# *XI Літня школа*

# *"Алгебра, Топологія, Аналіз"*

1 – 14 серпня 2016 року

Одеса, Україна

Тези доповідей

***XI Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз”***, 1 – 14 серпня 2016 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2016. — 145 с.

## Організатори Літньої школи

**Одеська національна академія харчових технологій, Одеса**

**Інститут математики НАН України, Київ**

**Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ**

**Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів**

**Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ**

# Зміст

# Геометрические структуры на трехмерных многообразиях

**Д. В. Болотов**

ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАНУ

*bolotov@ilt.kharkov.ua*

Мы собираемся дать обзорный цикл лекций по геометрии трехмерных многообразий, включающий в себя следующие разделы:

- Терстоновские геометрии. Геометризационная гипотеза Терстона;
- Двумерные орбиобразия;
- Слоения Зейферта;
- Геометрии на дополнениях к узлам;
- Дискретные группы изометрий модельных геометрий.

[1] У. Тёрстон, *Трехмерная геометрия и топология: М., МЦНМО, 2001.*

[2] П. Скотт, *Геометрии на трехмерных многообразиях: Мат.НЗН 39, Мир, 1986.*

# On stable homotopy equivalence of polyhedra

**Yu. A. Drozd**
Institute of Mathematics NASU
*y.a.drozd@gmail.com*

My lectures will be devoted to the problems related to the stable homotopical classification of polyhedra (finite $CW$-complexes). I am planning to give two lectures on classification of "small" polyhedra and one lecture on genera of polyhedra and related questions. The details of the considered results and their proofs can be found in [5, 6]. These papers can be obtained from my site: `www.imath.kiev.ua/~drozd/publ.html`.

**1.** For general notions from topology we refer to [10]. Let $\mathsf{Hot}$ be the homotopic category of pointed topological spaces. We denote by $X \vee Y$ the *wedge* (or *bouquet*) of spaces $X$ and $Y$, i.e. the subspace $X \times \cdot_Y \cup \cdot_X \times Y \subset X \times Y$, where $\cdot_X$ is the base point of $X$. We also denote by $X \wedge Y$ the factorspace $X \times Y/X \vee Y$. In particular, we set $SX = S^1 \wedge X$, the *suspension* (or *double cone*) of $X$, and $S^k X = S^k \wedge X$, the iterated suspension. There is a natural functor $\mathsf{S} : \mathsf{Hot} \to \mathsf{Hot}$ mapping $X$ to $SX$ and we define the *stable homotopy category* $\mathsf{Hos}$ having the same objects as $\mathsf{Hot}$, but with the sets of morphisms

$$\mathsf{Hos}(X, Y) = \varinjlim_k \mathsf{Hot}(S^k X, S^k Y).$$

In particular, $X \simeq Y$ in $\mathsf{Hos}$ means that $S^k X \simeq S^k Y$ in $\mathsf{Hot}$ for some $k$. Such polyhedra are called *stably homotopic*. Our aim is to study the subcategory $\mathsf{CW}$ of $\mathsf{Hos}$ consisting of *polyhedra*, i.e. finite $CW$-complexes.

Let $\mathsf{CW}_n^k$ be the full subcategory of $\mathsf{Hot}$ consisting of $(n-1)$-connected polyhedra of dimension at most $n+k$ and $\mathsf{SW}_n^k$ be its image in the category $\mathsf{Hos}$. The generalized Freudenthal theorem [3, Th. 1.21] implies that the functor $\mathsf{S}$ induces an equivalence of categories $\mathsf{CW}_n^k \to \mathsf{CW}_{n+1}^k$ for $n > k+1$, while for $n = k+1$ and $X, Y \in \mathsf{CW}_n^k$ the map $\mathsf{Hot}(X, Y) \to \mathsf{Hot}(SX, SY)$ is surjective and *reflects isomorphisms*, i.e. $\mathsf{S}f$ is an isomorphism if and only if so is $f$. Therefore, $\mathsf{CW}_n^k \simeq \mathsf{SW}_n^k$ for $n > k+1$ and, considering the category $\mathscr{S}_n = \mathsf{SW}_n^{n-1}$, we obtain a stable homotopy classification of polyhedra having cells in at most $n$ successive dimensions. Moreover, if the smallest dimension of cells in such polyhedra is at least $n$ (thus their dimensions are at least $2n-1$), their stable homotopy equivalence is indeed their homotopy equivalence.

The category $\mathsf{Hos}$ has an advantage to be *additive*. Recall that it means that all sets $\mathsf{Hos}(X, Y)$ are abelian groups, the multiplication of morphisms is bilinear and any two objects have a direct sum. Actually, a direct sum of $X$ and $Y$ in the category $\mathsf{Hos}$ is their wedge $X \vee Y$, while the group structure on $\mathsf{Hos}(X, Y)$ arises from the $H$-cogroup structure on $SX$ (see [10, Sec. 2]). Moreover, this category is *fully additive* (or *Karubian*), which means that any idempotent $e \in \mathsf{Hos}(X, X)$ arises from a decomposition of $X$ into a direct sum (that is, into a wedge) [3, Sec. 4.1]. Following Baues [1], we use the next definition.

**Означення 1.** An *atom* is an indecomposable (into a non-trivial wedge) object $A$ from $\mathscr{S}_n$ which does not belong to $\mathsf{S}\mathscr{S}_{n-1} \cup \mathsf{S}^2\mathscr{S}_{n-1}$. In other words, any polyhedron isomorphic to $A$ in $\mathscr{S}_n$ must have cells of "ultimate" dimensions $n$ and $2n-1$. If $A$ is an atom, all polyhedra of the sort $S^m A$ are called *suspended atoms*.

Obviously, any polyhedron is isomorphic in $\mathsf{Hos}$ (i.e. stably homotopic) to a wedge of several suspended atoms. Note that such a decomposition is, in general, not unique.

**2.** Another advantage of $\mathsf{Hos}$ is that it is *triangulated* [7, 8] having cofibration sequences

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Cf \xrightarrow{h} SX$$

as model exact (or distinguished) triangles. Here $Cf$ is the *cone* of the map $f$, i.e. the factorspace $CX \cup Y/\sim$, where $X = I \times X/1 \times X$ is the cone over $X$ and $\sim$ is the equivalence relation identifying $(0, x) \in CX$ with $f(x) \in Y$. The map $g$ sends $y \in Y$ to $y \in Cf$, while the map $h$ sends $y \in Y$ to $0 \times \bullet_X \in SX$ and $(t, x) \in CX$ to its class in $SX$. If $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} SX$ is any exact triangle in $\mathsf{Hos}$, then for any space $V$ the sequences of abelian groups

$$\mathsf{Hos}(V, X) \xrightarrow{f\cdot} \mathsf{Hos}(V, Y) \xrightarrow{g\cdot} \mathsf{Hos}(V, Z) \xrightarrow{h\cdot} \mathsf{Hos}(V, SX) \xrightarrow{Sf\cdot} \mathsf{Hos}(V, SY)$$

and

$$\mathsf{Hos}(SY, V) \xrightarrow{\cdot Sf} \mathsf{Hos}(SX, V) \xrightarrow{\cdot h} \mathsf{Hos}(Z, V) \xrightarrow{\cdot g} \mathsf{Hos}(Y, V) \xrightarrow{\cdot f} \mathsf{Hos}(X, V)$$

are exact and can be extended both to the right and to the left. Here $f\cdot$ denotes the multiplication by $f$ on the left and $\cdot f$ denotes the multiplication by $f$ on the right.

Using this triangulated structure, we propose a recursive procedure for classification of atoms in $\mathscr{S}_n$, starting from $\mathscr{S}_1$, where the only atom is $S^1$. Choose some integer $m$ such that $n \le m < 2n-1$. Consider two subcategories $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ from $\mathscr{S}_n$. Namely, $\mathscr{A}$ consists of $(m-1)$-connected polyhedra of dimension at most $2n-2$ and $\mathscr{B}$ consists of $(n-1)$-connected polyhedra of dimension at most $m$. If $X \in \mathscr{S}_n$ and $B = X^m$ is its $m$-skeleton, then $B \in \mathscr{B}$ and $X/B \simeq SA$ for some $A \in \mathscr{A}$. It gives an exact triangle

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} X \xrightarrow{h} SA.$$

Consider the category $\mathscr{F}_{n,m}$ whose objects are morphisms $f : A \to B$, where $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$, and a morphism from $f$ to $f' : A' \to B'$ is a pair of morphisms $(\alpha, \beta)$ such that the square

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

commutes. Let $\mathcal{I}$ be the ideal of $\mathscr{F}_{n,m}$ consisting of pairs $(\alpha, \beta)$ as above such that $\beta$ factors through $f'$ and $\mathcal{J}$ be the ideal of $\mathscr{S}_n$ consisting of morphisms $\gamma : X \to X'$ which factor both through an object from $\mathsf{S}\mathscr{A}$ and through an object from $\mathscr{B}$.

**Теорема 1.** *There is an equivalence of categories $\mathsf{C} : \mathscr{F}_{n,m}/\mathcal{I} \to \mathscr{S}_n/\mathcal{J}$ which maps $f : A \to B$ to $Cf$. Moreover, $\mathcal{J}^2 = 0$, hence isomorphism classes in $\mathscr{S}_n$ and $\mathscr{S}_n/\mathcal{J}$ are the same.*

Let $\mathsf{CT}$ be the full subcategory of $\mathsf{CW}$ consisting of *torsion free* polyhedra $X$, i.e. such that all groups $H_n(X, \mathbb{Z})$ are torsion free, and $\mathsf{ST}$ be its image in $\mathsf{SW}$. Analogously $\mathsf{CT}_n^k$ and $\mathsf{ST}_n^k$ are defined, and we set $\mathscr{T}_n = \mathsf{ST}_n^{n-1}$. We also denote by $\mathscr{F}_{n,m}^0$ the full subcategory of $\mathscr{F}_{n,m}$ consisting of all maps $f : A \to B$ such that $A$ and $B$ are torsion free and $H_m(f, \mathbb{Z}) = 0$. Let $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \cap \mathscr{F}_{m,n}^0$ and $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} \cap \mathscr{T}_n$.

**Теорема 2.** *There is an equivalence of categories* $\mathsf{C}^0 : \mathscr{F}^0_{n,m}/\mathcal{I}_0 \to \mathscr{T}_n/\mathcal{J}_0$ *which maps* $f : A \to B$ *to* $Cf$*. Moreover,* $\mathcal{I}_0^2 = 0$ *and* $\mathcal{J}_0^2 = 0$*, hence* $\mathsf{C}^0$ *induces a one-to-one correspondence between isomorphism classes in* $\mathscr{F}^0_{n,m}$ *and* $\mathscr{T}_n$*.*

These theorems replace the classification of polyhedra from $\mathscr{S}_n$ ($\mathscr{T}_n$) by the classification of objects from $\mathscr{F}_{n,m}$ (respectively, from $\mathscr{F}^0_{n,m}$). The latter problems are actually a kind of *bimodule problems* considered, for instance, in [4]. Using this approach, in particular the technique of *representations of bunches of chains* from [2], we give a complete classification of polyhedra from $\mathscr{S}_n$ for $n \leq 4$ and from $\mathscr{T}_n$ for $n \leq 7$. It so happens that $\mathscr{S}_n$ for $n < 4$ and $\mathscr{T}_n$ for $n < 7$ are *essentially finite*: their atoms have at most 4 cells in $\mathscr{S}_n$ ($n < 4$) and at most 6 cells for $\mathscr{T}_n$ ($n < 7$). On the other hand, the number of cells in atoms from $\mathscr{S}_4$ and from $\mathscr{T}_7$ can be arbitrary. During the lectures we will present this classification. We also show that for bigger values of $n$ such classification becomes *wild* in the sense of the representation theory, i.e. includes classification of representations of all finite dimensional algebras over a field.

