Властивості спряжених функцій у гіперкомплексному просторі

Марія Стефанчук
(Інститут математики НАН України, м. Київ)
E-mail: `stefanmv43@gmail.com`

Будемо розглядати n-вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, що є прямим добутком n копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$ ($\mathbb{H}^1 := \mathbb{H}$).

Означення 1. Функція $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$ називається *багатозначною*, якщо образом точки $x \in \mathbb{H}^n$ є множина $f(x) \in \mathbb{H}$.

Область визначення такої функції будемо позначати через

$$E_f := \{x \in \mathbb{H}^n : \text{існує } y \in \mathbb{H},\, y = f(x)\}.$$

Означення 2. Багатозначна функція $f\colon E_f \to \mathbb{H}$ називається *лінійно опуклою*, якщо для довільної пари точок $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$ існує афінна функція l, така, що $y_0 = l(x_0)$ і $l(x) \bigcap f(x) = \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$, де через $\Gamma(f)$ позначено графік функції f.

Означення 3. *Лінійно угнутою* функцією називається така багатозначна функція f, для якої функція $\varphi = \mathbb{H} \setminus f$ — лінійно опукла.

Означення 4. *Багатозначною афінною функцією* називається функція, лінійно опукла і лінійно угнута одночасно, для якої знайдеться принаймні одна точка $x \in \mathbb{H}^n$, в якій кожна з множин $f(x) \cap \mathbb{H}$, $(f(x) \setminus \mathbb{H})$ є непорожньою.

Означення 5. Функцією, *спряженою* з f, називається функція, що задається рівністю

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - f(x)). \tag{1}$$

Знайдемо функцію, спряжену до функцій $f^*(x)$.

$$f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_y (\langle x, y\rangle - f^*(y)).$$

Приклад 6. Спряженою з багатозначною афінною функцією $f(x) = \langle x, y_0\rangle + f(\Theta)$, де $f(\Theta)$ — множина, є функція

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y\rangle - \langle x, y_0\rangle - f(\Theta)) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y - y_0\rangle - f(\Theta)) =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{H}^o \setminus (-f(\Theta)), & \text{якщо } y = y_0, \\ \infty, & \text{якщо } y \neq y_0. \end{cases}$$

Теорема 7. *Для кожної функції $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$ справедливе включення $f \subset f^{**}$.*

Означення 8. Багатозначна функція $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$ називається *відкритою (відповідно, замкненою чи компактною)*, коли її графік є відкритою (відповідно, замкненою чи компактною) множиною в $\mathbb{H}^{n+1}$.

Теорема 9. *Функція, спряжена до відкритої функції, буде замкненою та лінійно опуклою.*

Означення 10. Лінійно опукла функція називається *власною*, якщо хоча б для одного x виконується співвідношення: $f(x) \bigcap \mathbb{H} \neq \emptyset$ і для всіх x має місце нерівність: $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$.

Теорема 11. *Нехай f — власна лінійно опукла функція. Тоді f^* — власна функція.*

Наступна теорема є гіперкомплексниим аналогом теореми Фенхеля-Моро.

Теорема 12. *Нехай багатозначна функція $f\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$ така, що $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$. Тоді $f^{**} = f$ тоді і тільки тоді, коли f є лінійно опуклою.*

Означення 13. Функція f називається *однорідною*, якщо $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всіх скалярів $\lambda \in \mathbb{H} \setminus 0$.

Означення 14. Функція
$$W_E(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in E} \langle x, y \rangle$$
називається *опорною функцією* множини $E \subset \mathbb{H}^n$.

Теорема 15. *Нехай $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \to \mathbb{H}$ є власною лінійною опуклою однорідною функцією і $f(\Theta) = \mathbb{H}^o \setminus 0$. Тоді f є опорною функцією деякої множини.*

Наслідок 16. *Якщо однорідна лінійно опукла функція $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \to \mathbb{H}$ є відмінною від афінної, то*
$$f^*(y) = \delta(y|E_{f^*}).$$

Теорема 17. *Якщо $f\colon \mathbb{H}^n \setminus \Theta \to \mathbb{H}$ — однорідна лінійно опукла функція, відмінна від афінної, то*
$$f(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y \in E_{f^*}} \langle x, y \rangle.$$

Означення 18. Нехай $f_\alpha\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}, \alpha \in A$, є багатозначними функціями. Функцію
$$(\bigcup_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcup_\alpha f_\alpha(x)$$
назвемо *об'єднанням функцій f_α*, а
$$(\bigcap_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcap_\alpha f_\alpha(x)$$
— їх *перетином.*

Для спряжених функцій має місце теорема двоїстості.

Теорема 19. *Нехай $f_\alpha\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}, \alpha \in \mathrm{A}$, є багатозначними функціями. Тоді виконується рівність*
$$\left(\bigcup_\alpha f_\alpha\right)^* = \bigcap_\alpha f_\alpha^*.$$

Література

[1] М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук. Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 12(3) : 225–235, 2015.