Элементы объема в гиперболическом пространстве положительной кривизны

Л. Н. Ромакина
(Россия, Саратов, Астраханская, 83)
E-mail: `romakinaln@mail.ru`

Гиперболическое пространство $\widehat{H}^3$ положительной кривизны может быть реализовано на гиперсфере вещественного радиуса с отождествленными диаметрально противоположными точками в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^4_1$. Но больший интерес, на наш взгляд, представляет интерпретация пространства $\widehat{H}^3$ в проективной схеме Кэли-Клейна, поскольку она может быть использована для описания взаимодействия атомных частиц [1]. В проективной модели пространство $\widehat{H}^3$ реализовано на идеальной области пространства Лобачевского Λ^3. Пространства $\widehat{H}^3$ и Λ^3 являются связными компонентами расширенного гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$, понимаемого как проективное пространство $\mathbb{P}^3$ с бесконечно удаленной овальной поверхностью, называемой *абсолютом* пространств $\widehat{H}^3$, Λ^3 и $\mathbb{H}^3$ [2]. Напомним, что *овальной поверхностью* проективного пространства $\mathbb{P}^3$ называют невырожденную поверхность второго порядка сигнатуры 2, [3]. Пространство Лобачевского реализуется на внутренней, а пространство $\widehat{H}^3$ — на внешней области пространства $\mathbb{P}^3$ относительно абсолюта.

Все прямые пространства $\widehat{H}^3$ в зависимости от количества и природы общих с абсолютом точек образуют три типа [4]. *Эллиптические* (*гиперболические*) прямые пересекают абсолют в двух мнимо сопряженных (вещественных) точках. *Параболические* прямые касаются абсолюта и являются изотропными в пространстве $\widehat{H}^3$. Все плоскости пространства $\widehat{H}^3$ в зависимости от типа линии пересечения с абсолютом образуют также три типа [4]. *Эллиптические* плоскости пересекают абсолютную поверхность по нулевой линии [3]. *Гиперболические плоскости положительной кривизны* (см., например, [5], [6]) имеют с абсолютом общую овальную линию и представляют собой внешние относительно абсолюта компоненты расширенных гиперболических плоскостей. *Коевклидовы* плоскости (см., например, [7], [8]) пересекают абсолют по вырожденной линии второго порядка — паре мнимо сопряженных прямых.

Применяя схему работы [9], определяем в пространстве $\widehat{H}^3$ понятие объема фигуры через проективные инварианты фундаментальной группы преобразований, общей для пространств $\widehat{H}^3$, Λ^3 и $\mathbb{H}^3$. Рассматривая в пространстве $\widehat{H}^3$ различные ортогональные криволинейные системы координат, получаем элементы объема и формулы для вычисления объемов тетраэдров, грани которых не лежат в коевклидовых плоскостях, и фигур, ограниченных координатными поверхностями. Приведем основные формулы для трех из исследованных координатных систем.

Система координат C_1 первого типа определена полным флагом пространства $\widehat{H}^3$ с эллиптической осью и эллиптической базовой плоскостью. Параметризация в системе C_1 задана формулами

$$\bar{x}_1 = \rho\,\cos u\,\cos v\,\cosh w,\ \bar{x}_2 = \rho\,\sin u\,\cos v\,\cosh w,\ \bar{x}_3 = \rho\,\sin v\,\cosh w,\ \bar{x}_4 = \rho\,\sinh w,$$

$$\text{где}\quad |u| \in [0, \pi),\quad |v| \in [0, \pi),\quad |w| \in \mathbb{R}_+,$$