**3.** We also consider *genera* of polyhedra. Namely, let $\mathsf{Hos}_p$ denotes the $p$-localization of the category $\mathsf{Hos}$. It means that $\mathsf{Hos}_p(X,Y) = \mathsf{Hos}(X,Y) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, where $\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b\}$. Actually, an equivalent category is obtained if we consider the localization of polyhedra in the sense of [9, Sec. 2]. We call the *genus* $G(X)$ of a polyhedron $X$ the set of polyhedra $Y$ such that $X \simeq Y$ in every category $\mathsf{Hos}_p$. One easily sees that if $X \vee Z \simeq Y \vee Z$ for some $Z$, then $Y \in G(X)$. Thus genera are closely related to the cancellation problem for wedges of polyhedra. Let $g(X)$ denotes the number of isomorphism classes (in $\mathsf{Hos}$) of polyhedra from $G(X)$. We establish the following main properties of these notions as well as a sort of *cancellation law* in the category $\mathsf{Hos}$.

**Теорема 3.** *1.* $g(X) < \infty$ *for every polyhedron* $X$*.*

*2. If* $Y \in G(X)$*, there is a k-fold wedge* $kX$ *such that* $kX \simeq Y \vee Y'$ *for some* $Y'$*.*

*3. Let* $Y \in G(X)$*,* $B(X) = \bigvee_{r \in r(X)} S^r$*, where* $r(X) = \{r \in \mathbb{N} \mid \mathsf{Hos}(S^r, X) \text{ is not torsion}\}$*. Then* $X \vee B(X) \simeq Y \vee B(X)$*.*
(Note that if $r \in r(X)$, then $r \leq \dim X$, hence $r(X)$ is finite.)

*4. If* $X \vee Z \simeq Y \vee Z$*, where* $Z \in G(X)$*, then* $X \simeq Y$*.*

Here all isomorphisms are isomorphisms in the category $\mathsf{Hos}$, i.e. stable homotopy equivalences.

Finally, we give an upper bound for the number $g(X)$. Note that for every polyhedron $X$ there are an integer $m$ and maps $X \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} X$, where $B$ is a wedge of spheres, such that $\alpha\beta \equiv m{\cdot}1_X$ modulo torsion and $\beta\alpha \equiv m{\cdot}1_B$ modulo torsion.

**Теорема 4.** *Let* $m, \alpha, \beta$ *are as above and* $B = \bigvee_{i=1}^k r_i S^{n_i}$ *with different dimensions* $n_i$*. If* $m = 2$*, then* $g(X) = 1$*. If* $m > 2$*, then* $g(X) \leq (\varphi(m)/2)^k$*, where* $\varphi(m)$ *is the Euler function.*

For instance, if $\mathsf{Hos}(X,X)$ is torsion or if $m \in \{2,3,4,6\}$, then $g(X) = 1$. We will present examples of description of genera.

[1] H.-J. Baues, *Atoms in Topology*, Jahresber. Dtsch. Math.–Ver. 104 (2002) 147–164.

[2] V. M. Bondarenko, *Representations of bundles of semichained sets and their applications*, St. Petersburg Math. J. 3 (1992) 973–996.

[3] J. M. Cohen, *Stable Homotopy*, Lecture Notes in Math. 165 (1970).

[4] Y. Drozd, *Reduction algorithm and representations of boxes and algebras*, Comtes Rendue Math. Acad. Sci. Canada, 23 (2001) 97-125.

[5] Y. A. Drozd, *Matrix problems, triangulated categories and stable homotopy types*, São Paulo J. Math. Sci. 4 (2010) 209–249.

[6] Y. Drozd, P. Kolesnyk, *On genera of polyhedra*, Central European J. Math. 10 (2012) 401–410.

[7] S. I. Gelfand, Y. I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg, 1996.

[8] A. Neeman, *Triangulated Categories*, Princeton University Press, 2001.

[9] D. P. Sullivan, *Geometric Topology: Localization, Periodicity and Galois Symmetry*, Springer Verlag, 2005.

[10] R. M. Switzer. *Algebraic Topology – Homotopy and Homology*, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1975.

# Відкриті геометричні та топологічні питання математичного аналізу

**Ю. Б. Зелінський**

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

*zel@imath.kiev.ua*

В лекції буде розглянуто ряд задач теорії відображень, які тісно пов'язані з задачами комплексного та опуклого аналізу.

**Задача 1.** Чи можна на кожному $n$-вимірному многовиді задати неперервну інволюцію?

**Задача 2.** Чи можна на кожному $n$-вимірному многовиді $M$ задати неперервне відображення, кожна точка образу якого містить не більше ніж два прообрази, а образ $f(M)$ допускає вкладення в $n$-вимірний евклідів простір?

**Означення 1.** Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ $m$-напівопукла відносно точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, якщо знайдеться $m$-вимірна півплощина $P$, така що $x \in P$ і $P \cap E = \varnothing$.

**Означення 2.** Скажемо, що множина $m$-напівопукла, якщо вона $m$-напівопукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R} \backslash E$.

**Задача 3.** Яка мінімальна кількість куль в тривимірному евклідовому просторі з центрами на сфері забезпечить належність центра сфери до їх 1-напівопуклої оболонки?

**Задача 4.** Чи існує скінчена кількість куль в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n > 3$ з центрами на сфері, яка забезпечить належність центра сфери до їх 1-напівопуклої оболонки?

**Задача 5.** Нехай $K \subset \mathbb{C}^n$ – лінійно опуклий компакт з нетривіальною групою когомологій $H^i(K)$. Чи вірно, що групи когомологій $H^j(K)$ також нетривіальні для всіх $j, 0 < j < i$?

Для всіх відомих прикладів це так.

**Задача 6.**(проблема сфери). Чи існує лінійно опуклий компакт в $\mathbb{C}^2$ (або 2-опуклий компакт в $\mathbb{R}^4$), усі групи когомологій якого співпадають з відповідними групами двовимірної сфери?

**Задача 7.** Нехай $C$ – така замкнута жорданова крива на площині $\mathbb{R}^2$, що для довільної алгебраїчної замкнутої кривої $L$ порядку $n$ з властивості "перетин $C \cap L$ містить $m$ точок" випливає, що $C \cap L$ містить не менше ніж $m + 1$ точку. Чи існує таке число $m$, що з виконання вказаної умови випливає те що $C$ буде алгебраїчною кривою порядку $n$?

**Задача 8.** Нехай в попередній задачі крива $L$ буде колом і $m = 3$. Чи вірно, що $C$ також буде колом?

**Задача 9.** Нехай в задачі 5 крива $L$ буде еліпсом і $m = 5$. Чи вірно, що $C$ також буде еліпсом?

[1] Ю.Б.Зелинский *Выпуклость. Избранные главы*, Праці Інституту математики НАН України, **92**, 280 с., 2012.

# Функції зі зв'язним графіком

**О. Карлова**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

*maslenizza.ua@gmail.com*

Сукупність усіх неперервних функцій між просторами $X$ та $Y$ ми позначаємо через $\mathrm{C}(X,Y)$, а множину усіх функцій зі зв'язним графіком – через $\mathrm{CG}(X,Y)$. Функція $f: X \to Y$ між топологічними просторами називається: *функцією Дарбу*, $f \in \mathrm{D}(X,Y)$, якщо множина $f(C)$ зв'язна для довільної зв'язної множини $C \subseteq X$; *зв'язною*, $f \in \mathrm{Conn}(X,Y)$, якщо графік звуження $f|_C$ на кожну зв'язну множину $C \subseteq X$ зв'язний.

При $X = Y = \mathbb{R}$ вірні наступні співвідношення між вказаними класами функцій:

$$\mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{Conn}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathrm{CG}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

які в класі $\mathrm{B}_1$-функцій, тобто, поточкових границь послідовностей неперервних функцій, перетворюються у такі: $\mathrm{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{Conn}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathrm{CG}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathrm{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Детальний огляд вищевказаних співвідношень можна знайти в [2, 3].

Функція $f: X \to Y$ між топологічними просторами $X$ та $Y$ називається *слабко ґібсоновою* [4], якщо для кожного $x \in X$ вірне включення $f(x) \in \overline{f(G)}$ для довільної відкритої зв'язної множини $G \subseteq X$, такої, що $x \in \overline{G}$.

**Теорема 1.** *Нехай $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ і $Y$ – $T_1$-простір. Тоді кожна слабко ґібсонова $F_\sigma$-вимірна функція $f: X \to Y$ має зв'язний графік.*

**Теорема 2.** *Нехай $X$ – спадково берівський простір, $Y$ – метризовний простір і $f: X \to Y$ – поточкова границя послідовності неперервних функцій. Якщо виконується одна з умов: (1) $X$ – зв'язний і локально зв'язний простір і $f$ – слабко ґібсонове, або (2) $X$ – лінійно зв'язний простір і $f$ – функція Дарбу, то $f$ має зв'язний графік.*

Зауважимо, що множина всіх $\mathrm{B}_1$-функцій Дарбу $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ замкнена відносно рівномірних границь [1]. Наступне питання відкрите.

**Питання.** *Нехай $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – рівномірна границя послідовності $\mathrm{B}_1$-функцій Дарбу $f_n: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Чи є $f$ функцією Дарбу?*

Функція $f: X \to Y$ має *властивість $l$-Дарбу*, якщо образ $f(C)$ довільної лінійно зв'язної множини $C \subseteq X$ зв'язний. Сукупність усіх $l$-Дарбу функцій між просторами $X$ та $Y$ ми позначаємо через $D^l(X,Y)$. Наступний результат дає часткову відповідь на сформульоване питання.

**Теорема 3.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $Y$ – метричний простір і $(f_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність $F_\sigma$-вимірних функцій з класу $D^l(X,Y)$, яка рівномірно збігається до функції $f: X \to Y$. Тоді $f$ – $F_\sigma$-вимірна функція з класу $D^l(X,Y)$.*

[1] Bruckner A. *Differentiation of Real Functions* [2nd ed.], Providence, RI: American Mathematical Society, 1994.

[2] Ciesielski K. Jastrzębski J. *Darboux-like functions whithin the classes of Baire-one, Baire-two and additive functions*, Topol. Appl. 103 (2000), 203-219.

[3] Gibson R., Natkaniec T. *Darboux-like functions*, Real Analysis Exch. 22 (2) (1996/97), 492-533.

[4] Kellum K. *Functions that separate $X \times \mathbb{R}$*, Houston J. Math. 36 (2010), 1221-1226.

# Категорні аксіоми теорії гомотопій

**В. В. Любашенко**
Інститут математики НАНУ
*lub@imath.kiev.ua*

Мета лекцій – вивести спільні риси і наслідки для різноманітних теорій гомотопій з набору аксіом категорного характеру. Першим, хто запропонував такий набір аксіом, був Квилен (1967). Він ввів в ужиток модельні категорії – категорії, що моделюють теорію гомотопій. Модельні категорії оснащуються підкатегоріями слабких еквівалентностей, фібрацій і кофібрацій. Лише підкатегорії слабких еквівалентностей та фібрацій використовуються в аксіоматиці К. Брауна (1974) категорій фібрантних об'єктів. На слабші аксіоми спирається Радулеску-Бану (2006) для ABC категорій фібрації. Чисинський також послаблює аксіоми Брауна до диференційовних зліва категорій (2010).

