4-квазипланарные отображения пространств со специальной полиаффинорной структурой

Хаддад М.
(Wadi University, Homs, Syria)
E-mail: akkad@ukr.net

Курбатова И.Н.
(ОНУ им.И.И.Мечникова, Одесса, Украина)
E-mail: irina.kurbatova27@gmail.com

Ранее мы рассматривали 4-квазипланарные отображения почти кватернионных многообразий [1]. В [2]мы ввели в рассмотрение *полукватернионную* структуру, которая порождается парой почти комплексных структур, коммутирующих между собой. Соответственно, *почти полукватернионным* мы назвали риманово пространство V_n с заданными на нем почти комплексными структурами $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$, которые удовлетворяют условиям

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h - \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = 0.$$

Очевидно, что

$$\overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h = \delta_i^h, \quad \overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h$$

Как обычно, под келеровой [4] будем понимать полукватернионную структуру на V_n, для которой

$$\overset{s}{F}{}_{i,j}^h = 0, \quad s = 1, 2, 3,$$

где <, > — знак ковариантной производной в V_n.

Показано [2]), что келерово полукватернионное пространство приводимо.

Рассмотрим (псевдо-)римановы пространства (V_n, g_{ij}) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$ с полукватернионными келеровыми структурами $\overset{s}{F}$, $\overset{s}{\overline{F}}$, $s = 1, 2, 3$, находящиеся в 4-квазипланарном отображении (4КПО), сохраняющем структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) имеют место

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{q}_{(i}(x) \overset{s}{F}{}_{j)}^h(x),$$

где

$$\overset{\circ}{F}{}_i^h = \delta_i^h, \quad \overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h, \quad \overset{s}{F}{}_i^h(x) = \overset{s}{\overline{F}}{}_i^h(x),$$

$\overset{s}{q}_i(x)$ - некоторые ковекторы.

Построены геометрические объекты, как неоднородные (типа параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств), так и тензорного характера (типа тензора Вейля), инвариантные относительно рассматриваемых отображений.

Выделен класс келеровых полукватернионных пространств (4-*квазиплоских*), допускающих 4КПО на плоское пространство. Найдена структура их тензора Римана [3]. Нами доказаны

Теорема 1. *Тензор Римана 4-квазиплоского полукватернионного келерова пространства* $(V_n, g_{ij}, \overset{s}{F})$ *по необходимости имеет структуру*

$$R_{ijk}^h = \widetilde{R}_{\alpha[j} Q_{k]i}^{h\alpha} + 2\widetilde{R}_{\alpha k}\left(\overset{1}{F}{}_i^h \overset{1}{F}{}_j^\alpha - \overset{2}{F}{}_i^h \overset{2}{F}{}_j^\alpha\right)$$

$$\widetilde{R}_{hk} = \left(C_1 R - C_2 \overset{3}{R}\right) g_{hk} - \left(C_2 R - C_1 \overset{3}{R}\right) \overset{3}{F}_{hk},$$

где

$$Q^{kh}_{ij} = \delta^k_i \delta^h_j - \overset{1}{F}{}^k_i \overset{1}{F}{}^h_j - \overset{2}{F}{}^k_i \overset{2}{F}{}^h_j + \overset{3}{F}{}^k_i \overset{3}{F}{}^h_j,$$

$R = R^\alpha_\alpha$ - *скалярная кривизна* V_n, $\overset{3}{R} = R^\alpha_\beta \overset{3}{F}{}^\beta_\alpha$,

$$C_1 = \frac{n^2 + 2n + 2m^2 - 2mn}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)}, \qquad C_2 = \frac{(2m-n)(n+2)}{8m(n-m)(m+2)(n-m+2)}$$

— *константы при* $m \neq 2, n - m \neq 2$.

Теорема 2. *Любое* 4*-квазиплоское полукватернионное келерово пространство допускает нетривиальные* 4*КПО.*

Теорема 3. 4*-квазиплоское полукватернионное келерово пространство* $\left(V_n, g_{ij}(x^i), \overset{s}{F}(x^i)\right)$ *представляет собой произведение*

$$V_n = V_m \times V_{n-m},$$

где $\left(V_m(x^a), g_{ab}(x^c), \overset{1}{F}{}^a_b(x^c)\right)$ *является келеровым относительно аффинора* $\overset{1}{F}{}^a_b(x^c)$ *пространством постоянной голоморфной кривизны, а* $\left(V_{n-m}(x^A), g_{AB}(x^C), \overset{1}{F}{}^B_A(x^C)\right)$, *соответственно, келеровым относительно аффинора* $\overset{1}{F}{}^B_A(x^C)$ *пространством постоянной голоморфной кривизны.*

Литература

[1] И. Н. Курбатова О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий. *Мат.Студiї*, V.40, No 1: C.95-103, 2013.

[2] И. Н. Курбатова 4-квазипланарные отображения почти кватернионных и полукватернионных многообразий *Proceedings of the International Geometry Center*, V.8, No 1: C.63-73, 2015.

[3] И. Н. Курбатова О 4-квазипланарных отображениях полукватернионных келеровых многообразий *Proceedings of the International Geometry Center*, V.9 No 2: C.49-62, 2016.

[4] Д. В. Беклемишев. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой *Итоги науки: Геометрия, 1963* ,М.: ВИНИТИ. C.165-212, 1965.