Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий уравнения теплопроводности

Нарманов Отабек Абдигаппарович
(Ташкентский университет информационных технологий,Ташкент,Узбекистан)
E-mail: `otabek.narmanov@mail.ru`

Пусть нам дано дифференциальное уравнение порядка m

$$\Delta(x, u^{(m)}) = 0 \tag{1}$$

от n независимых от $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и q зависимых переменных $u = (u_1, u_2, ..., u_q)$, содержащее производные от u по x до порядка m, где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X = R^n$, $u = (u_1, u_2, ..., u_q) \in R^q$.

Определение 1. Группа G преобразований, действующая на открытом подмножестве M пространства независимых и зависимых переменных дифференциального уравнения называется группой симметрий уравнения (1) , если для каждого решения $u = f(x)$ уравнения (1) и для $g \in G$ такого, что определено $g \circ G$, то функция $\widetilde{u} = g \circ G$ также является решением уравнения.

Одним из преимуществ знания группы симметрий дифференциальных уравнений состоит в том, что если нам известно решение $u = f(x)$, то в соответствии с определением функция $\widetilde{u} = g \circ f$ также является решением для любого элемента g группы G, так что у нас есть возможность построить целое семейство решений, подвергая известное решение действию всевозможных элементов группы.

Для нахождения группы симметрий "продолжим"основное пространство, представляющее независимые и зависимые переменные, до пространства, представляющего также все различные частные произ-водные, встречающиеся в уравнении. Для данной гладкой функции $u = f(x)$, имеется индуцированная функция $u^m = pr^m f(x)$, называемая $-m$ продолжением функции $f(x)$, которая определяется уравнениями $u_j^\alpha = \partial_j f^\alpha(x)$, где $\partial_j f^\alpha(x)$ производная порядка α функции $u = f(x)$.

Теперь мы можем заменить дифференциальное уравнение $\Delta(x, u^{(m)}) = 0$ алгебраическим уравнением, которое определяется обращением в нуль функции, которая является правой частью уравнения $\Delta(x, u^{(m)}) = 0$, определенной на $X \times U^m$. Гладкое решение дифференциального уравнения $\Delta(x, u^{(m)}) = 0$ - гладкая функция $u = f(x)$ такая, что $\Delta(x, pr^{(m)}u) = 0$. Это означает, что функция $u = f(x)$ и ее производные $u_j^\alpha = \partial_j f^\alpha$ должны удовлетворять алгебраическому уравнению

$$F(x, t, pr^{(m)}u(x)) = 0 \tag{2}$$

Процедура нахождения инфинитезимальных образующих группы симметрий дифференциальных уравнений описана в работе [5].Это процедура использует продолжения действия группы симметрий на расширенное пространство. Инфинитезимальные образующие продолжения действия группы симметрий являются продолжениями инфинитезимальных образующих группы симметрий основного пространтсва. Эту схему используем для нахождения группы симметрий одномерного уравнения теплопродности.

Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности с коэффициентом нелинейности $k(u)$, которое описывает процесс переноса тепла в предположении, что среда является неподвижной и дополнительные источники или стоки энергии в среде отсутствуют:

$$u_t = (k(u)u_x)_x \tag{3}$$

Наибольший интерес представляет собой случай,когда коэффициент теплопроводности $k(u)$ является нелинейной функцией температуры u. Исследования показывают,что коэффициент теплопроводности в достаточно широком диапазоне изменения параметров может быть описан степенной функцией температуры ([1]-[6]), т. е. имеет вид $k = u^{\sigma}$.

Мы рассмотрим случай $k(u) = u$.

Теорема 2. *Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий уравнеия (1.3) является трехмерной алгеброй Ли,порожденной векторными полями:*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}.$$

Рассмотрим векторное поле (случай $a = 0$)

$$X = d\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x}.$$

Это векторное поле порождает преобразования вида

$$(t, x, u) \to (t + ds, x + bs, u).$$

Функция $F(t, x) = bt - dx$ является инвариантом этих преобразований в силу того, что $X(F) = 0$. Поэтому если $\xi = bt - dx, b = d^2$,то функция $u(t, x) = v(\xi)$ является решением уравнения (1.3), где $v(\xi)$ является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$vv'' + v'^2 - v' = 0.$$

Рассмотрим случай $a \neq 0$.Так как $X(\xi) = 0$, функция

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

является инвариантом группы преобразований, порожденных векторным полем

$$X = 2at\frac{\partial}{\partial t} + ax\frac{\partial}{\partial x}.$$

В этом случае решение ищем в виде:

$$u(t, x) = v(\xi)$$

где фунция $v(\xi)$ является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$vv'' + v'^2 + \frac{\xi}{2}v' = 0. \tag{4}$$

Литература

[1] Брюно А.Д. Автомодельные решения и степенная геометрия, УМН 2000, том 55, выпуск 1(331),с. 3- 44

[2] Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. Драфт.2011,436 стр.

[3] Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. Москва, Изд.МФТИ.1997,235 стр.

[4] Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений, Математика-кибернетика, Москва Издательство "Знание"1991

[5] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнением. Москва, Мир, 1989, 639 стр.

[6] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва, Наука,1987,481стр.