Втім важливо, що аксіоми Брауна та Квилена виконуються у головних прикладах: топологічних просторах та комплексах модулів, даючи можливість доводити для них твердження з теорії гомотопій. Зокрема, гомотопійна категорія комплексів є похідною категорією. Можливість вести гомотопічні обчислення в категоріях фібрантних об'єктів включає, наприклад, написання довгих точних гомотопічних послідовностей.

# Деформації гладких функцій на компактних поверхнях

**С. І. Максименко**
Інститут математики НАН України
*maks@imath.kiev.ua*

Міні-курс присвячений опису деяких деформаційних властивостей гладких функцій (і, зокрема, функцій Морса) на компактних поверхнях. Нижче наведено приблизний план лекцій та короткий опис їх змісту.

**1. Класифікація компактних поверхонь**. Компактні поверхні розділяються на два класи *орієнтовні* та *неорієнтовні*. Топологічний тип кожної такої поверхні визначається кількістю компонент межі та деяким числом $g \geq 0$, яке називається *рід* поверхні.

**2. Групи гомеотопій компактних поверхонь**. Нехай $H(M)$ — група всіх гомеоморфізмів поверхні $M$, а $H_{\mathrm{id}}(M)$ — її (нормальна) підгрупа, що складається з гомеоморфізмів ізотопних до тотожного відображення $\mathrm{id}_M$. Тоді фактор-група $H(M)/H_{\mathrm{id}}(M)$ позначається через $\pi_0 H(M)$ і називається групою *гомеотопій* поверхні $M$. В іншій термінології цю групу також називають *групою класів відображень* (*mapping class group*). Таким чином, елементи $\pi_0 H(M)$ це гомеоморфізми поверхні $M$, «які ми розглядаємо лише з точністю до ізотопії».

Твірні груп $\pi_0 H(M)$ для замкнутих орієнтовних поверхонь знайдені M. Dehn [6] в 1938 — це так звані *скручування Дена*.

Далі його результати були узагальнені W.B.R. Lickorish [10], [11], [12], в 1963–1964. Зокрема, він знайшов твірні для груп гомеотопій неорієнтовних поверхонь, так звані $Y$-гомеоморфізми, а J. Birman та D.R.J. Chillingworth [3], [4], в 1972 встановили зв'язок між групами гомеотопій неорієнтовної поверхні та її дволистного орієнтовного накриття.

Крім того J. Birman [2], [1] в 1969 знайшла зв'язок між групами гомеотопій поверхонь та групами кіс.

Далі було багато робіт, які уточнювали твірні та співвідношення в групах гомеотопій з додатковими обмеженнями: для поверхонь з межею, для груп гомеоморфізмів, що залишають нерухомими скінчене число точок на поверхні, для гомеоморфізмів, що тривіально діють на групі перших гомологій поверхні, див. [8], [7], [9].

**3. Функції Морса на компактних поверхнях та їх властивості**. Нехай $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — гладка функція. Точка $z = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ називається *критичною*, якщо в ній частинні похідні дорівнюють нулю: $f'_x(z) = f'_y(z) = 0$. В цьому випадку розклад функції $f$ в ряд Тейлора в околі точки матиме вигляд

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\big(A(x-x_0)^2 + 2B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2\big) + \cdots \qquad (1)$$

де числа $A, B, C$ — це другі частинні похідні $f$ в точці $z$. Критична точка $z$ називається *невиродженою*, якщо відповідна квадратична форма

$$Q(u,v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2$$

є невиродженою, тобто матриця

$$H(f,z) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(z) & f''_{xy}(z) \\ f''_{yx}(z) & f''_{yy}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

має ненульовий визначник.

Добре відомо, що лінійною заміною координат, кожна невироджена квадратична форма зводиться до одного з наступних виглядів

| | | |
|---|---|---|
| $u^2 + v^2$ | $u^2 - v^2$ | $-u^2 - v^2$ |
| мінімум | сідло | максимум |
| індекс 0 | індекс 1 | індекс 2 |

Число мінусів у цьому розкладі називається *індексом* квадратичної форми. Воно не залежить від конкретної лінійної заміни координат.

Згідно леми Морса, якщо, як і вище, $z$ — невироджена критична точка гладкої функції $f$, то в околі цієї точки існує (взагалі кажучи нелінійна) заміна координат, така, що в розклад (1) взагалі не містить членів порядків 3 і вище, тобто

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + Q(x - x_0, y - y_0).$$

Іншими словами, з точністю до постійного доданку, $f$ є «справжньою» квадратичною формою.

При цьому індекс квадратичної форми $Q$ також не залежить заміни координат і називається *індексом* невиродженої критичної точки

Гладка функція $f : M \to \mathbb{R}$ на гладкому многовиді $M$ називається *функцією Морса*, якщо

- $f$ приймає постійне значення на кожній компоненті зв'язності межі $\partial M$;
- всі критичні точки функції $f$ є невиродженими.

М. Морс довів, що множина всіх функцій Морса на *замкнутому* (компактному і без межі) многовиді є відкритою і всюди щільною підмножиною. Це означає, що довільну гладку функцію $f : M \to \mathbb{R}$ як завгодно малим збуренням можна зробити функцією Морса.

Нехай $f : M \to \mathbb{R}$ — функція Морса на компактній поверхні $M$. Позначимо через $c_0, c_1, c_2$ — кількості критичних точок $f$ кожного індексу. Таким чином, $c_0$ — це число локальних мінімумів, $c_1$ — число сідел, і $c_2$ — число максимумів $f$. Тоді має місце співвідношення, яке називається рівність Морса:

$$c_0 - c_1 + c_2 = \chi(M),$$

де $\chi(M)$ — *Ейлерова характеристика* поверхні $M$. Таким чином, кількості критичних точок функції Морса в кожному індексі дозволяють визначити топологічний тип поверхні $M$.

**4. Граф Кронрода-Ріба гладкої функції та його застосування до топологічної класифікації функцій Морса**. Нехай $f : M \to \mathbb{R}$ — функція Морса на компактній поверхні $M$. "Стиснемо" кожну компоненту зв'язності кожної множини рівня функції $f$ в точку. Отриманий простір матиме структуру скінченного графу, який називається графом Кронрода-Ріба функції $f$.

Цей граф несе інформацію про «топологічну структуру» функції, [15], [14]. Зокрема, якщо на кожному критичному рівні $f$ міститься рівно одна критична точка, то цей граф визначає $f$ з точністю до топологічної еквівалентності.

**5. Реалізація гладких функцій на поверхнях у вигляді функцій висоти**. Мова йтиме про результати O. Burlet та V. Haab [5], а також О. О. Кудрявцевої [16], про те, коли для гладкої функції $f : M \to \mathbb{R}$ на поверхні $M$ існує вкладення чи занурення $g : M \to \mathbf{R}^3$ такого вигляду: $g(m) = (x(m), y(m), f(m))$, $m \in M$, тобто функція $f$ є однією з координатних функцій. Загальний результат полягає в тому, що не кожна гладка функція (навіть функція Морса) реалізується вкладенням. З іншого боку, кожна функція Морса на *орієнтовній* поверхні та кожна гладка функція з ізольованими критичними точками на *неорієнтовній* поверхні реалізується зануренням.

**6. Компоненти зв'язності просторів функцій Морса на компактних поверхнях**. Компоненти зв'язності просторів функцій Морса $f : M \to \mathbb{R}$ на орієнтовних поверхнях незалежно описані H. Zieschang, С. В. Матвеєвим, В. В. Шарко [18]. Ці результати узагальнені О. О. Кудрявцевою [16] на деформації, що лишають нерухомими деякі набори критичних точок. Крім того С. І. Максименко [17] отримав класифікацію морсівських відображень в коло $f : M \to S^1$, а також ще одне незалежне доведення класифікації для функцій, [13]. В цій лекції буде доведено теорему класифікації компонент зв'язності, яке використовує твірні груп гомеотопій поверхонь.


[1] Joan S. Birman, *Mapping class groups and their relationship to braid groups*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 213–238. MR 0243519 (39 #4840)

[2] ______, *On braid groups*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 41–72. MR 0234447 (38 #2764)

[3] Joan S. Birman and D. R. J. Chillingworth, *On the homeotopy group of a non-orientable surface*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **71** (1972), 437–448. MR 0300288 (45 #9334)

[4] ______, *Erratum: "On the homeotopy group of a non-orientable surface" [Proc. Cambridge Philos. Soc.* **71** *(1972), 437–448]*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **136** (2004), no. 2, 441. MR 2040584 (2005d:57027)

[5] Oskar Burlet and Velcy Haab, *Réalisations de fonctions de Morse sur des surfaces, par des immersions et plongements dans l'espace* $\mathbf{R}^3$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **300** (1985), no. 12, 401–406. MR 794748

[6] M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Acta Mathematica **69** (1938), 135–206 (english).

[7] Sylvain Gervais, *Presentation and central extensions of mapping class groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 8, 3097–3132. MR 1327256 (96j:57016)

[8] Dennis L. Johnson, *Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology*, Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), no. 1, 119–125. MR 529227 (80h:57008)

[9] Mustafa Korkmaz, *Mapping class groups of nonorientable surfaces*, Geom. Dedicata **89** (2002), 109–133. MR 1890954 (2002k:57049)

[10] W. B. R. Lickorish, *Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **59** (1963), 307–317. MR MR0145498 (26 #3029)

[11] ______, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **60** (1964), 769–778. MR MR0171269 (30 #1500)

[12] ______, *On the homeomorphisms of a non-orientable surface*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **61** (1965), 61–64. MR MR0169221 (29 #6474)

[13] Sergey Maksymenko, *Path-components of Morse mappings spaces of surfaces*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), no. 3, 655–690. MR MR2165207 (2006f:57028)

[14] Georges Reeb, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Actualités Sci. Ind., no. 1183, Hermann & Cie., Paris, 1952, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, pp. 5–89, 155–156. MR MR0055692 (14,1113a)

[15] А. С Кронрод, *О функциях двух переменных*, Успехи мат. наук **5** (1950), no. 1(35), 24–134 (russian). MR MR0034826 (11,648c)

[16] Е. А. Кудрявцева, *Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты*, Мат. сборник **190** (1999), no. 3, 29–88 (russian). MR MR1700994 (2000f:57040)

[17] С. И. Максименко, *Компоненти пространств отображений Морса*, *Некоторые проблемы современой математики.* Праці Інституту математики НАН України **25** (1998), 135–153 (russian). MR 1744357 (2001a:57054)

[18] В. В. Шарко, *Функции на поверхностях, I*, *Некоторые проблемы современой математики.* Праці Інституту математики НАН України, vol. 25, Ин-т. математики НАН Украины, Киев, 1998, pp. 408–434 (russian). MR 1744373 (2001j:57042)

# Combinatorial embedding theory

**S. Melikhov**
Steklov Math. Institute (Moscow)
*melikhov@mi.ras.ru*

We will review some old and new results, examples and methods in combinatorial theory of embeddings. (The skype lecture will be in Russian, based on slides written in English.)

