Структура множества субмерсий, для которых все поверхности уровня являются линейно связными

А. М. Байтураев
(Ташкент, Национальный университет Узбекистана)
E-mail: abayturaev@mail.ru

Если на гладком многообразии задана дифференцируемая функция без критических точек, то компоненты связности поверхностей уровня порождают слоение коразмерности один. Если же все поверхности уровня рассматриваемой функции линейно связны, то сами поверхности уровня порождают гладкое слоение коразмерности один.

В этом работе рассматривается вопрос о том, насколько богато множество дифференцируемых функций без критических точек, все поверхности уровня которых линейно связны. Получено результат, что множество дифференцируемых функций без критических точек, для которых все множества уровней линейно связны, является замкнутым множеством в пространстве всех дифференцируемых функций.

Пусть $C^1(R^n, R^1)$ - множество всех дифференцируемых функций класса C^1. На множестве $C^1(R^n, R^1)$ введем слабую (C^1 - компактно-открытую) топологию.

Множество всех C^r-гладких отображений $f : M \to N$ обозначим через $C^r(M, N)$, где M, N - гладкие многообразия класса C^r. Предположим, что $r = 0, 1, 2, ...$

Слабая топология (C^r-компактно-открытая топология) в $C^r(M, N)$ порождается множествами, определяемыми следующим образом.

Пусть $f \in C^r(M, N)$ и пусть (φ, U), (ψ, V) - карты многообразий M, N. Пусть, далее, $K \subset U$ - компактное множество, такое, что $f(K) \subset V$; пусть, $0 < \varepsilon < \infty$.

Предбазисную окрестность

$$\aleph^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon) \ (1)$$

слабой топологии определяется как множество таких C^r-отображений $g : M \to N$, что $g(K) \subset V$ и для любых $x \in \varphi(K)$, $k = 0, ..., r$,

$$\|D^k(\psi f \varphi^{-1})(x) \text{-} D^k(\psi g \varphi^{-1})(x)\| < \varepsilon.$$

Это означает, что локальные представления отображений f, g вместе с их первыми r производными различаются не более, чем на ε в каждой точке компактного множества K.

Слабая топология в $C^r(M, N)$ порождается множествами (1); этим определяется топологическое пространство $C^r_W(M, N)$. Окрестностью точки f по отношению к этой топологии является, таким образом, всякое множество, содержащее пересечение конечного числа множеств типа (1).

В данной работе качестве многообразия N мы рассматриваем одномерное многообразие R^1 и полагаем, что $r = 1$. Пространство $C^1(R^n, R^1)$ рассматривается со слабой топологией (C^r-компактно-открытой топологией). Известно, что пространство $C^r(M, N)$ со слабой топологией имеет счетную базу.

Обозначим через $LS(R^n, R^1)$ множество субмерсий, для которых все поверхности уровня линейно связно.

Теорема 1. *Множество $LS(R^n, R^1)$ является замкнутым подмножеством пространства $C^1(R^n, R^1)$ всех дифференцируемых функций класса C^1.*

Литература

[1] Нарманов А., Байтураев А. Об одном классе субмерсий. //Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2003. – №2. –С. 29-36.

[2] Хирш М. Дифференциальная топология. –Москва, «Мир», 1979 г.