Движения в геометрии Лобачевского и алгебры операторов Бергмана со сдвигами

Мозель В. А.
(Одесса, ГУ “Отделение гидроакустики ИГФ НАН Украины”, ул. Преображенская, 3)
E-mail: `mozel@ukr.net`

Пусть D - единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В банаховом пространстве $L_p(D)$ введём следующие операторы: хорошо известный оператор с ядром Бергмана (см., напр., [1], [2])

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{f(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^2} dD_\zeta,$$

и

$$(W_g f)(z) = \left|g'(z)\right|^{2/p} f(g(z))$$

— изометрический оператор взвешенного сдвига, порождённый конформным отображением $g \in G$ круга D в себя, G — циклическая группа конечного порядка $n+1$ (g — эллиптическое отображение с одной неподвижной точкой внутри D и второй, ей симметричной, вне D), либо бесконечного порядка (g — гиперболическое отображение с двумя неподвижными точками на абсолюте, или параболическое отображение со сдвоенной неподвижной точкой на абсолюте в смысле модели Пуанкаре геометрии Лобачевского ([3], с.59-67)).

В данной работе изучается банахова алгебра

$$\mathfrak{C} = \sum_{g \in G} A_g W_g,$$

которая является расширением алгебры $\mathfrak{A}$ операторов вида $A = \sum_{i=0}^{n}(a_i(z)I + b_i(z)B + L)$ для конечного случая, $A = \sum_{-\infty}^{\infty}(a_i(z)I + b_i(z)B + L)$ для бесконечного случая, где I — единичный, L — компактный оператор $a_i(z)$, $b_i(z)$ — автоморфные функции [4] (т.е. удовлетворяющие условию $a_i(g(z)) = a_i(z)$, $b_i(g(z)) = b_i(z)$), непрерывные на римановой поверхности $\Delta = D/G$ [5], гл. 6, с.110 — 117, с помощью операторов взвешенного сдвига W_g. Норма в алгебре $\mathfrak{C}$ вводится правилом:

$$|||C|||_1 = \sum_{g \in G} \sup_{g \in G} |||A_g|||$$

Операторы алгебры $\mathfrak{C}$ можно записать в виде

$$R_G C R_G^{-1} = \sum_{i=0}^{n} (a_i(z)E + b_i(z) R_G B R_G^{-1}),$$

для конечного случая,

$$R_G C R_G^{-1} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_i(z)E + b_i(z) R_G B R_G^{-1}),$$

для бесконечного случая, E — единичная матрица, $R_G = \mathrm{diag}(P_j W^j)$, $R_G^{-1} = \mathrm{diag}(W^j P_j)$, P_j — оператор проектирования на j — й экземпляр фундаментальной области [5], гл. 9, с.183–226.

В конечном случае риманова поверхность есть конус. В параболическом случае риманова поверхность — это изогнутый конус с каспом в вершине. В гиперболическом случае это изогнутый цилиндр. В эллиптическом случае коэффициенты непрерывны в замкнутом круге D. В бесконечном же случае в предельных (неподвижных) точках сдвига у коэффициентов имеется разрыв периодического типа.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор $C \in \mathfrak{C}$ фредгольмов (нётеров) в пространстве $L_p(D)$, если и только если его символ (см., напр.,* [6]*) невырожден.*

Отметим, что символы и спектры линейных функциональных операторов были вычислены в различных ситуациях А. Б. Антоневичем [7] и Ю. И. Карловичем [8], [9]. См. также книгу Б. А. Пламеневского [10] и цитируемую там литературу.

Литература

[1] А. Д. Джураев. *Метод сингулярных интегральных уравнений.* Москва: Наука, 1987.

[2] Г. Джангибеков. Об алгебре, порождённой поли-кернооператорами со сдвигом. *ДАН Тадж.ССР*, 34(7) : 399–403, 1991.

[3] Б. В. Шабат. *Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции одного переменного: Учебник для университетов.* Изд. 3-е. Москва: Наука, 1985. - 336 с.

[4] В. В. Голубев. *Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции.* Москва: Физматгиз, 1961. - 456 с.

[5] А. Бердон. *Геометрия дискретных групп.* Москва: Физматгиз, 1986. - 304 с.

[6] Н. Л. Василевский. Символы операторных алгебр *ДАН СССР*, 235 (1): 15 – 18, 1977.

[7] А. Б. Антоневич. *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход.* Минск: Университетское, 1988. - 232 с.

[8] Ю. И. Карлович. Локально-траекторный метод изучения обратимости в C^* -алгебрах операторов с дискретными группами сдвигов *ДАН СССР*, 299 (3): 546 – 550, 1988.

[9] Karlovich Yu.I. Local-trajectory method and isomorphism theorems for nonlocal C^* -algebras *Operator Theory: Advances and Applications*, 170: 137 – 166, 2007.

[10] Б. А. Пламеневский. *Алгебры псевдодифференциальных операторов.* Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 256 с.