Конформно-голоморфно-проективні перетворення локально конформно-келерових многовидів

Є. В. Черевко
(Одеський національний економічний університет, ул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: cherevko@usa.com

В. Є. Березовський
(Уманський національний університет садівництва, ул.Інститутська, б. 1, м.Умань, Черкаська обл., 20305, Україна)
E-mail: berez.volod@rambler.ru

У роботі [2], розвиваючи ідеї статті [1] було введено конформно-голоморфно-проективні перетворення. Система рівнянь, які на ЛКК-многовиді (M^n, J, g) визначають конформно-голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення із збереженням комплексної структури має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \xi_{i,j} = \xi_{ij},\\
&2) \quad \rho, i = \rho_i,\\
&3) \quad \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\Big(\big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big)_{,k} g_{ij} + \big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big)_{,j} g_{ik} - \big(\omega_\alpha \xi^\alpha\big)_{,i} g_{jk} - \omega_i \mathfrak{L}_\xi g_{jk} + \omega^\alpha (\mathfrak{L}_\xi g_{i\alpha}) g_{jk}\Big)\\
&\qquad + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J^t_j J_{ki} - \rho_t J^t_k J_{ji},\\
&4) \quad \rho_{i,j} = \frac{1}{2}\omega^t \rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i \omega_j - \frac{1}{2}\rho_j \omega_i +\\
&\qquad + \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi\Big(R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i \omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}\big) - \frac{\Delta_2 \omega g_{ij}}{2}\Big),\\
&5) \quad \mathfrak{L}_\xi\, J^i_j = \xi^k \nabla_k J^i_j - J^\alpha_j \nabla_\alpha \xi^i + J^i_\alpha \nabla_j \xi^\alpha = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Нами доведені такі теореми

Теорема 1. *Якщо на ЛКК-многовиді (M^n, g, J) контраварінтне аналітичне векторне поле ξ породжує інфенітезимальні конформно-голоморфно-проективні перетворення, то об'єкт*

$$\Pi^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \frac{1}{2}\omega^h g_{ij} - \frac{1}{n+2}\Big(\big(\Gamma^s_{js} + \omega_j\big)\delta^h_i + \big(\Gamma^s_{is} + \omega_i\big)\delta^h_j + \big(\Gamma^s_{ts} - \frac{n}{2}\omega_t\big) J^t_i J^h_j + \big(\Gamma^s_{ts} - \frac{n}{2}\omega_t\big) J^t_j J^h_i\Big)$$

є інваріантним відносно цих перетворень:

$$\mathfrak{L}_\xi \Pi^h_{ij} = 0.$$

Теорема 2. *Тензор*

$$
\begin{aligned}
P^h_{ijk} &= R^h_{ijk} - \delta^h_k\big(2\omega_{i,j} + \omega_i\omega_j - ||\omega||^2 g_{ij}\big) + \delta^h_j\big(2\omega_{i,k} + \omega_i\omega_k - ||\omega||^2 g_{ik}\big) -\\
&- \frac{1}{2}\big(\omega^h{}_{,k} + \frac{1}{2}\omega^h\omega_k\big) g_{ij} + \frac{1}{2}\big(\omega^h{}_{,j} + \frac{1}{2}\omega^h\omega_j\big) g_{ik} -\\
&- \frac{1}{n+2}\Bigg(\delta^h_k\big(R_{ij} - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\big) - \delta^h_j\big(R_{ik} - \frac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\big) +\\
&+ (J^h_k J^t_i - J^h_i J^t_k)\Big(R_{tj} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,j} + \frac{\omega_t\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tj}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\Big) -\\
&- (J^h_j J^t_i - J^h_i J^t_j)\Big(R_{tk} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,k} + \frac{\omega_t\omega_k}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tk}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\Big)\Bigg),
\end{aligned}
$$

є інваріантним відносно інфенітезимальних конформно-голоморфно-проективних перетворень ($\mathfrak{L}_\xi P^h_{ijk} = 0$).

Теорема 3. *Для того щоб ЛКК-многовид* (M^n, J, g) *допускав наявність групи конформно-голоморфно-проективних перетворень, необхідно та достатньо, щоб система умов інтегровності*

$$\mathfrak{L}_\xi P^h_{ijk} = 0,$$
$$\rho_t P^t_{ijk} = \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi P_{ijk},$$

та їх продовжень, була сумісною. Тоді, ЛКК-многовид (M^n, J, g) *допускає наявність* r*-параметричної групи,* $r = 2(m+1)^2 - 1 - k$*, де* m *та* k *є відповідно комплексною розмірністю многовиду, та рангом системи умов інтегровності та їх продовжень. У випадку, якщо умови ці інтегровності задовільняються тотожно, розв'язок системи* (1) *залежатиме від* $r = 2(m+1)^2 - 1$ *параметрів.*

Тензор P_{ijk} визначено формулою

$$\begin{aligned}
P_{ijk} = {} & \nabla_k\Big(R_{ij} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ij}}{2}\Big) - \\
& - \nabla_j\Big(R_{ik} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,k} + \frac{\omega_i\omega_k}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ik}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{ik}}{2}\Big) + \\
& + \frac{1}{2}\Big(\delta^t_i\omega_k + \delta^t_i\omega_k - \omega^t g_{ik}\Big)\Big(R_{tj} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,j} + \frac{\omega_t\omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tj}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tj}}{2}\Big) - \\
& - \frac{1}{2}\Big(\delta^t_i\omega_j + \delta^t_i\omega_j - \omega^t g_{ij}\Big)\Big(R_{tk} - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{t,k} + \frac{\omega_t\omega_k}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{tk}}{2}\big) - \frac{\Delta_2\omega g_{tk}}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Теорема 4. *На компактному ЛКК-многовиді* $\{M_n, J, g\}$ *векторне поле* ξ*, що генерує нетривіальні конформно-голоморфно-проективні перетворення, є контраваріантним майже аналітичним.*

Література

[1] J. Mikeš, H. Chuda, I. Hinterleitner. Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.* Vol. 11, No. 5, 2014 8 p.

[2] Є. В. Черевко. Голоморфно-проективні перетворення та конформно-келерові многовиди. *Proc. Inter. Geom. Center.* v.4, № 1, 2016.