Критерій розщеплення у просторі Пелі-Вінера

Дільний Володимир Миколайович
(ДДПУ ім. І. Франка, м. Дрогобич, Україна)
E-mail: dilnyi@ukr.net

Гук Христина Олегівна
(ДДПУ ім. І. Франка, м. Дрогобич, Україна)
E-mail: xrustia.gyk@yandex.ua

Зображення математичних об'єктів у вигляді суми чи добутку об'єктів з простішими властивостями є одним з основних способів дослідження у математиці. Такими дослідженнями займалися Р. С. Юлмухаметов, Ю. І. Любарський, І. Е. Чижиков, Т. І. Гіщак та один з співавторів.

Простір Пелі-Вінера W^p_σ, $\sigma > 0$, це простір цілих функцій f експоненціального типу $\leq \sigma$, що належать до $L^p(\mathbb{R})$. Простір W^p_σ може бути визначений і як простір цілих функцій, що задовольняють умову

$$\sup_{\varphi\in(0;2\pi)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |(fre^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Б. В. Винницький та його учні розглядали задачу [1] про розщеплення функцій з простору Пелі-Вінера W^1_σ на суму двох функцій, кожна з яких характеризується тим, що її модуль є «великим» відповідно у верхній та нижній півплощині. Т. І. Гіщак та один зі співавторів розглядали наступну задачу в [2].

Задача розщеплення. *Чи для кожної функції $f \in W^1_\sigma$ можливий розклад $f = \chi + \mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $\mathbb{C}_+ = \{z : Rez > 0\}$, а також $\chi \in E^1[\mathbb{C}(0; \frac{\pi}{2})]$, $\mu \in E^1[\mathbb{C}(-\frac{\pi}{2}; 0)]$?*

Тут $E^p[\mathbb{C}(\alpha;\beta)], 0 < \beta - \alpha < 2\pi, 1 \leq p < +\infty,$ — простір аналітичних функцій f в

$$\mathbb{C}(\alpha;\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\},$$

для яких

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})| dr \right\} < +\infty.$$

Теорема Пелі-Вінера. *Простір W^2_σ збігається з простором функцій f, що зображаються*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(it) e^{itz} dt, \varphi \in L^2(-i\sigma; i\sigma)$$

В [2] запропоновано шукати розв'язок Задачі розщеплення у формі

$$\chi(z) = \chi_1(z) + i\chi_2(-iz), \tag{1}$$

де

$$\chi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\sigma} \varphi(it) e^{itz} dt, \qquad \chi_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{0} \varphi(it) e^{itz} dt.$$

Ми доводимо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $f \in W_\sigma^1$. Функція χ, визначена рівністю* (1), *є розв'язком Задачі розщеплення тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=[\frac{m}{2}]}^{[\frac{3m}{2}]} \frac{c_k}{m - \frac{i}{2} - k} \right| < +\infty,$$

де $\varphi(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}}$.

Наслідок 2. *Нехай $f \in W_\sigma^1$ і $c_k = 0$ для всіх $k > 0$, де коефіцієнти (c_k) визначені як вище. Тоді χ є розв'язком Задачі розщеплення.*

Література

[1] Б. В. Винницький. *Про узагальнення теореми Пелі-Вінера.* Математичні студії, 4 : 37–44, 1995.
[2] V. M. Dilnyi, T. I. Hishchak. *On splitting functions in Paley-Wiener space.* Mat. Stud., 45(2) : 137–148, 2016.