

# Про біортогональні сітки ліній пари поверхонь

Л. Л. Безкоровайна

(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)

E-mail: liliyabezko@gmail.com

Нехай дві поверхні  $S$  і  $S^*$  тривимірного евклідового простору задані векторно - параметричними рівняннями. Припустимо, що встановлено відображення цих поверхонь (за допомогою рівнянь, що однозначно виражають криволінійні координати однієї поверхні через координати іншої поверхні). Віднесемо ці поверхні до спільних координат  $u, v$ . Тоді, за теоремою Тіссо [1], існує одна і лише одна система ліній, що є ортогональною і на поверхні  $S$ , і на поверхні  $S^*$ , яка визначається рівнянням

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ E'du + F'dv & F'du + G'dv \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

де  $E, F, G$  і  $E', F', G'$  - коефіцієнти перших квадратичних форм заданих поверхонь.

Розгорнемо рівняння (1) до вигляду

$$(EF' - E'F)du^2 + (EG' - E'G)dudv + (FG' - F'G)dv^2 = 0. \quad (2)$$

Отже, диференціальне рівняння (2) визначає дійсну ортогональну регулярну сітку ліній, спільну для двох різних поверхонь. Такі сітки ліній в даній роботі називаються *біортогональними*. Досліджуються властивості біортогональних сіток для деяких пар поверхонь, віднесених до спільних координат.

Насамперед виникає необхідність у явному вираженні сіткового тензора для біортогональної сітки. Має місце

**Теорема 1.** *Сітковий тензор біортогональної сітки ліній для пари поверхонь можна подати у вигляді*

$$J_{\alpha\beta} = (c_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} + c_{\beta\gamma}a_{\alpha\delta})g^{\gamma\delta},$$

де  $c_{\alpha\gamma}$  - дискримінантний тензор поверхні  $S$  з компонентами

$$c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}, \quad g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Для того, щоб здобути тензор біортогональної сітки, передусім необхідно від гаусових позначень геометричних величин в рівнянні (2) перейти до індексних позначень  $u = x^1, v = x^2, E = g_{11}, F = g_{12}, G = g_{22}, E' = a_{11}, F' = a_{12}, G' = a_{22}$ .

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що рівняння (2) набуває інваріантного вигляду

$$J_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0$$

або, що те ж саме,

$$(c_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} + c_{\beta\gamma}a_{\alpha\delta})g^{\gamma\delta}dx^\alpha dx^\beta = 0.$$

Доведено, що біортогональна сітка є спільною як для пар паралельних поверхонь, так і для сімейства паралельних поверхонь у цілому. При цьому вона збігається з сіткою ліній кривини.

Знайдено рівняння біортогональної сітки деформованої поверхні  $S$  та zdeформованої поверхні  $S^*$  за умови, що їх радіус-вектори пов'язані рівністю ( $t \rightarrow 0$ )

$$\bar{r}^*(x^1, x^2, t) = \bar{r}(x^1, x^2) + t\bar{U}(x^1, x^2).$$

Встановлено, що у випадку ареальної нескінченно малої деформації біортогональна сітка поверхонь  $S$  і  $S^*$  збігається з сіткою головних ліній деформації.

Ряд властивостей цієї сітки при ареальній нескінченно малій деформації сформульовано в [2].

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] M. Tissot. *Memoire sur la representation des surfaces et les projections des cartes geographiques*. Paris, 1881, p.337.
- [2] Л. Л. Безкоровайна. *Головна сітка нескіченно малих деформацій із стаціонарною площею*. Тези доповідей 5-ої міжнародної конференції з геометрії та топології. Пам'яті О. В. Погорелова, Черкаси 2003, ст. 12-13.