One of the first results in this subject was Kuratowski's graph planarity criterion, which says that a finite graph is embeddable in $\mathbb{R}^2$ (that is, is homeomorphic to a subset of the plane) if and only if it does not contain a subgraph homeomorphic to either $K_5$, the complete graph on five vertices, or $K_{3,3}$, the "utilities graph" (graf "domiki i kolodcy"). (This result was first published by Kazimierz Kuratowski when he worked in Lviv, and was also obtained independently around the same time by Lev Pontryagin in Moscow and by Orrin Frink and Paul A. Smith in New York.) I have long had very uneasy feelings about Kuratowski's theorem. Perhaps one reason is that when I first encountered it, in the form of a starred (non-obligatory) homework problem in the 9th grade, I failed to prove it despite some efforts. (One of my classmates, Yura Makarychev, did find a proof, which turned out to be remarkably short and has been published in J. Graph Theory.) But more importantly, I totally could not understand — what is so special about these two graphs, $K_5$ and $K_{3,3}$? Looking at the proofs of the theorem does not help with this question, because all known proofs are by exhaustion of cases.

Another interesting theme in combinatorial embedding theory emerged in the 1980s when John H. Conway (also known for the Conway knot polynomial, sporadic simple groups, the Game of Life, etc.) and Cameron Gordon (the 4-dimensional topologist), and independently Horst Sachs observed that every embedding of the complete graph $K_6$ in $\mathbb{R}^3$ links some pair of disjoint cycles of $K_6$. (Actually, at least one such pair must have an odd linking number.) One can express this by saying that $K_6$ is "intrinsically linked" or, in another terminology, that it admits no *linkless* embedding in $\mathbb{R}^3$. Sachs also conjectured that a graph admits a linkless embedding in $\mathbb{R}^3$ if and only if it has no minor among the 7 graphs known as the "Petersen family". These are precisely all the graphs that can be obtained from $K_6$ by the so-called $Y$-$\Delta$-transforms ("preobrazovanie treugol'nik-zvezda") which graph theory borrowed from the study of electric circuits. A *minor* of a graph $G$ is obtained from a subgraph of $G$ by "contracting" some of its edges. The conjecture of Sachs was proved in 1993 in an incredibly complex series of papers by Neil Robertson, Paul Seymour and Robin Thomas. But as their proof is also by exhaustion of cases, one cannot help wondering what is so special about these seven graphs?

To approach these questions, let us consider (regular) *cell complexes*, which are like simplicial complexes but built out not only of simplices but also other cells such as pentagons, octahedra, $n$-cubes, etc. (More precisely, they can be described as CW-complexes whose attaching maps are piecewise-linear embeddings.) Let us call a cell complex $K$ *dichotomial* if to each cell $C$ of $K$ there corresponds another cell of $K$ whose vertices are precisely all the vertices of $K$ that are not in $C$. (The empty set is not counted as a cell.) It turns out that all dichotomial complexes are homeomorphic to spheres (of various dimensions) [1], so we call them "dichotomial $n$-spheres".

**Theorem 1.** [1] *(a) There exist precisely two dichotomial* 3*-spheres; their* 1*-skeleta are the Kuratowski graphs* $K_5$ *and* $K_{3,3}$*.*

*(b) There exist precisely six dichotomial* 4*-spheres; their* 1*-skeleta are* 6 *out of the* 7 *graphs of the Petersen family.*

Around the time of Kuratowski's theorem (1930) people also realized that just like every graph "very easily" embeds in the three-dimensional space, every $n$-dimensional compact polyhedron (that is, a space triangulated by a simplicial complex whose simplices have dimensions $\leq n$) "easily" embeds in the $(2n+1)$-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^{2n+1}$. This is usually proved by picking some triangulation of the polyhedron, sending its vertices "randomly" into $\mathbb{R}^{2n+1}$ (or more precisely, in "general position": so that no three vertices lie on the same line, no four vertices lie in the same plane, and so on) and then mapping each simplex linearly. (Exercise: check that the resulting map is always injective.) It is a bit less trivial to explicitly describe a specific embedding. One well-known way to do it is based on the following fact: any number of points on the "moment curve" $\{(t, t^2, t^3, \dots, t^{2n+1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ is in general position. (Exercise: check this.) As a starter we will discuss another, purely combinatorial explicit construction, which does not seem to have been known until recently [2].

It did not take people long time to construct, for every $n$, an $n$-dimensional compact polyhedron that does not embed in $\mathbb{R}^{2n}$ (in early 1930s). This is actually very surprising, because both types of non-embedability proofs were highly nontrivial. The algebraic approach by Egbert van Kampen (who died of brain cancer when he was 33) was only made fully accurate thirty years later (Shapiro, Wu; see [3]). The geometric approach of A. Flores (who also soon ceased to publish) is in some way mind-blowing; it was fully accurate from the start, but it only started being understood in a coordinate-free way sixty years later (T. Bier et al.). Towards the end of the lecture we will review a fully combinatorial version of the Flores construction [1].

A major open problem in combinatorial embedding theory is that no higher-dimensional analogue of Kuratowski's theorem has been found so far, even in the simplest case of embedding $n$-dimensional polyhedra in $\mathbb{R}^{2n}$. In fact, the $n$-skeleta of dichotomial $(2n+1)$-spheres are in some sense "minimal" among $n$-dimensional cell complexes non-embeddable in $\mathbb{R}^{2n}$, and the $n$-skeleta of dichotomial $(2n+2)$-spheres are in some sense "minimal" among $n$-dimensional cell complexes that admit no linkless embeddings in $\mathbb{R}^{2n+1}$ [1]. (We will discuss these results in more detail.) However, it remains unknown whether there exist only finitely many dichotomial $m$-spheres for any fixed $m \geq 5$. A result of Sarkaria implies that only finitely many dichotomial $(2n+1)$-spheres have simplicial $n$-skeleta. In particular, only three dichotomial 5-spheres have simplicial 2-skeleta; however, there are at least 10 further ones with non-simplicial 2-skeleta [1]. Probably, there are many more of them (their 1-skeleta are in some way analogous to, though far from coinciding with, van der Holst's "Heawood family" of 78 graphs, which all have Colin de Verdiere's parameter $\mu = 6$), and it is a good research project for a student to construct at least some new ones.


[1] S. Melikhov, *Combinatorics of embeddings,* arXiv:1103.5457

[2] S. Melikhov, J. Zając, *Contractible polyhedra in products of trees and absolute retracts in products of dendrites,* Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 2519–2535; arXiv:1102.0696

[3] S. Melikhov, *The van Kampen obstruction and its relatives,* Proc. Steklov Inst. Math. **266** (2009), 142–176; arXiv:math.GT/0612082

# Діагоналі нарізно неперервних функцій та їх аналогів

**В. В. Михайлюк**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

*vmykhaylyuk@ukr.net*

Для відображення $f : X^2 \to Y$ функція $g : X \to Y$, $g(x) = f(x,x)$, називатимемо *діагоналлю відображення $f$.*

Дослідження діагоналей нарізно неперервних функцій $f : X^2 \to \mathbb{R}$ беруть свій початок з класичної праці Р. Бера [1], який показав, що діагоналі нарізно неперервних функцій двох дійсних змінних є, в точності, функціями першого класу Бера, тобто поточковими границями неперервних функцій.

Разом з тим, природно виникають аналогічні задачі про діагоналі відображень двох чи більшої кількості змінних, які відносно кожної змінної володіють властивостями, що є підсиленнями неперервності (ліпшицевістю, диференційовністю, тощо).

**Теорема 1.** *Нехай $X$ – топологічний простір і $g : X \to \mathbb{R}$. Тоді існує нарізно неперервне відображення $f : X^2 \to Z$ з діагоналлю $g$.*

**Питання** *Нехай $X$ і $Z$ – топологічні простори такі, що діагональ кожного нарізно неперервного відображення $f : X \times X \to \mathbb{R}$ є відображенням першого класу Бера. Чи обов'язково кожна нарізно неперервна функція $f : X \times X \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера за сукупністю змінних?*

Нехай $X$ і $Z$ – топологічні простори. Відображення $f : X \to Z$ називається *відображенням стабільного першого класу Бера*, якщо існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $f_n : X \to$ , яка поточково стабільно збігається до $f$, тобто для кожного $x \in X$ послідовність $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ стабільно збігається до $f(x)$. Сукупність усіх відображень стабільного першого класу Бера $f : X \to Z$ ми позначатимемо через $B_1^d(X,Z)$.

**Теорема 2.** *Нехай $X$ – нормований простір і $g : X \to \mathbb{R}$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

*(i) $g \in B_1^d(X,\mathbb{R})$;*

*(ii) існує відображення $f : X^2 \to \mathbb{R}$ з діагоналлю $g$, яке неперервне відносно першої змінної і ліпшицеве відносно другої змінної;*

*(iii) існує відображення $f : X^2 \to \mathbb{R}$ з діагоналлю $g$, яке неперервне відносно першої змінної і в кожній точці діагоналі $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ точково ліпшицеве відносно другої змінної.*

**Теорема 3.** *Нехай $X$ – метричний простір і $g : X \to \mathbb{R}$. Тоді наступні умови рівносильні:*

*(i) існує нарізно точково ліпшицеве відображення $f : X^2 \to \mathbb{R}$ з діагоналлю $g$;*

*(ii) існує відображення $f : X^2 \to \mathbb{R}$ з діагоналлю $g$, яке в кожній точці діагоналі $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ точково ліпшицеве відносно змінних $x$ і $y$;*

*(iii) $g$ є $\sigma$-ліпшицевим;*

*(iv) існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ точково ліпшицевих відображень $g_n : X \to \mathbb{R}$, яка стабільно поточково збігається до $g$.*

**Теорема 4.** *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$ – проміжок і $g : X \to \mathbb{R}$. Тоді наступні умови рівносильні:*

*$(i)$ існує нарізно абсолютно неперервне відображення $f : X^2 \to \mathbb{R}$ з діагоналлю $g$;*

*$(ii)$ існує відображення $f : X^2 \to \mathbb{R}$ з діагоналлю $g$, яке неперервне відносно першої змінної і в кожній точці діагоналі $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ має скінченну варіацію і неперервна відносно другої змінної;*

*$(iii)$ відображення $g$ абсолютного першого класу Бера.*


[1] Baire R.*Sur les fonctions de variables reélles* // Ann. Mat. Pura Appl., **3**, (1899), № 3, 1-123.

[2] Karlova O., Mykhaylyuk V., Sobchuk O. Diagonals of separately continuous functions and their analogs // Topology Appl. – 2013. – V. 160. – P. 1-8.

[3] Karlova O., Mykhaylyuk V., Sobchuk O.V. Diagonals of separately absolutely continuous mappings coincide with the sums of absolutely converges series of continuous functions, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2016),DOI:10.1017/s0013091515000103.

[4] Mykhaylyuk V., Sobchuk O. Diagonals of separately pointwise Lipschitz mappings // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – V. 196, №5. – P. 652-664.

# Discretized configuration spaces: algebraic and topological aspects

**L. P. Plachta**
AGH University of Science and Technology (Krakow) and IAPMM NASU (Lviv)
*dept25@gmail.com*

The purpose of the presented lectures is to introduce the postgraduate students into elementary theory of configuration spaces and discuss some combinatorial and topological problems arising in their studying. Configurations spaces arise naturally in the study of different mathematical objects that originate in the following fields of mathematics: embeddings of polyhedra in manifolds, arrangements of subspaces, knot and braid theory, discrete geometry, combinatorics *etc* (see, for example, [4, 5] for fundament and [6, 7] for applications of the theory).

