Хирургия орбифолдов и её применение в кристаллографии

А. А. Дышлис
(Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара)
E-mail: a-prokhoda@mail.ru

С. М. Покась
(Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова)
E-mail: pokas@onu.edu.ua

А. С. Прохода
(Днепровский национальный университет им. Олеся Гончара)
E-mail: a-prokhoda@mail.ru

В топологии и современной геометрии широко распространены специфические операции, которые позволяют из одних многообразий получать другие многообразия. Это операции склеивания многообразий и обратная к ней операция разрезания многообразий, операция приклеивания и переклеивания, операция заплаты и образования дыр. Все эти операции получили название хирургии многообразий ([1], [2]). Великим "Хирургом" был Уильям Тёрстон, который разработал метод исследования трехмерных многообразий, основанный на разрезании их на куски, допускающий локально-однородную метрику (Филдсовская премия, 1983 год).

В настоящей работе развивается идея, также принадлежащая Тёрстону высказанная в ([3]), получения модели идеального кристалла евклидовой геометрии. Строится алгоритм, позволяющий по схеме склейки фундаментальной области фундаментальной группы многообразия, получать разбиения носителя геометрии на ячейки, декорируемые атомами (модель идеального кристалла). В данном исследовании используется тот факт, что модель идеального или реального кристалла можно получить путем действия кристаллографической группы симметрии на фундаментальную область этой группы, причем группа задается с помощью ее генетического кода. С другой стороны схема склейки кодируется, словом, принадлежащим фундаментальной группе многообразия, с помощью которого получается разбиение накрытия многообразия. В частности используются наши результаты, относящиеся к кристаллическим множествам неевклидовых двумерных геометрий при помощи которых можно получить путем склейки модели кристаллов сферической геометрии S^2 и геометрии Лобачевского H^2.

В трехмерном случае для кристаллического множества атомов системы Al-Mn геометрии H^3 показано, что группа симметрии декорированного атомами икосаэдра (икосаэдра Маккея), состоящего из 54 атомов связана с многообразием Зейферта-Вебера полученного путем склеивания соответствующих граней Платонового додекаэдра. Некоторые из рассмотренных здесь результатов рассмотрены в рукописи направленной в печать книги авторов А.А. Дышлис, С.М. Покась ([4]). Кроме того, получены разбиения сферы, обладающие симметрией произвольной диэдральной группы и группой симметрии икосаэдра, которые получены путем операции разрезания и переклеивания сферических многоугольников.

Литература

[1] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко. *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии.* Москва : Издательство МГУ, 1991.

[2] А. Т. Фоменко. *Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мирею*, 2-ое изд. Москва : Издательство МГУ, "ЧеРо", 1998.

[3] У. Тёрстон. *Трехмерная топология и геометрия*, перевод с английского под ред. О.В. Шварцмана. Москва : МЦНМО, 2001.

[4] С. М. Покась, А. А. Дышлис. *Геометрия Лобачевского и ее применения в математике, физике, кристаллографии.* Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017.