Поверхня обертання та її квазіареальна деформація з обмеженням

Юлія Хомич
(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)
E-mail: khomych.yuliia@gmail.com

Продовжуємо розглядати квазіареальну нескінченно малу деформацію поверхні $S \in C^3$ з полем зміщення $\overline{U}$:

$$\overline{r}^*(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + t\overline{U}(x^1, x^2),$$

при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі. Нехай частинні похідні $\overline{U}_i$ представлені у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\overline{r}_i, \overline{n}$ через симетричне тензорне поле $T^{\alpha\beta} \in C^2$, контраваріантний вектор $T^\alpha \in C^2$ і функцію $\mu \in C^2$:

$$\overline{U}_i = \left(c_{i\alpha}T^{\alpha\beta} - \mu\delta_i^\beta\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n}.$$

Відомо [1], що така деформація однозв'язної поверхні ненульової гаусової кривини існує тоді і лише тоді, коли $T^{\alpha\beta}$ та μ можна подати у явному вигляді

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(T^\alpha_{,j}d^{j\beta} + T^\beta_{,j}d^{j\alpha}\right),\ \mu = \frac{1}{2}T^\alpha_{,j}d^{j\beta}c_{\beta\alpha},$$

а тензор T^α є розв'язком системи рівнянь

$$T^\alpha_{,\alpha i} + T^\alpha_{,j}d^{j\beta}_{,\alpha}b_{\beta i} + T^\beta b_{\beta i}2H = 0. \tag{1}$$

Функція μ виражає закон змінювання елемента площі поверхні при її малій деформації, c_{ij} – дискримінантний тензор, δ^i_j – символи Кронекера, b_{ij} – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні, d^{ij} – тензор, обернений до тензора b_{ij}, H – середня кривина.

Надалі проводимо дослідження системи рівнянь (1) для поверхні обертання ненульової гаусової кривини

$$\overline{r}(x^1, x^2) = \{x^1\cos x^2,\ x^1\sin x^2,\ f(x^1)\}.$$

Знайдено розв'язок цієї системи двох рівнянь з двома невідомими функціями

$$T^1 = 0,\ T^2 = e^{\int \frac{(x^1f''-f'-f'^3)^2+x^1f'^2f''(f'+f'^3+x^1f'')}{x^1f'(1+f'^2)(x^1f''-f'-f'^3)}dx^1}. \tag{2}$$

При цьому тензор деформації $T^{\alpha\beta}$ та функція μ набувають вигляду:

$$T^{11} = T^{22} = 0,\ T^{12} = \frac{f'^2 + f'^4 + x^1f'f''}{2\sqrt{1+f'^2}(f'+f'^3-x^1f'')}e^{\int \frac{(x^1f''-f'-f'^3)^2+x^1f'^2f''(f'+f'^3+x^1f'')}{x^1f'(1+f'^2)(x^1f''-f'-f'^3)}dx^1}, \tag{3}$$

$$\mu = \frac{x^1(2x^1f''-2f'-f'^3+f'^5+x^1f'^2f'')}{2f'(x^1f''-f'-f'^3)}e^{\int \frac{(x^1f''-f'-f'^3)^2+x^1f'^2f''(f'+f'^3+x^1f'')}{x^1f'(1+f'^2)(x^1f''-f'-f'^3)}dx^1}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Поверхня обертання ненульової гаусової кривини допускає квазіареальну нескінченно малу деформацію, при якій її відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі. Тензорні поля $T^{\alpha\beta}$, T^α та функція μ мають вигляд (3), (2) та (4) відповідно.*

Для прикладу розглянуто квазіареальну деформацію з заданим обмеженням поверхні еліптичного параболоїда: $\overline{r}(x^1, x^2) = \{x^1\cos x^2,\ x^1\sin x^2,\ \frac{x^1}{2}\}$, і знайдено у явному вигляді $\overline{U}$.

Теорема 2. *Поверхня еліптичного параболоїда допускає квазіареальну нескінченно малу деформацію, при якій відхилення від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі з полем зміщення*

$$\overline{U}(x^1, x^2) = \{\frac{-c\cos x^2}{x^1},\ \frac{-c\sin x^2}{x^1},\ \frac{c}{2}((x^1)^2 + 4\ln x^1 - 1)\} + \overline{C},$$

де c – довільна стала, $c \neq 0$, а $\overline{C}$ – сталий вектор. При цьому закон змінювання елемента площі поверхні має вигляд $\mu = -\frac{c}{2}$.

Література

[1] Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич. *Аналітичне моделювання однієї задачі квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні*// Proc. Intern. Geom. Center, №8(2), C. 34-42, (2015).