устанавливающими зависимость собственных проективных координат $(\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3)$ точек пространства $\widehat{H}^3$ в присоединенном каноническом репере R^* первого типа от криволинейных координат (u, v, w) точек в системе C_1. Элемент объема в системе C_1 задан формулой

$$dV = \rho^3\,\cos v\,\cosh^2 w\,du\,dv\,dw.$$

Системы ортогональных криволинейных координат $C_{2,E}$ и $C_{2,H}$ второго типа в пространстве $\widehat{H}^3$ определены полными флагами с эллиптической осью и гиперболической базовой плоскостью. Система $C_{2,E}$ задает параметризацию внутри, а система $C_{2,H}$ — вне светового конуса с вершиной в полюсе базовой плоскости относительно абсолюта. Формулы параметризации и элементы объема в системах $C_{2,E}$ и $C_{2,H}$ имеют соответственно вид:

$$C_{2,E}: \quad \bar{x}_1 = \rho\,\cos u\,\cosh v\,\cos w,\ \bar{x}_2 = \rho\,\sin u\,\cosh v\,\cos w,\ \bar{x}_3 = \rho\,\sin w,\ \bar{x}_4 = \rho\,\sinh v\,\cos w,$$
$$\text{где}\quad |u| \in [0,\pi), \quad |v| \in \mathbb{R}_+, \quad |w| \in [0,\pi);$$
$$C_{2,H}: \quad \bar{x}_1 = \rho\,\cos u\,\sinh v\,\sinh w,\ \bar{x}_2 = \rho\,\sin u\,\sinh v\,\sinh w,\ \bar{x}_3 = \rho\,\cosh w,\ \bar{x}_4 = \rho\,\cosh v\,\sinh w,$$
$$\text{где}\quad |u| \in [0,\pi), \quad |v| \in \mathbb{R}_+, \quad |w| \in \mathbb{R}_+;$$
$$C_{2,E}: \quad dV = \rho^3\,\cosh v\,\cos^2 w\,du\,dv\,dw; \quad C_{2,H}: \quad dV = \rho^3\,\sinh v\,\sinh^2 w\,du\,dv\,dw.$$

Координатные поверхности в системах C_1, $C_{2,E}$ и $C_{2,H}$ следующие: при фиксированном значении координаты u — гиперболические плоскости, содержащие прямую, полярную к базовой оси системы отностельно абсолюта; при фиксированном значении координаты v — круговые конусы с вершиной в абсолютном полюсе базовой плоскости; при фиксированном значении координаты w — сферы пространства $\widehat{H}^3$ с центром в абсолютном полюсе базовой плоскости системы, причем в системе C_1 такие координатные поверхности — гиперсферы (их центры лежат в пространстве Лобачевского), в системах $C_{2,E}$, $C_{2,H}$ — соответственно эллиптические и гиперболические сферы.

В отличие от пространства Лобачевского, пространство $\widehat{H}^3$ содержит конечные биортогональные тетраэдры (ортосхемы), содержащие два ребра на взаимно полярных относительно абсолюта прямых. Такие тетраэдры мы называем *монополярными*. Формула объема для монополярного тетраэдра принимает наиболее простой вид и аналогична известной формуле эллиптической геометрии:

$$V = \frac{1}{2}\rho a b,$$

где ρ — радиус кривизны пространства $\widehat{H}^3$; a, b — длины базисных ребер, однозначно определяющих монополярный тетраэдр.

Литература

[1] Л. Н. Ромакина. Развитие представлений о геометрии окружающего пространства. *Евразийское научное объединение*, 1:10(10) : 18–21, 2015.

[2] Б. А. Розенфельд. *Неевклидовы пространства.* Наука : М., 1969.

[3] Н. В. Ефимов. *Высшая геометрия.* Наука : М., 1971.

[4] Л. Н. Ромакина. Классификация тетраэдров с негиперболическими гранями в гиперболическом пространстве положительной кривизны. *Чебышевский сб.*, 16(2) : 208–221, 2015.

[5] Л. Н. Ромакина. *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 частях. Ч. 1: Тригонометрия.* Изд-во Сарат. ун-та : Саратов, 2013.

[6] Л. Н. Ромакина. *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 частях. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения.* Изд-во Сарат. ун-та : Саратов, 2013.

[7] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. *Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства.* МЦНМО : М., 2003.

[8] Л. Н. Ромакина. *Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей.* Научная книга : Саратов, 2008.

[9] Л. Н. Ромакина. К теории площадей гиперболической плоскости положительной кривизны. *Publications de L'Institut Mathematique. Nouvelle serie*, 99(113) : 139–154, 2016.