О существовании энергетической функции у динамических систем

Починка Ольга Витальевна
(НИУ ВШЭ (Россия, Нижний Новгород))
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru

Пусть M — гладкое компактное ориентируемое n-многообразие. *Функцией Ляпунова* динамической системы (потока или каскада), заданной на M называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, которая постоянна на каждой цепной компоненте системы и убывает вдоль ее орбит вне цепно рекуррентного множества. В силу результатов Ч. Конли [1], такая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название "Фундаментальная теорема динамических систем". Следует отметить, что сам Ч. Конли дополнительно требовал, чтобы образ цепно рекуррентного множества в силу φ был нигде не плотен на прямой, а значения функции φ на различных компонентах цепно рекуррентного множества были различны и называл такую функцию *полной функцией Ляпунова*. Числа, принадлежащие образу цепно рекуррентного множества, Ч. Конли назвал критическими значениями функции φ. Однако для гладкой функции ее критическим значением принято называть образ критической точки (точки, где градиент функции обращается в ноль), которая, вообще говоря, не обязана принадлежать цепно рекуррентному множеству. В связи с чем, наряду с функцией Ляпунова, в гладкой категории используется понятие *энергетической функции*, то есть гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [2], который в 1961 году доказал существование энергетической функции Морса у градиентно-подобных потоков. К. Мейер [3] в 1968 году обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса-Ботта для произвольного потока Морса-Смейла.

Как заметил в 1985 году Дж. Фрэнкс [4], применение результатов В. Вильсона [5] к конструкции К. Конли даёт существование энергетической функции у любого гладкого потока с гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Тогда с помощью надстройки можно построить гладкую функцию Ляпунова для любого диффеоморфизма с гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Но, построенная таким образом функция, может иметь критические точки, которые не являются цепно рекуррентными и, следовательно, функция Ляпунова не является энергетической. Встает вопрос о том, какие дискретные динамические системы допускают энергетические функции. Первые результаты в этом направлении были получены Д. Пикстоном в 1977 году, в своей работе [6] он доказал существование энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса-Смейла на поверхности. В 2012 году Т. Митрякова, О. Починка, А. Шишенкова обобщили результат Пикстона на Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством, энергетическая функция Морса для таких диффеоморфизмов была построена в работе [7]. В той же работе [6] Д. Пикстон построил диффеоморфизм Морса-Смейла на трехмерной сфере, не обладающий энергетической функцией Морса. В работах [8], [9] и книге [10] В. Гринесом, Ф. Лауденбахом, О. Починкой найдены необходимые и достаточные условиях существования энергетической функции Морса у трехмерных диффеоморфизмов Морса-Смейла. Кроме того, этими же авторами в работе [11] доказано, что в примере Пикстона минимальное число критических точек функции Ляпунова, отличных от периодических точек каскада, равно двум.

Из вышесказанного следует, что не все диффеоморфизмы даже с регулярной динамикой имеют энергетическую функцию. Тем более удивительным является факт наличия энергетической функции у некоторых дискретных динамических систем с хаотическим поведением, доказанный В. Гринесом, М. Носковой, О. Починкой в работах [12], [13], [14] для некоторых классов Ω-

устойчивых 2- и 3-диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами коразмерности один. Технически построение такой функции базируется на процедуре сглаживания непрерывного отображения.

Несмотря на имеющееся значительное продвижение в вопросах построения энергетических функций для дискретных динамических систем, остается множество открытых вопросов. В частности, нет алгоритма построения такой функции для произвольных Ω-устойчивых диффеоморфизмов поверхностей, хотя, по-видимому, такая функция существует. Более того, на многообразиях большой размерности нет техники построения энергетических функций даже в классе регулярных динамических систем.

Благодарности. Исследования выполнены в рамках проекта РНФ 17-11-01041.

Литература

[1] Conley C. Isolated Invariant Sets and Morse Index / Conley C. // CBMS Regional Conference Series in Math. — 1978. V. 38.
[2] Smale S. On gradient dynamical systems / Smale S. // Annals Math. —1961. —V. 74. —P.199–206.
[3] Meyer K. R. Energy functions for Morse-Smale systems / Meyer K. R. // Amer. J. Math. —1968. —V. 90. — P. 1031–1040.
[4] Franks J. Nonsingular Smale Flow on S^3 / Franks J. // Topology. —1985. —V. 24, № 3. — P. 265–282.
[5] Wilson W. Smoothing derivatives of functions and applications / Wilson W. // Trans. Amer. Math. Soc. —1969. —V. 139. —P. 413–428.
[6] Pixton D. Wild unstable manifolds / Pixyon D. // Topology. —1977. —V. 16. —P. 167–172.
[7] Митрякова Т.М., Починка О.В., Шишенкова А.Е. Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством / Митрякова Т.М., Починка О.В., Шишенкова А.Е. // Журнал средневолжского математического общества. —2012. — Т. 14, № 1. —С. 98–107.
[8] Grines V., Laudenbach F., Pochinka O. Self-indexing enrgy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds / Grines V., Laudenbach F., Pochinka O. // Moscow Math. Journal. —2009. —V. 9, № 4. —P. 801–821.
[9] Grines V., Laudenbach F., Pochinka O. Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds / Grines V., Laudenbach F., Pochinka O. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2012. —V. 278, № 1. —P. 27–40.
[10] Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds / Grines V., Medvedev T., Pochinka O. // Springer International Publishing Switzerland. —2016. —364 P.
[11] Гринес В. З., Лауденбах Ф., Починка О. В. Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами / Гринес В. З., Лауденбах Ф., Починка О. В. // Математические заметки. —2009. —Т. 86, № 2. — С. 175–183.
[12] Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях / Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. // Труды Средневолжского математического общества. —2015. —Т. 17, № 3. — С. 12–17.
[13] Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О.В. Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором / Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. // Труды Московского математического общества. —2015. —Т. 76, № 2. — С. 271–286.
[14] Гринес В.З., Жужома Е.В., Починка О.В. Грубые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один / Гринес В. З., Жужома Е. В., Починка О. В. // СМФН. —2015. —Т. 57. —С. 5-–30.

On the existence of energy functions for dynamical systems

The paper is devoted to the presentation of results related to the existence of energy functions for dynamical systems on manifolds. The energy function is a global Lyapunov function, which is constant on chain components and decreasing along trajectories outside the chain recurrent set. The main attention will be paid to the technique of constructing such functions for the content classes of Ω - and structurally stable discrete dynamical systems defined on manifolds of the dimension 2 and 3.