In the present lecture, we emphasize mainly on configuration spaces that are related to some combinatorial objects (graphs, puzzles) and also appearing in robotics. We touch their topological properties and consider certain algebraic structures associated with them (the braid groups). We have restricted ourselves to several simple cases: the configuration spaces of generalized puzzles [8] leading to graph theoretical objets and the configuration space of $n$ hard discs of the same radii $r$ in the square or in the disc of a bigger radius. We supply our consideration with several examples.

For convenience, the material of the lectures is divided into three parts.

Part 1. Here we present a general conception of the configuration space $F(X, n)$ of the space $X$ and outline some topological properties of $F(X, n)$ in the classical case $X = \mathbf{R}^2$. For basic topological properties and the cohomological structure of $F(\mathbf{R}^2, n)$ see the fundamental paper [4].

Part 2. The configuration spaces $F$ connected with combinatorial objects (graphs and plane puzzles $P$, see [6, 8]). We will discuss the topological properties of $F$ in a few simple cases only and describe the braid group $B(P) = \pi_1(F)$ of the puzzle $P$ (see also [8]). We also consider the $k$-discretized configuration space of the standard $(n-1)$-dimensional simplex. For more information on this subject, see [2].

Part 3. The configuration space $F(n, r)$ of $n$ hard discs of radius $r < 1$ in the unit disc $D$ (or the configuration space $Conf(n, r)$ of $n$ hard discs of radius $r$ in the box). The study of these objects is now on the beginning stage. See, for example [1, 3, 6].

We supply our consideration with many questions and open problems.

[1] H.Alpert *Support of cohomology of disc configuration spaces*

[2] A.Abrams, D.Gay and V.Hower *Discretized configurations and partial partitions*, Proc. Amer. Math. Soc., **141**, 2013, pp.1093–1104.

[3] Yu.Baryshnikov, P.Bubenik, and M.Kahle, *On configuration spaces of hard spheres*: arXiv 1108.3061v2 [math AT], 2011.

[4] F.R.Cohen, Introduction to configuration spaces and their applications: In *Braids*, vol 19 of Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., pp. 183–261. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010

[5] E.Fadell and L.Neuwirth *Configuration Spaces*, Math. Scand. **10**, 1962, pp.111-118.

[6] Robert Ghrist. Configuration spaces, braids, and robotics. In *Braids*, vol. 19 of Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., pages 263–304. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2010.

[7] J.Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lecture on Topological Methods in Combinatorics and geometry*, Springer, 2003.

[8] R. M. Wilson, *Graph puzzles, homotopy, and Alternating group* J. Combin. Theory, ser. B **16**, 1974, pp.86–96.

# Топологія потоків на поверхнях з межею

**О. О. Пришляк**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

*prishlyak@yahoo.com*

*Векторне поле* на многовиді можна розглядати як переріз дотичного розшарування, тобто задання в кожній точці дотичного вектора. Їх часто задають покоординатно — набором функцій в кожній карті. Також, векторні поля можна розглядати як диференціювання алгебри гладких функцій на многовиді. *Траєкторія* поля — це крива, вектор швидкості якої в кожній точці збігається з вектором векторного поля в цій точці. На замкненому многовиді для кожного параметру $t$ можна побудувати дифеоморфізм многовида, що зсуває кожну точку за траєкторією на параметр $t$. *Потік* – це однопараметрична група дифеоморфізмів. На замкненому многовиді векторне поле породжує потік. На компактному многовиді з межею векторне поле породжує потік, якщо воно дотикається до межі. При цьому векторне поле буде полем швидкостей потоку.

Потоки (векторні поля) є *топологічно еквівалентними* (мають однакову структуру), якщо існує гомеоморфізм многовида, що відображає траекторії одного потока в траекторії іншого, зберігаючи напрямок руху за траєкторіями.

На замкнених поверхнях потоки Морса-Смейла утворюють відкриту скрізь щільну множину на множині всіх потоків. Крім того, ці потоки є структурно стійкими на многовидах довільної розмірності. Серед потоків, у яких множина неблукаючих точок складається зі скінченого числа траєкторій, структурно стійкими є лише потоки Морса-Смейла. Аналогічні результати мають місце і для многовидів з межею [2].

Векторне поле $X$ на гладкому многовиді $M$ з межею називається *полем Морса-Смейла*, воно задовольняє таким умовам: 1) множина неблукаючих точок $\Omega(X)$ складається із скінченого числа особливих точок і замкнених орбіт і всі вони гіперболічні; 2) стійкі та нестійкі многовиди двох елементів з $\Omega(X)$ перетинаються трансверсально на $\operatorname{Int} M$, а якщо для двох таких елементів існує точка нетрасверсального перетину на межі, то принаймі один з цих елементів є особливою точкою.

Потік, породжений векторним полем Морса-Смейла, будемо називати потоком Морса-Смейла.

**Прості потоки Морса-Смейла на двовимірному диску.** Потік Морса-Смейла на двовимірному диску будемо називати простим, якщо у нього всі особливості лежать на межі.

**Лема 1.** *Простий потік Морса-Смейла на двовимірному диску не містить замкнених траекторій.*

Всі нерухомі точки потоку на 2-диску поділяються три типа: 1) витоки, 2) стоки, 3) сідла. В подальшому для сідлових особливих точок будемо використовувати назви: 1) a-сідло для особливої точки, в яку входять дві траєкторії і з якої виходить одна (вона є стоком при обмеженні потоку на межу), 2) b-сідло для особливої точки, з якої виходять дві траєкторії і в яку входить одна (вона є витоком при обмеженні потоку на межу).

**Лема 2.** *Для простого потуку Морса-Смейла на двовимірному диску з $s$ нерухомими точками число сідел $l$ дорівнює*

$$l = (s-2)/2. \tag{1}$$

**Сепаратрисна діаграма.** *Сепаратрисою* називається траєкторія, що входить або виходить із сідла та не лежить на межі диска. *Сепаратрисною діаграмою* простої функції називається орієнтований граф, вершинами якого є нерухомі точки потоку, а ребрами — траєкторії межі та сепаратриси і такий, що орієнтація ребер відповідає напрямку руху за траєкторіями і на графі виділений цикл, що складається з траєкторій межі. Дві сепаратрисні діаграми називаються *еквівалентними*, якщо між їх графами існує ізоморфізм, що зберігає орієнтації ребер та відображає виділений цикл у виділений цикл. Ребра на виділеному циклі будемо називати граничними, а сепаратриси — внутрішніми. Отже, топологічна еквівалентність відображає граничні ребра на граничні ребра, а внутрішні – на внутрішні.

**Лема 3.** *Сепаратрисна діаграма має такі властивості:*

*1) Для кожної сепаратриси принаймні один з її кінців є вершиною валентності 3.*

*2) Число сепаратрис $l$ та число вершин $s$ пов'язані формулою (1).*

*3) Кожна сепаратриса розбиває виділенний цикл на дві частини (кінці сепаратриси належать кожній з цих частин) так, що в кожній з частин непарне число вершин; для кожної іншої сепаратриси обидва її кінці належать одній з двох частин.*

*4) Для кожної вершини, обидва інцидентні ребра з граничного циклу мають по відношенню до цієї вершини однаковий напрямок, тобто обидва входять в неї або обидва виходять з неї.*

*5) Якщо якійсь з вершин інцидентні більше ніж одна сепаратриса, то всі ці сепаратриси мають по відношенню до вершини напрямок такий, як і інцидентні їй граничні ребра (ця вершина є стоком або витоком).*

**Топологічна еквівалентність потоків.**

**Теорема 1.** *(Критерій топологічної еквівалентності). Два простих потоки на 2-диску будуть топологічно еквівалентними тоді та тільки тоді, коли їх сепаратрисні діаграми ізоморфні.*

**Теорема 2.** *(Реалізації). Орієнтований граф з виділеним циклом є сепаратрисною діаграмою деякої простої функції, якщо він задовольняє властивостям 1)-5) з леми 3.*

**Код потоку.** Задамо циклічну нумерацію вершин. Вершиною з першим номером виберемо одну з вершин з найбільшою валентністю (якщо всі вершини мають валентність 3, то стік або витік). Складемо список, що починається з 1, а далі за зростанням номери сідел, що є кінцями сепаратрис, інцидентних вершині 1. Наприклад, 1-3-5. Далі, для вершини з найменшим номером, що не є сідлом, складемо аналогічний список, наприклад 8-6. Продовжимо цю процедуру для інших вершин. Отримаємо, набір списків. Якщо вершина 1 є стоком, то їй припишемо знак $+$, якщо витоком, то знак $-$. Будемо казати, що один такий набір менший за інший, якщо в ньому декілька перших елементів такі самі, як у другого набору, а наступний — менший. Якщо всі елементи рівні, але знаки при одиниці різні, то найменшим будемо вважати набір зі знаком $-$ . Кодом потоку будемо називати набір списків зі знаком біля 1, який найменший серед усіх можливих наборів списків, побудованих так, як було описано вище. Приклад коду: $+$1-3-5, 8-6.

**Теорема 3.** *Два потоки топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли у них однакові коди.*

Якщо у потоку немає сепаратрис, то він має дві особливих точки — стік і витік. Для потоків з однією сепаратрисою можливі два коди: –1-3 та +1-3. Для потоків з двома сепаратрисами можливі чотири коди: 1) –1-3-5; 2) +1-3-5; 3) –1-3, 4-6; 4) –1-3, 6-4. Перші два коди відрізняються тільки знаком. Тому будемо записувати їх як $\pm 1-3-5$, наступні два порядком — записуємо $-1-3, \pm 4-6$. Для потоків з трьома сепаратрисами можливі чотирнадцять кодів: 1,2) $\pm 1-3-5-7$; 3,4) $\pm 1-3-7, 4-6$; 5-8) $\pm 1-3-5, \pm 4-6$; 9-12) $\pm 1-3, 4-8, \pm 5-7$; 13-14) $\pm 1-3, 7-5, 8-4$. З чотирма сепаратрисами можливі 35 потоків, а з п'ятьма сепаратрисами — 190 різних потоків.

**Оптимальні потоки на поверхнях з межею.** Потік без замкнених траєкторій з особливостями на межі поверхні називається *оптимальним*, якщо він має найменше число нерухомих точок серед усіх таких потоків на цій поверхні.

**Теорема 4.** *Потік на зв'язній компактній поверхні зі зв'язною межею, що не гомеоморфна листу Мьобіуса, буде оптимальним тоді і тільки тоді, коли він містить лише одну нерухому точку.*

Зауважимо, що на листі Мьобіуса існують потоки без нерухомих точок. Наприклад, якщо лист Мьобіуса отримано з квадрату $[0,1]\times[0,1]$ склеюванням точок $(0,t)$ з точками $(0,1-t)$, $t\in[0,1]$, то потік породжений полем $X=\{1,0\}$ не матиме нерухомих точок.

Сепаратриси розбивають досить малий окіл нерухомої точки на частини, які будемо називати кутами. Можливі три типи кутів:

*Гіперболічний кут.* В ньому кожна траєкторія перетинається з цим кутом по обмеженому значенню параметра, тобто нерухома точка не є граничною точкою для частини траєкторії, що лежить в куті. По-іншому можна сказати, що кожна траєкторія перетинається з межею малого околу у куті у двох точках.

*Еліптичний кут.* В цьому куті для довільного околу нерухомої точку існують траєкторії, що повністю лежать в цьому околі і куті.

