Про ізотопність функцій леми Морса

Бондар О. П.
(КЛА НАУ, Кропивницький)
E-mail: bondarkla@ukr.net

В. В. Шарко [1] дав означення ізотопних функцій Морса, за допомогою яких вивчались властивості многовидів, на яких було задано ці функції. З метою розширення можливостей вивчення зв'язку топології многовидів із заданими на них функціями було узагальнено поняття ізотопних функцій Морса, а саме, введено означення ізотопних функцій, [2]. Це означення, зокрема, дозволило побудувати шлях, [1], що поєднує функції леми Морса, показавши їх ізотопність.

Твердження 1. *Нехай $f_0 : R^n \to R$ — диференційовна функція і $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ — невироджена критична точка цієї функції. Тоді можна вказати координатні подання ізотопії*

$$H : U_0 \times [0, k] \to U_k \to [0, k], \qquad k \in N,$$

околу U_0 точки x_0 на деякий окіл U_k початку координат 0 простору R^n та ізотопії

$$h : V_0 \times [0, k] \to V_k \to [0, k], \qquad k \in N,$$

околу V_0 точки $f_0(x_0)$ на окіл V_k початку координат 0 простору R, такі, що диференційовні відображення

$$H_k \subset Iso_0(U_k), \qquad H_0 = id_{U_k},$$

$$h_k \subset Iso_0^+(V_k), \qquad h_0 = id_{V_k},$$

і для всіх точок $y = (y^1, \dots, y^n) \in U_k$, для яких $y^i(x_0) = 0, i = 1, \dots, n$, функція

$$f_k = -(y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

буде локально ізотопною функції f_0:

$$f_k = h_k \circ f_0 \circ H_k^{-1},$$

тобто можна вказати такі локальні ізотопні перетворення систем координат, що функція f_0 буде локально диференційовно ізотопна функції f_k.

Існування локальної системи координат $(y^1, \dots, y^n)$, в якій справедлива тотожність

$$f_0(x^1, \dots, x^n) = f_0(x_0) + f_k(y^1, \dots, y^n),$$

є лемою Морса. Координатне подання необхідних ізотопій полягає у побудованій послідовності елементарних ізотопій

$$H^i : U_{i-1} \times [0, 1] \to U_i \times [0, 1], \quad i = 1, \dots, k, \qquad U_i \subseteq U_{i-1}, i = 2, \dots, k$$

$$H_t^i \subset Iso_0(U_k), \qquad H_0^i = id_{U_{i-1}}, \text{ для всіх } t \in [0, 1],$$

і елементарних ізотопій

$$h^i : V_{i-1} \times [0, 1] \to V_i \times [0, 1], \quad i = 1, \dots, k, \qquad V_i \subseteq V_{i-1}, \ i = 2, \dots, k,$$

$$h_t^i \subset Iso_0^+(V_k), \qquad h_0^i = id_{V_{i-1}}, \text{ для всіх } t \in [0, 1],$$

для яких кінцеве відображення попередньої елементарної ізотопії є початковим — тотожним — відображенням наступної, а композиції відповідних елементарних ізотопій є потрібними ізотопіями H_k і h_k.

Література

[1] В. В. Шарко. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). Киев: Наук. думка, 1990.

[2] О. П. Бондарь. Об определении изотопных функций. *Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2015*, (2015), С.67.