ничем не отличается от случая евклидова пространства [3], так как евклидово пространство и пространство Минковского имеют одни и те же аффинные свойства.

Далее рассмотрим еще одну классификацию точек поверхности, которую будем называть грассмановой. Этот термин объясняется тем, что тип точки поверхности определяется типом точек грассманова образа этой поверхности.

Определение 1. Точка x поверхности $V^2 \subset^1 R_4$ называется эллиптической (параболической, гиперболической), если точка грассманова образа поверхности, соответствующая этой точке x, является эллиптической (параболической, гиперболической).

Определение 2. Точка грассманова образа Γ^2 времениподобной поверхности V^2 называется эллиптической (параболической, гиперболической), если для площадки, касательной к Γ^2 в этой точке, секционная кривизна грассманова подмногообразия ${}^{S}PG(2,4)$ удовлетворяет условию $K(\sigma) < 1$ ($K(\sigma) = 1$, $K(\sigma) > 1$) [5].

Теорема 3. *Для времениподобной поверхности с пространственноподобным грассмановым образом аффинная и грассманова классификации эквивалентны.*

Для пространственноподобной поверхности можно сформулировать и доказать аналогичную теорему

Теорема 4. *Для пространственноподобной поверхности с времениподобным грассмановым образом аффинная и грассманова классификации эквивалентны.*

Литература

[1] Ю. А. Аминов. Геометрия подмногообразий К.: Наукова думка, 2002

[2] А. А. Борисенко. Аффинная классификация точек многомерных поверхнотей. *Сибир. мат. журнал*, 31(3): 17–29, 1990

[3] А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский. Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу. Укр. геом. сб. Вып.32: 11-27, 1989

[4] В. А. Горькавый. Деформируемость поверхностей F^2 в E^4 с сохранением грассманового образа *Труды конференции «Геометрия и приложения», посвященной 70-летию В.А.Топоногова*, Новосибирск, 34–57, 2001,

[5] П. Г. Стеганцева, М. А. Гречнева. Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства. *Известия вузов. Математика*, 2:65–75, 2017