*Параболічний кут.* В ньому кожна траєкторія перетинається з межею довільного малого околу в одній точці. Нерухома точка є граничною точкою кожної траєкторії. У кутів параболічного типу можливі два випадки:

1) всі траєкторії починаються в нерухомій точці — *кут-витік*,

2) всі траєкторії закінчуються в нерухомій точці —*кут-стік.*

З означення сепаратриси випливає, що інших кутів не існує.

**Лема 4.** *Всі сепаратриси розбивають поверхню на області в кожній з яких буде єдиний кут-стік і єдиний кут-витік або єдиний параболічний кут, а решта кутів є гіперболічними.*

Траєкторію, що лежить на межі також будемо вважати сепаратрисою і називати граничною сепаратрисою.

**Повний структурний інваріант потоку.** *Розрізняючим графом* потоку будемо називати орієнтований граф $G$, що є двоїстим графом до множини сепаратрис та межі поверхні, в якому для кожної вершини задано циклічний порядок інцидентних до неї ребер і зафіксовано початкову вершину.

**Лема 5.** *Розрізняючий граф має такі властивості:*

*1) Ребро, яке інциндентне до початкової вершини, орієнтовано так, що воно виходить з цієї вершини.*

*2) Для кожної вершини множину всіх інцидентних ребер можна розбити не більше ніж на дві групи, так що ребра в кожній з груп або всі входять в цю вершину, або всі виходять з неї і так, що існує ребро, що при циклічному обході ребер, починаючи з цього ребра, спочатку ідуть всі ребра однієї групи, а потім всі ребра іншої.*

*3) Існує шлях, який починається і закінчується в початковій вершині, в якому кожні два послідовні ребра є також послідовними ребрами в циклічному порядку в їх спільній вершині і кожне ребро в цьому шляху зустрічається 2 рази. Це означає, що якщо вийти з початкової вершини і в кожній вершині змінювати напрямок руху згідно циклічного порядку ребер в цій вершині, то прийдемо в початкову вершину, обійшовши всі ребра два рази (один раз за орієнтацією і один раз проти).*

**Теорема 5.** *Два оптимальні потоки топологічно еквівалентні тоді та тільки тоді, коли їх розрізняючи графи ізоморфні.*

**Теорема 6.** *Орієнтований граф, з заданими циклічними порядками ребер для кожної вершини і заданою початковою вершиною буде розрізняючим графом деякого потоку, якщо він задовольняє властивостям 1) — 3) з леми.*


[1] J. Palis and S. Smale: Structural stability theorems, Proc. Sympos. Pure Math. 14 (1970), 223-231.

[2] R.Labarca, M.J.Pacifico. Stability of Morse-Smale vector fields on manifolds with boundary. Topology Vol. 29. No. 1, 1990. pp. 57-81.

[3] C.Robinson. Structural Stability on Manifolds with Boundary. Journal of Differential Equations, 1980, 37 (1), p.1-11

[4] P.B.Percell. Structural Stability on Manifolds with boundary. Topology Vol. 12, 1973. pp. 123-144.

[5] М.В. Лосева, А.О.Пришляк. О структурно устойчивых обыкновенных дифференциальных уравнениях на поверхностях с краем. Журнал обчисл. та приклад. математики. No.1(87), 2002.-с.45-48

# Колчани, алгебри та спряжені функтори

**К. Юсенко**
Інститут Математики та Статистики, Університет Сан Пауло, Сан Пауло, Бразилія
*iusenko@ime.usp.br*

# Про лекції

Ціллю даного курсу лекцій є первинне знайомство читача з базовими поняттями теорії категорій та теорій зображень скінченновимірних алгебр. Ми вивчаємо концепцію спряжених функторів, а також демонструємо, що конструкцію "колчан" $\leftrightarrows$ "алгебра" можна інтерпретувати як пару спряжених функторів між певними категоріями.

Лекції майже не містять доведень, теоретичні викладки супроводжуються прикладами, а іноді вводяться у вигляді вправ. Для більш глибокого знайомства з теорією категорій та теорією зображень скінченновимірних алгебр ми рекомендуємо (зацікавленому читачеві) звернутися до посібників/онлайн-ресурсів, вказаних після Лекції 2 та Лекції 3.

# 1 Що таке категорії та функтори?

"Perhaps the purpose of categorical algebra is to show that which is trivial is trivially trivial"
— Peter Freyd

## 1.1 Категорії

Більшість математичних теорій мають справу з ситуаціями, коли наявні певні відображення між об'єктами певної природи. Множина об'єктів сама по собі "статична", а розгляд відображень між об'єктами привносить "динаміку". Зазвичай накладаються природні обмеження на вид відображень між об'єктами: наприклад, дуже рідко має сенс розглядати усі можливі відображення між групами, натомість часто обмежуються вивченням лише гомоморфізмів груп.

Концепція *категорії* була введена Самуелем Ейленбергом та Саундерсом МакЛейном як інструмент одночасного дослідження і об'єктів, і відображень між ними (які називаються *морфізмами*). Вищезгадана концепція є абстрактною, проте дуже зручною. Перед тим, як дати строгі визначення, ми розглянемо декілька простих прикладів.

**Приклад 1.**

- Категорія **Sets**: об'єкти – множини, а морфізми – довільні функції між множинами;
- **Groups**: об'єкти – групи, морфізми – гомоморфізми груп;
- **AbGroups**: об'єкти – комутативні групи, морфізми – гомоморфізми груп;
- **Rings**: об'єкти – кільця, морфізми – гомоморфізми кілець;

- $\mathbf{Alg}_k$: об'єкти – алгебри над $k$, морфізми – гомоморфізми алгебр;
- **Top**: об'єкти – топологічні простори, морфізми – неперервні функції;
- **Mflds**: об'єкти – гладкі многовиди, морфізми – диференційовні відображення між многовидами;
- $\mathbf{Vect}_k$: об'єкти – векторні простори над $k$, морфізми – лінійні оператори.

Варто зазначити, що в усіх цих прикладах ми можемо формувати композицію морфізмів, і ця композиція є асоціативною (оскільки в усіх прикладах морфізми — це функції між множинами з певними обмеженнями, а композиція функцій асоціативна). Насправді, асоціативність — це єдина аксіома, необхідна для визначення категорії:

**Означення 1.** **Категорія** $\mathcal{C}$ складається з наступного:

- Класу об'єктів $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$. Ситуацію "$X$ об'єкт в $\mathcal{C}$" записуємо $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ або $X \in \mathcal{C}$;
- Класу морфізмів $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$. Кожен морфізм $f$ – це певне відображення *від* $X \in \mathcal{C}$ *до* $Y \in \mathcal{C}$. Формально $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ – це диз'юнктивне об'єднання класів $\mathbf{Mor}(X, Y)$ по усім можливим $X, Y \in \mathcal{C}$. Позначимо морфізм $f$ стрілкою $X \xrightarrow{f} Y$. Будемо також позначати морфізми між $X$ та $Y$ як $\mathcal{C}(X, Y)$;
- Правила композиції морфізмів
$$\mathbf{Mor}(X,Y) \times \mathbf{Mor}(Y,Z) \to \mathbf{Mor}(X,Z),$$
$$(f,g) \mapsto fg,$$
яке переводить два морфізми $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{f} Z$ в морфізм $X \xrightarrow{fg} Z$;
- Для кожного $X \in \mathcal{C}$ існує тотожній морфізм $X \to X$.

Задана структура повинна задовольняти наступним аксіомам:

- Композиція морфізмів асоціативна;
- Композиція довільного морфізму $f : X \to Y$ з тотожнім рівна $f$.

## 1.2 Функтори

Розглядаючи декілька категорій одночасно, функтори дозволяють "поєднувати" їх.

**Означення 2.** **Коваріантний** (відповідно **контраваріантний**) **функтор** $F$ з категорії $\mathcal{C}$ в категорію $\mathcal{D}$ — це правило, за яким довільному об'єкту $X \in \mathcal{C}$ ставиться у відповідність об'єкт $F(X) \in \mathcal{D}$, а довільному морфізму $f : X \to Y$ ставиться у відповідність морфізм $F(f) : F(X) \to F(Y)$ (відповідно $F(f) : F(Y) \to F(X)$) такий, що виконуються наступні аксіоми:

- $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ для довільного $X \in \mathcal{C}$;
- $F$ зберігає композицію між морфізмами, тобто для довільних $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ маємо $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ (якщо $F$ коваріантний) та $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ (якщо $F$ контраваріантний).

**Приклад 2.**

- **Включення підкатегорії.** Нехай $\mathcal{C}$ підкатегорія категорії $\mathcal{D}$. Це означає, що об'єкти та морфізми в $\mathcal{C}$ також є об'єктами та морфізмами в $\mathcal{D}$, які мають додаткову структуру та задовольняють певним обмеженням на цю структуру. Кожне включення задає функтор $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$, що діє тотожно на об'єктах та морфізмах. Наприклад, маємо функтор
$$\mathbf{AbGroups} \hookrightarrow \mathbf{Groups}.$$

- **Забуваючий функтор.** Визначимо функтор $F : \mathbf{Groups} \to \mathbf{Set}$, який переводить довільну групу у відповідну множину, на якій задана групова структура, а довільний гомоморфізм між групами в функцію між відповідними множинами. Функтор "забуває" групову структуру (об'єктів та морфізмів). Аналогічно маємо забуваючий функтор $\mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Sets}$, який переводить довільний векторний простір в множину усіх його векторів, а довільне лінійне відображення між просторами у відповідну функцію на множинах векторів. Фактично ми забуваємо, що можемо додавати вектори, множити їх на скаляри, а також те, що лінійні відображення є лінійними. Подібним способом можна визначити забуваючі функтори: $\mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Set}$, $\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$, $\mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$,..., $\mathbf{Alg}_k \to \mathbf{AbGroup}$ (функтор, що забуває множення).

- **Вільний функтор:** Для довільної множини $X$ визначимо $F(X)$ як вільну групу, породжену множиною $A$. Довільна функція $f : X \to Y$, яка переводить $x \in X$ в $f(x) \in Y$, визначає гомоморфізм груп $F(f) : F(X) \to F(Y)$. Легко переконатися, що для такого співставлення $F(fg) = F(f)F(g)$, а отже, воно задає функтор $F : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Groups}$. Аналогічно можна визначити інші "вільні" функтори: $\mathbf{Sets} \to \mathbf{Vect}_k$, $\mathbf{Sets} \to \mathbf{Ring}$,..., $\mathbf{Sets} \to \mathbf{Top}$ (множина $X$ наділяється дискретною топологією), та багато інших.

- **Функтор Булеан**. Визначимо функтор $\mathcal{P} : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Sets}$, задаючи $\mathcal{P}[X]$ як множину усіх підмножин множини $X$. Тепер, якщо $f : X \to Y$ функція між множинами, а $U \subset X$, визначимо $\mathcal{P}[f](U)$ як образ $U$ під дією $f$.

- Розглянемо приклад контраваріантного функтора: функтор дуальності
$$\mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Vect}_k,$$
який переводить довільний векторний простір $V$ у векторний простір $V^*$ усіх лінійних функціоналів в $V$. Лінійний оператор $L : U \to V$ переводиться в спряжений оператор $L^* : V^* \to U^*$ (що переводить довільний лінійний функціонал $\varphi \in V^*$ в лінійний функціонал $u \mapsto \varphi(L(u))$ на $U$).

