Кутова характеристика у метричному просторі

Кузьмич Валерій Іванович
(Херсонський державний університет, м. Херсон, Україна)
E-mail: `kuzmich@ksu.ks.ua`

У роботі В. Ф. Кагана [1, розділ XIX] детально вивчається поняття "прямолінійної розміщеності", або "прямолінійного образу" точок довільного метричного простору [2, с. 527]. У продовження цих досліджень пропонується ввести поняття "плоскої розміщеності" множини точок метричного простору, як аналога площини у геометрії Евкліда. У аксіоматиці Д. Гільберта три різні точки визначають єдину площину [3 с. 3]. Для того щоб уникнути необхідності введення аксіом у метричному просторі, за ознаку плоскої розміщеності чотирьох різних точок простору можна вибрати умову рівності нолю об'єму тетраедра, вершинами якого є ці точки. При цьому логічно використати відому формулу Юнгіуса об'єму тетраедра за довжиною усіх його ребер [4, с. 99, 100]. Однак, використання цієї формули повязане зі значними аналітичними перетвореннями. У роботі [5] отримано аналог формули Юнгіуса, у якому для знаходження об'єму тетраедра використовуються кути при одній із його вершин. Із цього аналога можна отримати достатньо просту аналітичну умову плоскої розміщеності точок. У разі потреби перевірити існування тетраедра із заданими довжинами ребер, можна використати спеціальний калькулятор, розміщений за адресою `http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645`

Для реалізації вказаного вище підходу потрібно ввести поняття кута у довільному метричному просторі, як упорядкованої трійки елементів цього простору.

Означення 1. Нехай a, b і c - довільні точки метричного простору (X, ρ). Упорядковану трійку (a, b, c) цих точок будемо називати кутом з вершиною у точці b, і позначати: $\angle(a, b, c)$. Пари точок (a, b) і (b, c), при цьому, будемо називати сторонами кута.

У якості числової характеристики кута можна вибрати значення його косинуса у геометрії Евкліда, як це пропонував О. Д. Александров [6, с. 36].

Означення 2. Нехай a, b і c - довільні точки метричного простору (X, ρ). Характеристикою кута $\angle(a, b, c)$, або кутовою характеристикою, будемо називати дійсне число $\varphi(a, b, c)$, що знаходиться за формулою:

$$\varphi(a, b, c) = \frac{\rho^2(a, b) + \rho^2(b, c) - \rho^2(a, c)}{2\rho(a, b)\rho(b, c)}. \tag{1}$$

Метричний простір (X, ρ), у якому введено поняття кута за означенням 1, і його характеристику за формулою (1), будемо позначати $\varPi$.

Із означення 2 легко отримати означення прямолінійної розміщеності трьох точок простору $\varPi$.

Будемо казати, що точки a, b, c простору $\varPi$ прямолінійно розміщені, якщо $\varphi(a, b, c) = \pm 1$. При $\varphi(a, b, c) = 1$ кут $\angle(a, b, c)$ будемо називати нульовим, а при $\varphi(a, b, c) = -1$ - розгорнутим. Якщо ж виконується рівність $\varphi(a, b, c) = 0$, то кут $\angle(a, b, c)$ природно назвати прямим.

Для розгорнутого кута $\angle(a, b, c)$ можна ввести поняття суміжних кутів.

Означення 3. Нехай точки a, b, c простору $\varPi$ прямолінійно розміщені, причому, кут $\angle(a, b, c)$ є розгорнутим, а точка d цього простору така, що виконується рівність $\varphi(a, b, d) = -\varphi(c, b, d)$. Тоді кути $\angle(a, b, d)$ і $\angle(c, b, d)$ будемо називати суміжними.

Використовуючи згадану вище формулу, отриману у роботі [5], можна дати наступне означення плоскої розміщеності чотирьох точок простору $\varPi$.

Означення 4. Будемо казати, що точки a, b, c, d простору Π плоско розміщені, якщо виконується рівність

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(a,b,c) & \varphi(a,b,d) \\ \varphi(a,b,c) & 1 & \varphi(c,b,d) \\ \varphi(a,b,d) & \varphi(c,b,d) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Для довільної множини точок метричного простору природно дати наступне означення її плоскої розміщеності.

Означення 5. Будемо казати, що множина A точок простору Π плоско розміщена, якщо будь-які чотири її точки плоско розміщені.

Із означення 4 можна отримати наступний критерій плоскої розміщеності точок.

Теорема 6. *Для того щоб точки a, b, c, d простору Π були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\varphi(a,b,c) = \varphi(a,b,d)\varphi(c,b,d) \pm \sqrt{(1-\varphi^2(a,b,d))(1-\varphi^2(c,b,d))}. \tag{3}$$

У геометрії Евкліда рівність (3) має просте геометричне тлумачення: одна із вершина тетраедра знаходиться у площині основи, що утворена трьома іншими його вершинами. У цьому легко впевнитись помітивши, що рівність (3) є аналогом формул косинуса суми або різниці двух кутів.

Із означення 4 отримується наступна теорема, за допомогою якої зручно будувати у просторі Π плоско розміщені множини точок.

Теорема 7. *Нехай точки a, b, c простору Π прямолінійно розміщені, причому, кут $\angle(a,b,c)$ є розгорнутим.*

Для того, щоб точки a, b, c, d цього простору були плоско розміщені, необхідно і достатньо, щоб кути $\angle(a,b,d)$ і $\angle(c,b,d)$ були суміжними.

Із означення 4 отримується також наступна теорема, за допомогою якої можна у довільному метричному просторі встановити систему координат по відношенню до трьох фіксованих точок цього простору.

Теорема 8. *Нехай у метричному просторі Π кут $\angle(a,b,c)$ є прямим. Для того щоб точки a, b, c, d були плоско розміщені у цьому просторі, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $\varphi^2(a,b,d) + \varphi^2(c,b,d) = 1$.*

Такий підхід допускає окремі елементи неевклідової геометрії у просторі Π, що підтверджується конкретними прикладами.

У подальшому роботу слід продовжити у напрямі вивчення властивості паралельного розміщення множин точок довільного метричного простору, та встановлення співвідношень між поняттями перпендикулярності і паралельності множин точок простору, аналогічних класичним співвідношенням.

Література

[1] В. Ф. Каган. *Основания геометрии. Часть 2.* М.-Л.: Гостехиздат, 1956.
[2] В. Ф. Каган. *Очерки по геометрии.* Издательство Московского университета, 1963.
[3] Давид Гильберт. *Основания геометрии.* Петроград: Сеятель, 1923.
[4] Я. П. Понарин. *Элементарная геометрия. Часть 2.* Москва: МЦНМО, 2006.
[5] В. І. Кузьмич, Ю. В. Кузьмич. Аналоги формули Юнгіуса об'єму тетраедра. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки,* 36(249):55-64, 2012.
[6] А. Д. Александров. *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.* М.-Л.: Гостехиздат, 1948.