К вопросу о конформных отображениях римановых пространств на Риччи симметрические римановы пространства

В. Е. Березовский

(Уманьский национальный университет садоводства, ул.Институтская, д. 1, г.Умань, Черкасская обл., 20305, Украина)

E-mail: berez.volod@rambler.ru

Й. Микеш

(университет им.Палацкого, ул. 17 Листопада, д. 12, г. Оломоуц, 77147, Чешская республика)

E-mail: josef.mikes@upol.cz

И. Гинтерлейтнер

(Brno University of Technology, Brno, Czech Republic)

E-mail: Hinterleitner.I@fce.vutbr.cz

Конформные отображения римановых пространств рассматривались во многих работах. Примечательно, что эти отображения имеют приложения в общей теории относительности.

Напомним основные понятия теории конформных отображений, изложенные в [1,2,3].

Рассмотрим отображение f риманова пространства V_n с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ на риманово пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(x)$.

Отображение $f\colon V_n \to \bar{V}_n$ называют *конформным*, если в общей по отображению системе координат $x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ между метрическими тензорами $g_{ij}(x)$ и $\bar{g}_{ij}(x)$ пространств V_n и $\bar{V}_n$ имеет место зависимость

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\psi(x)} \cdot g_{ij}(x), \tag{1}$$

где $\psi(x)$ — некоторый инвариант.

Из (1) следует, что при конформных отображениях углы между касательными векторами сохраняются, а длины соответствующих векторов пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности зависит только от точки. Этими геометрическими свойствами конформные отображения одного риманова пространства V_n на другое риманово пространство $\bar{V}_n$ характеризуются полностью.

Из (1) следует, что между символами Кристоффеля второго рода пространств V_n и $\bar{V}_n$ имеется зависимость

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i - \psi^h(x)\,g_{ij}(x),$$

где $\psi_i(x) = \partial\psi/\partial x^i$, $\psi^h = g^{h\alpha}\psi_\alpha$, g^{ij} — компоненты обратной матрицы к матрице $\|g_{ij}\|$, δ^h_i — символы Кронекера.

Вопрос о том, допускает или не допускает риманово пространство V_n $(n > 2)$ конформное отображение на некоторое пространство Эйнштейна $\bar{V}_n$ был сведен Г. Бринкманом [4] к проблеме существования решения некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений типа Коши относительно $(n+1)$ неизвестных функций.

Основные уравнения указанных отображений сведены к линейной системе дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши, при помощи которой удалось оценить степень мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна (см. [5,6]).

Напомним, что пространство аффинной связности называют *Риччи симметрическим*, если тензор Риччи в нем абсолютно параллелен.

Рассмотрим конформное отображения римановых пространств V_n на Риччи-симметрические римановы пространства $\bar{V}_n$, которые характеризуются условиями на тензор Риччи

$$\bar{R}_{ij|k} = 0$$

где “ | ” — ковариантное дифференцирование в $\bar{V}_n$.

Нами доказана

Теорема. *Для того, чтобы риманово пространство V_n допускало конформное отображение на Риччи-симметрическое пространство $\bar{V}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение замкнутой смешанной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных относительно функций $\psi_i(x)$, $\mu(x)$ и $\bar{R}_{ij}(x)$ $(=\bar{R}_{ji}(x))$:*

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j} &= \psi_i\psi_j - \frac{\mu}{n-2}\cdot g_{ij} + \frac{1}{n-2}\,(\bar{R}_{ij} - R_{ij}),\\
\mu_{,j} &= g^{\alpha\beta}\,\Big((n-2)\,R^{\gamma}_{\beta j\alpha}\psi_\gamma + (n-1)\,\psi_\alpha\bar{R}_{\beta j} - R_{\alpha j}\psi_\beta\Big) +\\
&\quad (n-1+g^{\alpha\beta}\,R_{\alpha\beta})\,\psi_j,\\
\bar{R}_{ij,k} &= \psi_i\bar{R}_{jk} + \psi_j\bar{R}_{ik} + 2\,\psi_k\bar{R}_{ij} - g^{\alpha\beta}\,\psi_\beta\,(g_{ik}\bar{R}_{\alpha j} + g_{jk}\bar{R}_{\alpha i}).
\end{aligned}$$

Очевидно, общее решение замкнутой смешанной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных зависит не более чем от $1/2\,(n+2)\,(n+1)$ существенных параметров.

Литература

[1] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*. Ин. лит., М. (1948).

[2] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*. Наука, М. (2008), 256с.

[3] J. Mikeš et al, *Differential geometry of special mappings*. Palacky Univ. Press, Olomouc (2015), 569p.

[4] H. W. Brinkmann, *Einstein spaces which mapped conformally on each other*. Math. Ann., 1925, № 94, 117–145.

[5] Й. Микеш, М. Л. Гаврильченко, Е. И. Гладышева, *О конформных отображениях на пространства Эйнштейна*. Вестник Моск. ун-та, 1994, № 3, 13–17.

[6] Л. Е. Евтушик, И. Гинтерлеитнер, Н. И. Гусева, Й. Микеш, *Конформные отображения на пространства Эйнштейна*. Изв. вузов. Матем., 2016, № 10, 8–13.