- Інший приклад контраваріантного функтора — це функтор $\mathbf{Top} \to \mathbf{Rings}$, який кожному топологічному простору $X$ ставить у відповідність кільце неперервних функцій $C^0(X, \mathbb{R})$, а довільному неперервному відображенню $f : X \to Y$ ставиться у відповідність так зване пулбек (pull-back) відображення $f^* : C^0(Y, \mathbb{R}) \to C^0(X, \mathbb{R})$ (адже композиція функції на $Y$ з відображенням $f$ задає функцію на $X$).

## 1.3 Еквівалентність категорій

Коли дві категорії $\mathcal{C}$ та $\mathcal{D}$ називаються еквівалентними? Природньо сказати, що $\mathcal{C}$ та $\mathcal{D}$ ізоморфні, якщо існують функтори $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ та $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ такі, що є оберненими один до одного. Насправді, таке визначення досить вузьке, пояснимо на прикладі чому:

**Приклад 3.** Нехай $\mathcal{D}$ категорія скінченновимірних векторних просторів над $k$, а $\mathcal{C}$ її підкатегорія, що містить один векторний простір $k^n$ (векторів стовпчиків) для кожної розмірності $n$. Відмітимо, що $\mathbf{Mor}(k^n, k^m)$ можна ототожнити з матрицями $\mathrm{Mat}_{m,n}$ природнім чином. Категорії $\mathcal{C}$ та $\mathcal{D}$ не ізоморфні, оскільки $\mathcal{D}$ містить усі можливі векторні простори. Проте довільний $n$-вимірний векторний простір $V$ ізоморфний $k^n$ (після вибору базису), отже категорії $\mathcal{C}$ в певному сенсі достатньо, і ми можемо розглядати $\mathcal{C}$ та $\mathcal{D}$ як еквівалентні категорії.

Для формалізації останнього прикладу розглянемо наступне означення.

**Означення 3.** Коваріантний функтор $F : \mathcal{C} \to D$ називається **еквівалентністю категорій**, якщо

- $F$ **суттєво сюр'єктивний**, тобто довільний об'єкт в $\mathcal{D}$ ізоморфний (проте не обов'язково рівний!) об'єктові вигляду $F(X)$ для певного $X \in \mathcal{C}$.
- $F$ **повний** та **точний**, тобто існує бієкція

$$\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \mathbf{Mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

  для довільних $X, Y \in \mathcal{C}$.

Розглянемо категорії з Прикладу 3. Переконаймося, що функтор вкладення категорій $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — це функтор еквівалентності категорій. Справді, якщо $V$ — довільний $n$-вимірний простір, то $V$ — ізоморфний $k^n$. Фіксуючи базис $e_1, \ldots, e_n$, ми отримуємо ізоморфізм $V \to k^n$, який переводить довільний вектор $v \in V$ в стовпчик координат $v$ в базисі $\{e_i\}$, а отже $F$ суттєво сюр'єктивний. Легко переконатися, що $F$ також повний і точний, тому $F$ — це еквівалентність категорій.

## 1.4 Вправи

**Вправа 1.** Нехай $\mathcal{C}$ довільна категорія. Покажіть наступне:

a) тотожній морфізм $id_X : X \to X$ єдиний для кожного об'єкта $X \in \mathcal{C}$;

b) довільний ізоморфізм в $\mathcal{C}$ має єдиний зворотній;

c) нехай $f : X \to Y$ та $f : Y \to Z$ два морфізми. Покажіть, що, якщо два з морфізмів $f, g$ та $f \circ g$ ізоморфізми, то третій також ізоморфізм. (Така властивість називається "два-з-трьох").

**Вправа 2.** Нехай $I$ довільна частково впорядкована множина (посет), в якій частковий порядок задається відношенням $\preceq$. Пов'яжемо з $I$ категорію $\mathcal{C}_I$, в якій об'єкти — це елементи множини $I$, а для двох довільних $i, j \in I$, $\mathbf{Mor}(i, j)$ — порожня множина, якщо $i \npreceq j$ та має один елемент, якщо $i \preceq j$. Використовуючи рефлексивність та транзитивність відношення $\preceq$, визначте композицію морфізмів в $\mathcal{C}_I$ та покажіть, що описана конструкція справді визначає категорію $\mathcal{C}_I$.

**Вправа 3.** Нехай $I$ та $J$ два посети. Покажіть, що довільний функтор між категоріями $\mathcal{C}_I$ та $\mathcal{C}_J$ задається гомоморфізмом (тобто функцією, що зберігає порядок) посетів $f : I \to J$.

**Вправа 4.** Нехай $X$ довільний топологічний простір, а $I(X)$ — це множина усіх замкнених підмножин в $X$. Покажіть, що $I(X)$ — це посет (з відношенням порядку включення підмножин). Визначте категорію $\mathbf{Top}(X)$ як $\mathcal{C}_{I(X)}$ з Вправи 2.

**Вправа 5.** Нехай $V$ векторний простір над $\mathbb{R}$. Покажіть, що процедура комплексифікації $V \mapsto V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ визначає функтор $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$.

**Вправа 6.** Нехай $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ довільні категорії, а $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ функтор. Покажіть наступне:

a) $F$ переводить ізоморфізми в ізоморфізми;

b) якщо $F$ повний і точний, а $F(f) : F(X) \to F(Y)$ ізоморфізм в $\mathcal{D}$, то $f : X \to Y$ ізоморфізм $\mathcal{C}$.

**Вправа 7.** Нехай $G$ довільна група, а $[G, G]$ її комутатор. Покажіть, що $G/[G, G]$ абелева група, а співставлення $G \mapsto G/[G, G]$ визначає функтор $Ab : \mathbf{Group} \to \mathbf{AbGroup}$.

**Вправа 8.** Визначимо $\mathbf{Top}_*$ як категорію, об'єктами якої є пари $(X, x_0)$, $X$ — топологічний простір, $x_0 \in X$ виділена точка, а морфізми $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ неперервні відображення $f : X \to Y$ такі, що $f(x_0) = y_0$. Переконайтесь, що $\mathbf{Top}_*$ це категорія, а співвідношення $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Group}$, яке з парою $(X, x_0)$ пов'язує фундаментальну групу $\pi_1(X, x_0)$, задає коваріантний функтор.

**Вправа 9.** Визначимо **CHaus** як категорію, об'єктами якої є компактні Гаусдорфові простори, а морфізми — неперервні відображення. Та визначимо відображення $\beta : \mathbf{Top} \to \mathbf{CHaus}$, яке довільному топологічному простору $X$ ставить у відповідність компактифікацію Стоуна –Чеха $\beta X$ ("максимальний" компактний Гаусдорфів простір, "породжений" $X$). Покажіть, що $\beta$ визначає функтор.

**Вправа 10.** Нехай $R, S$ кільця (не обовязково комутативні). Розглянемо категорії правих модулів над цими кільцями $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}_R$ та $\mathcal{D} = \mathrm{Mod}_S$ (де морфізми — це гомоморфізми модулів). Покажіть, що фіксуючи $(R, S)$-бімодуль $X$, можна визначити два функтори $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ та $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ наступним чином:

$$\begin{aligned} F(Y) &= Y \otimes_R X, \qquad Y \in \mathcal{D}, \\ G(Z) &= \mathrm{Hom}_S(X, Z), \qquad Z \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

# 2 Спряження між функторами

## 2.1 Натуральні трансформації

> "I did not invent category theory to talk about functors. I invented it to talk about natural transformations."
>
> — Saunders Mac Lane

Що таке натуральна трансформація? Це відображення одного функтора в інший! Розглянемо простий приклад, який пояснює це доволі загальне визначення. Нагадаємо, що для довільного векторного простору $V$ існує ("натуральне") лінійне відображення

$$\begin{aligned}\phi_V : & V \to V^{**} \\ & v \mapsto (f \mapsto f(v)).\end{aligned}$$

Якщо $\dim V < \infty$, то неважко переконатися, що $\phi_V$ ізоморфізм. У чому полягає натуральність відображення $\phi_V$? Насправді, якщо $\dim V < \infty$, то простори $V$ та $V^*$ ізоморфні, проте не існує канонічного ізоморфізму без вибору базису в просторі $V$. З іншого боку, ізоморфізм $\phi_V$ не потребує ніякого додаткового вибору. Щоб формалізувати цю конструкцію, розглянемо більше детально властивості відображення $\phi_V$. Довільне лінійне відображення $L : U \to V$ породжує лінійне відображення $L^{**} : U^{**} \to V^{**}$, яке разом з відображеннями $\phi_U, \phi_V$ породжує наступну діаграму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "L"'] & U^{**} \arrow[d, "L^{**}"] \\ V \arrow[r, "\phi_V"] & V^{**} \end{tikzcd}$$

Апріорі немає причин, щоб стверджувати, що діаграма комутативна (якщо $\phi_U$ — довільне лінійне відображення, то очевидно, що діаграма не є комутативною). Проте діаграма насправді є комутативною! Покажемо це. Нехай $u \in U$, перевіримо що

$$\phi_V(L(u)) = L^{**}(\phi_U(u)). \tag{1}$$

Функціонал в лівій частині співвідношення (1) довільному лінійному функціоналу $f \in V^*$ ставить у відповідність значення $f(L(u))$. Тоді як функціонал з правої частини переводить довільний лінійний функціонал $f \in V^*$ в

$$\phi_U(u)(L^*(f)) = L^*(f)(u) = f(L(u)).$$

Рекомендуємо читачеві проаналізувати самостійно ці перетворення.

**Означення 4.** Нехай $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — два коваріантних функтори. **Натуральна трансформація** $\alpha : F \to G$ між ними — це правило, за яким з кожним об'єктом $X \in \mathcal{C}$ асоціюється морфізм $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ такий, що для довільно морфізму $f : X_1 \to X_2$ в $\mathcal{C}$ наступна діаграма комутує

$$\begin{tikzcd} F(X_1) \arrow[r, "\alpha_{X_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X_1) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(X_2) \arrow[r, "\alpha_{X_2}"] & G(X_2) \end{tikzcd}$$

Якщо $\alpha_X$ — ізоморфізм для довільного об'єкту $X$, то $\alpha$ називається **натуральним ізоморфізмом**.

Проаналізуємо попередній приклад в контексті цього означення. Розглянемо $\mathbf{Vect}_k$ — категорію векторних просторів над полем $k$, та два функтори: $\mathrm{Id} : \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Vect}_k$ (тотожній), та $D : \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Vect}_k$ (подвійна дуальність), який переводить довільний векторний простір $V$ в його подвійний дуальний $V^{**}$, а довільний морфізм $L : U \to V$ в $L^{**} : U^{**} \to V^{**}$.

**Вправа 11.** Покажіть, що $U \to \phi_U$ задає натуральну трансформацію між функторами Id та $D$, а розглядаючи підкатегорію $\mathbf{FVect}_k \subset \mathbf{Vect}_k$ скінченновимірних векторних просторів $U \to \phi_U$ задає натуральний ізоморфізм між відповідними звуженнями функторів.

