О геометрии субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга

Нарманов Абдигаппар Якубович
(Национальный университет Узбекистана,Ташкент,Узбекистан)
E-mail: narmanov@yandex.ru

Турсунов Байрамали Акбарович
(Каршинский государственный университет,Карши,Узбекистан)
E-mail: t.bayramali@yandex.com

В этой работе мы изучим геометрию некоторых субмерсий, которые возникают при исследовании геометрии орбит векторных полей Киллинга. Геометрия орбит векторных полей является объектом многочисленных исследований в связи ее важностью в геометрии и других областях математики [2].

Изучению геометрии субмерсий посвящены многочисленные исследования ([1]-[5]), в частности в работе [3] получены фундаментальные уравнения субмерсии.

Пусть $M-$гладкое риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g, $\nabla-$ связность Леви-Чивита, $< \cdot, \cdot > -$ скалярное произведение, определенное римановой метрикой g.

Напомним, что векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий [2]. Множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Известно, что алгебра Ли $K(M)$ является конечномерной.

Гладкость в данной работе означает гладкость класса C^∞.

Определение 1. Дифференцируемое отображение $\pi : M \to B$ максимального ранга, где B-гладкое многообразие размерности m, называется субмерсией при $n > m$.

По теореме о ранге дифференцируемой функции для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $\pi^{-1}(p)$ является подмногообразием размерности $k = n - m$. Таким образом субмерсия $\pi : M \to B$ порождает слоение F размерности $k = n - m$ на многообразии M, слоями которого являются подмногообразия $L_p = \pi^{-1}(p), p \in B$.

Пусть F-слоение размерности k, где $0 < k < n$. Обозначим через T_qF-касательное пространство слоя L_p в точке $q \in L_p$, через H_qF-ортогональное дополнение подпространства T_qF. В результате возникают подрасслоения $TF = \{T_qF\}$, $HF = \{H_qF\}$ касательного расслоения TM и имеем ортогональное разложение $TM = TF \oplus HF$. Таким образом каждое векторное поле X разложимо в виде: $X = X^v + X^h$, где $X^v \in TF$, $X^h \in HF$. Если $X^h = 0$ (соответственно $X^v = 0$), то поле X называется вертикальным (соответственно горизонтальным) векторным полем.

Напомним, что если дифференциал субмерсии $\pi : M \to B$ сохраняет длину горизонтальных векторов,то она называется римановой. Известно,что риманова субмерсия порождает риманово слоение. Слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой точке к слоению, остается ортогональной к слоению во всех своих точках.

Кривая называется горизонтальной, если ее касательный вектор является горизонтальным.

Пусть $\gamma : [a, b] \to B-$ гладкая кривая в B, и $\gamma(a) = p$. Горизонтальная кривая $\widetilde{\gamma} : [a, b] \to M$, $\widetilde{\gamma}(a) \in \pi^{-1}(p)$ называется горизонтальным поднятием кривой $\gamma[a, b] \to B$, если $\pi(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

Отображения $S : V(F) \times HF \to V(F)$, заданное формулой $S(X, U) = \nabla^v_X U$ называется втором основным тензором, где $V(F), HF$-множество всех вертикальных и горизонтальных векторных полей соответственно.

При фиксированным поле нормалей $X \in HF$ отображение $S(U,X)$ обращается в тензорное поле S_X типа (1,1):

$$S(U,X) = S_X U = \nabla^v_U X,$$

где $\nabla^v_U X$-вертикальная компонента векторного поля $\nabla_U X$.

Тензорное поле S_X является линейным отображением и поэтому задается матрицей $S(U,X) = AU$.

Горизонтально векторное поле X называется слоеным, если для каждого поля $V \in V(F)$, поле $[V,X]$ также является вертикальным. В случае, когда поле X является слоеным, собственные значения матрицы A называется главными кривизнами слоения F. Если главные кривизны локально постоянны вдоль слоев, то слоение F называется изопараметрическим.

Рассмотрим следующие n векторные поля Киллинга в R^n, из которых k вращений, $n-k$ параллельных переносов, где $n = 2k + l$.

Пусть

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ если } i \text{ нечетно и } 1 \leq i \leq 2k,$$

$$Y_i = -x_i \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} + x_{i-1} \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ если } i \text{ четно и } 1 \leq i \leq 2k,$$

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ если } 2k+1 \leq i \leq n.$$

Результаты работы [2] показывают,что орбита этих векторных полей для каждой точки совпадает со всем пространством R^n. Поэтому мы можем определить следующую субмерсию $\pi : R^{n+k} \to R^n$ формулой:

$$\pi(t_1, t_2, ..., t_{n+k}) = X^{t_{n+k}}_{n+k}(...(X^{t_2}_2(X^{t_1}_1(O)...)),$$

где $O-$начало координат в R^n.

Теорема 2. *Существует такая риманова метрика $\widetilde{g}$ на R^n, что*

1) *Отображение $\pi : R^{n+k} \to R^n$ является римановой субмерсией и порождает риманово слоение;*

2) *Субмерсия $\pi : R^{n+k} \to R^n$ порождает на R^{n+k} изопараметрическое слоение;*

3) *$(R^n, \widetilde{g})$ является многообразием неотрицательной кривизны;*

Если $k \geq 2$, то

4) *Субмерсия $\pi : R^{n+k} \to R^n$ порождает на R^{n+k} слоение нулевой кривизны.*

Литература

[1] Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc.11 (1960), 236-242.

[2] Нарманов А.Я., Саитова С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга. Дифференциальные уравнения. 2014,том 50, №12,c.1582-1589.

[3] O'Neil B. The Fundamental equations of a submersions. Michigan Mathematical Journal, v.13, 1966, p. 459-469

[4] Reinhart B. L. Foliated manifolds with bundle-like metrics. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 69, No. 1,1959, pp. 119-132

[5] Zoyidov A.N., Tursunov B.A. Geometry of submersions on manifolds of nonnegative curvature. Uzbek mathematical journal. 2015 №2, pp. 27-34.