Канонические квази-геодезические отображения рекуррентно-параболических пространств

Лозиенко Д.В.
(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: `lozienkodv@gmail.com`

Курбатова И.Н.
(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: `irina.kurbatova27@gmail.com`

Изучая проблему моделирования физических полей, академик А. З. Петров пришел к задаче квазигеодезического отображения (КГО) 4-х мерных римановых пространств сигнатуры Минковского [1]. В [2] исследовались КГО римановых пространств произвольной размерности и сигнатуры с рекуррентно-параболической структурой.

Многообразие X_n считается наделенным *e-структурою* [3], если на нем определена аффинорная структура $F_i^h(x)$, удовлетворяющая условиям $F_i^\alpha F_\alpha^h = e\delta_i^h$, где $e = -1, 1$ или 0. При $e = 1$ ее называют гиперболической; при $e = -1$ — эллиптической; при $e = 0$ — параболической.

В зависимости от дифференциальных свойств аффинора в римановом пространстве с e-структурой выделяют различные классы пространств: келеровы, K-пространства, H-пространства и др.

В [2] *рекуррентно-параболическую* структуру на (V_n, g_{ij}) определили как аффинорную структуру $F_i^h(x)$, для которой

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i},$$

$$F_{i,j}^h = \rho_j(x) F_i^h(x),$$

где ρ_j — ковектор, «,» — знак ковариантной производной в V_n. Само V_n при этом также называют *рекуррентно-параболическим.*

Рассмотрим пару римановых пространств (V_n, g_{ij}) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$, находящихся в КГО, основные уравнения которых в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид [1]:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x)$$

$$\overline{F}_{(ij)}(x) = 0, \qquad \overline{F}_{ij}(x) = F_j^\alpha(x)\overline{g}_{\alpha i}(x),$$

где $\overline{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ — компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n$ и V_n, соответственно; ψ_i, φ_i — ковекторы; F_i^h — аффинор.

Мы исследуем канонические квази-геодезические отображения (ККГО) — класс КГО, для которого в основных уравнениях $\psi_i \equiv 0$.

Нами доказана

Теорема 1. *Если V_n с рекуррентно-параболической структурой F_i^h допускает ККГО на риманово пространство $\overline{V}_n$, то $\overline{V}_n$ по необходимости также будет рекуррентно-параболическим относительно F_i^h с тем же вектором рекуррентности.*

Рассмотрено ККГО рекуррентно-параболического V_n на плоское пространство $\overline{E}_n$. Получена структура тензора Римана такого V_n. В частности, показано, что оно является Риччи-плоским и симметрическим.

Доказана

Теорема 2. *Для того, чтобы параболически-рекуррентное пространство V_n при $n \neq 2$ допускало нетривиальное ККГО на плоское $\overline{V}_n = \overline{E}_n$, необходимо и достаточно, чтобы оно было Риччи-плоским, а его тензор Римана имел структуру*

$$R_{hijk} = C_1 e^{-\rho(x)} (F_{hk} F_{ij} - F_{hj} F_{ik} + 2F_{hi} F_{kj})$$

при некоторой константе C_1 и $\rho_i = \partial_i \rho(x)$.

Литература

[1] А. З. Петров. Моделирование физических полей. *Гравитация и теория относительности*, No. 4-5 : 7–21, 1968.

[2] И. Н. Курбатова, О. Т. Сисюк. Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств. *Proceedings of the International Geometry Center*, volume 8, No. 1 : 57–66, 2015.

[3] Н. С. Синюков. Геодезические отображениях римановых пространств. Москва : Наука, 1979.