Інфінітезимальні конгармонічні перетворення ріманових просторів ненульової скалярної кривини

О. Є. Чепурна
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail: chepurna67@gmail.com

Є. Кулешова
(Одеський національний економічний університет, вул.Преображенська, б. 8, м.Одеса, 65082, Україна)
E-mail:

Конгармонічні відображення були вперше розглянуті у [1]. Користуючись тим, що у [2] доведено, що відображення є конгармонічним тоді і тільки тоді, коли зберігається добуток Rg_{ij}, визначимо як конгармонічні такі конформні перетворення, для яких

$$\mathfrak{L}_\xi(Rg_{ij}) = 0. \tag{1}$$

Нехай, (M, g) є рімановим многовидом. У випадку, коли $\forall x \in M^n$ виконується $R \neq 0$, система рівнянь для вектора ξ, що породжує перетворення, матиме наступний вигляд.

$$\begin{aligned}
&1)\ \xi_{i,j} = \xi_{ij};\\
&2)\ \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = -\big(\xi^\alpha \nabla_\alpha (ln|R|)\big) g_{ij};\\
&3)\ \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} - \tfrac{1}{2}\big(\nabla_k\big(\xi^\alpha\nabla_\alpha(ln|R|)\big)g_{ij} + \nabla_j\big(\xi^\alpha\nabla_\alpha(ln|R|)\big)g_{ik} - \nabla_i\big(\xi^\alpha\nabla_\alpha(ln|R|)\big)g_{jk}\big).
\end{aligned} \tag{2}$$

Доведені такі теореми.

Теорема 1. *Якщо на рімановому многовиді $(M^n,)$ контраварінтне аналітичне векторне поле ξ породжує інфенітезимальні конгармонічні перетворення, то тензор*

$$\begin{aligned}
Q^h_{ijk} = R^h_{ijk} &- \delta^h_j\big(\frac{1}{2}\nabla_i\nabla_k(ln|R|) + \frac{1}{4}\nabla_i(ln|R|)\nabla_k(ln|R|) - \frac{1}{8}||\nabla(ln|R|)||^2 g_{ik}\big)\\
&+\delta^h_k\big(\frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j(ln|R|) + \frac{1}{4}\nabla_i(ln|R|)\nabla_j(ln|R|) - \frac{1}{8}||\nabla(ln|R|)||^2 g_{ij}\big)\\
&-(\frac{1}{2}\nabla^h\nabla_j(ln|R|) + \frac{1}{4}\nabla^h(ln|R|)\nabla_j(ln|R|) - \frac{1}{8}||\nabla(ln|R|)||^2\delta^h_j)g_{ik}\\
&+(\frac{1}{2}\nabla^h\nabla_k(ln|R|) + \frac{1}{4}\nabla^h(ln|R|)\nabla_k(ln|R|) - \frac{1}{8}||\nabla(ln|R|)||^2\delta^h_k)g_{ij}.
\end{aligned} \tag{3}$$

є інваріантним відносно цих перетворень:

$$\mathfrak{L}_\xi Q^h_{ijk} = 0. \tag{4}$$

Поряд з тензором (3) інваріантним є, також, тензор конгармонічної кривини(див. [2]).

Теорема 2. *Для того щоб многовид (M^n, g) допускав наявність групи конгармонічних перетворень, необхідно та достатньо, щоб система умов інтегровності (4) та їх продовжень, була сумісною. Тоді, многовид (M^n, g) допускає наявність r-параметричної групи, $r = \frac{n(n+1)}{2} - k$, де n та k є відповідно розмірністю многовиду, та рангом системи умов інтегровності та їх продовжень. У випадку, якщо умова інтегровності задовільняється тотожно, розв'язок системи (2) залежатиме від $r = \frac{n(n+1)}{2}$ параметрів.*

Література

[1] Y. Ishi. On conharmonic transformation. *Tensor N. S.*, 7: 73-80 1957.
[2] Byung Hak Kim, In Bae Kim, Sun Mi Lee. Conharmonic transformation and critical riemannian metrics. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 12(2):347–354, 1997.