## 2.2 Спряжені функтори

Нагадаємо, що між категоріями **Sets** та $\mathbf{Vect}_k$ є два функтори: вільний $F : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Vect}_k$ та забуваючий $G : \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Sets}$. $G(V)$ — це множина усіх векторів для заданого векторного простору $V$, а $F(X)$ — це векторний простір над полем $k$ з базисом $X$ для заданої множини $X$ (тобто $F(X)$ — це усі формальні лінійні комбінації $\sum_i \lambda_i x_i$ з $\lambda_i \in k$ та $x_i \in X$, наділені очевидними операціями між векторами). Довільна функція $g : X \to G(V)$ однозначно продовжується до лінійного оператора $f : F(X) \to V$ (оператор $f$ задається наступним чином $f(\sum_i \lambda_i x_i) = \sum_i \lambda_i g(x_i)$). Така відповідність $\eta : g \mapsto f$ має обернену відповідність $\mu : f \mapsto f \restriction X$ (яка довільному лінійному операторові $f : F(X) \to V$ ставить у відповідність $f \restriction X : X \to G(V)$, звужуючи $f$ на базис $X$). Таким чином, $\eta = \eta_{X,V}$ визначає біекцію

$$\eta : \mathbf{Sets}(X, G(V)) \cong \mathbf{Vect}_k(F(X), V) \tag{2}$$

Більш того, ця біекція визначена “канонічним” чином для усіх множин $X$ та векторних просторів $V$, тобто покомпонентно $\eta_{X,V}$ задає натуральну трансформацію функторів, якщо частини співвідношення (2) розглядати як функтори від змінних $X$ та $V$. Більш детальну інтерпретацію ми дамо у визначенні *спряження*.

**Означення 5.** Нехай задано два функтори $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ та $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. **Спряження** між $F$ та $G$ — це задання для довільної пари $(A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D})$ біекції $\eta_{A,B}$ між множинами морфізмів $\mathcal{C}(A, G(B))$ та $\mathcal{D}(F(A), B)$, які натуральні по $A$ та по $B$. В цьому випадку функтор $F$ називається **лівим спряженим** до $G$, а функтор $G$ називається **правим спряженим** до $F$.

Нескладно переконатися, що натуральність біекції $\eta$ означає, що для усіх $f : A \to A'$ та $g : B \to B'$ наступні діаграми комутують

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(A, G(B)) \arrow[r, "\eta_{A,B}"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathcal{D}(F(A), B) \arrow[d, "(F(f))^*"] \\
\mathcal{C}(A', G(B)) \arrow[r, "\eta_{A',B}"'] & \mathcal{D}(F(A'), B)
\end{tikzcd},$$

та

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(A, G(B)) \arrow[r, "\eta_{A,B}"] \arrow[d, "(G(g))_*"'] & \mathcal{D}(F(A), B) \arrow[d, "g_*"] \\
\mathcal{C}(A, G(B')) \arrow[r, "\eta_{A,B'}"'] & \mathcal{D}(F(A), B')
\end{tikzcd}.$$

В діаграмах ми використали короткі позначення $g^* = \mathcal{D}(F(A), g)$ (операція композиції з морфізмом $g$), а $f^* = \mathcal{C}(f, G(B))$ (операція перед-композиції з морфізмом $f$).

**Зауваження 1.** Назва "спряжений функтор" виникла як певне узагальнення поняття "спряжений оператор". Справді, розглянемо множину морфізмів як біфунктор

$$\mathbf{Mor} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Sets}$$

та порівняємо визначення спряженого функтора з визначенням спряженого оператора в комплексному векторному просторі $V$ зі скалярним добутком

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^c \times V \to \mathbb{C},$$

де $V^c$ позначає векторний простір, в якому дія поля $\mathbb{C}$ перед-композиційована з комплексним спряженням.

**Приклад 4.**

a) Пари функторів "вільний-забуваючий" — це типовий приклад спряження між функторами. Вільний функтор — лівий спряжений до забуваючого, а забуваючий — правий спряжений. Один з прикладів ми розглядали на початку цього розділу. Подібний приклад: вільний функтор $F : \mathbf{Sets} \to \mathbf{Groups}$ — лівий спряжений до забуваючого функтора $G : \mathbf{Group} \to \mathbf{Sets}$. Справді, довільний гомоморфізм груп $F(X) \to U$ однозначно та натурально (перевірте!) задається функцією $X \to G(U)$. Аналогічно можна будувати приклади спряжених функторів для вільних кілець, вільних $R$-модулів і таке інше.

b) Забуваючий функтор $G : \mathbf{Top} \to \mathbf{Sets}$ має і лівий і правий спряжені функтори. Лівий спряжений функтор $L$ наділяє множину $X$ дискретною топологією, оскільки усі відображення $L(X) \to Y$ неперервні (для довільного $Y \in \mathbf{Top}$). А правий спряжений функтор $R$ наділяє $X$ тривіальною топологією.

c) Нехай $I$ та $J$ два посети. Довільний функтор $F : \mathcal{C}_I \to \mathcal{C}_J$ — це функція, що зберігає порядок (див. Вправа 3). Тоді пара спряжених функторів $F : \mathcal{C}_I \to \mathcal{C}_J$, $G : \mathcal{C}_J \to \mathcal{C}_I$ — це пара функцій, які зберігають порядок, та задовольняють

$$\mathcal{C}_I(F(a), b) \cong \mathcal{C}_J(a, G(b))$$

для усіх $a \in I$ та $b \in J$. З іншого боку, це означає, що

$$F(a) \preceq_J b \Leftrightarrow a \preceq_I G(b).$$

Останні відношення називається відповідністю Галуа між посетами (див. вправи в кінці розділу для конкретних прикладів такої відповідності).

d) Функтор $Ab$ : **Group** $\to$ **AbGroup** (див. Вправу 7) лівий спряжений до функтора вкладення $G$ : **AbGroup** $\to$ **Group**.

f) Функтор компактифікації Стоуна-Чеха $\beta$ : **Top** $\to$ **CHaus** є лівим спряженим до функтора вкладення категорій **CHaus** $\hookrightarrow$ **Top**.

g) **Tensor-Hom спряження.** Нехай $U, V, W$ три векторні простори. Стандартний факт лінійної алгебри говорить, що існує ізоморфізм

$$\mathrm{Hom}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)),$$

де $\mathrm{Hom}(\cdot, \cdot)$ позначає векторний простір усіх лінійних операторів. Подібне співвідношення (ізоморфізм абелевих груп) вірне і для модулів над кільцями (див. Вправу 10):

$$\mathrm{Hom}_S(Y \otimes_R X, Z) \cong \mathrm{Hom}_R(Y, \mathrm{Hom}_S(X, Z)).$$

А отже функтор $-\otimes_R X$ (див. Вправу 10) — лівий спряжений до функтора $\mathrm{Hom}_S(X, -)$.

Справедлива наступна теорема.

**Теорема 1.** *Задання спряження між двома функторами $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ та $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ еквівалентне заданню натуральних трансформацій $\eta : Id_{\mathcal{C}} \to GF$ та $\epsilon : FG \to Id_{\mathcal{D}}$ таких, що наступні діаграми комутують:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, "\epsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \text{ , } \mathit{ma} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, "G\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd} .$$

Натуральна трансформація $\eta$ називається **одиницею** спряження, а $\epsilon$ **коодиницею** спряження.

**Приклад 5.** Розглянемо спряжену пару ("вільний-забуваючий") функторів $F$ : **Sets** $\to$ **Vect**$_k$, $G$ : **Vect**$_k$ $\to$ **Sets**. Нескладно переконатися, що для довільної множини $X \in$ **Sets** одиниця спряження $\eta_X : X \to GF(X)$ задається вкладенням базису, а для довільного векторного простору $V$ коодиниця $\epsilon_V : FG(V) \to V$ задається продовженням тотожного відображення на базисі простору $FG(V)$.

## 2.3 Вправи

**Вправа 12.** Нехай задано три функтори $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Якщо $\alpha : F \to G$ і $\beta : G \to H$ натуральні трансформації, то композиція $\beta\alpha : F \to H$ також натуральна. Покажіть, що фуктори $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ формують категорію $\mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, де множина морфізмів між довільними функторами задається натуральними трансформаціями. Яке натуральне перетворення задає тотожній морфізм?

**Вправа 13.** Нехай $X$ топологічний простір. Визначимо посет $I(X)$ як множину усіх замкнутих підмножин $X$ (див Вправи 2 та 4), а посет $J(X)$ як множину усіх підмножин $X$. Покажіть, що функтор вкладення категорій $\mathcal{C}_{I(X)} \hookrightarrow \mathcal{C}_{J(X)}$ має лівий спряжений функтор, який переводить довільну підмножину $A$ в її замикання $\bar{A}$.

**Вправа 14.** Нехай $I$ — це посет усіх ідеалів в комутативному кільці $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, а $J$ — це множина усіх підмножин в $\mathbb{C}^n$. Визначимо $f : I \to J$ як функцію, що переводить ідеал в множину спільних нулів його елементів, та $g : J \to I$, що переводить множину точок в ідеал поліномів, які обнуляються на ній. Покажіть, що $f$ та $g$ формують відповідність Галуа (якщо розглянути дуальний до одного з посетів), а отже, задають пару спряжених функторів між відповідними категоріями.

**Вправа 15.** Покажіть, що функтор комплексифікації $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ (див. Вправу 5) лівий спряжений до функтора звуження скалярів $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.

**Вправа 16.** Нехай $G : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Vect}_k$ забуваючий функтор. Опишіть лівий спряжений до функтора $F$. (*Вказівка:* по заданому векторному простору $V$ побудуйте тензорну алгебру $T(V) = k \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \ldots$ та покажіть, що відповідність $V \mapsto T(V)$ визначає лівий спряжений до функтора $F$).

**Вправа 17.** Опишіть одиницю та коодиницю спряження між категоріями **AbGroup** та **Group**.

**Вправа 18.** Опишіть одиницю та коодиницю спряження для прикладів, наведих в цьому розділі.

## 2.4 Бібліотечка


1. Serge Lang, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, (2002).
2. Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, (1971).
3. Masaki Kashiwara, Pierre Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
4. J. Adamek, H. Herrlich, G. Strecker, *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*, Wiley-Interscience, (1990).
5. *nLab* (https://ncatlab.org) — колективна та відкрита онлайн вікі-лабораторія, містить багато корисної інформації по теорії категорій.


# 3 Алгебри та їх зображення, зв'язок з колчанами

## 3.1 Коротко про алгебри, їх радикал, базові алгебри.

Протягом цього розділу ми вважатимемо, що $A$ — це скінченновимірна алгебра над алгебрично замкненим полем $k$, тобто $A$ — це скінченновимірний простір, наділений асоціативним множенням з одиницею.

**Приклад 6.**

a) $A = k$.

b) Приклади нескінченновимірних алгебр: алгебра $k[x]$ усіх поліномів від однієї змінної $x$ з коефіцієнтами в полі $k$ та алгебра $k[x_1, \ldots, x_n]$ усіх поліномів від змінних $x_1, \ldots, x_n$.

c) Алгебра $k[x]/(x^2)$ "дуальних чисел" складається з усіх пар вигляду $a+b*x$, де $a, b \in k$, а $x$ елемент такий, що $x^2 = 0$. Нескладно переконатися що $\dim k[x]/(x^2) = 2$.

d) Якщо $A$ — алгебра, то множина $M_n(A)$ усіх $n \times n$ матриць з коефіцієнтами в $A$ — це також алгебра зі звичайними операціями додавання та множення матриць. Якщо $A$ скінченновимірна, то $M_n(A)$ також скінченновимірна. Зокрема розмірність алгебри $M_n(k)$ рівна $n^2$.

e) Підмножина
$$\mathbb{U}_n(k) = \begin{pmatrix} k & k & \dots & k \\ 0 & k & \dots & k \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$
усіх верхньотрикутних матриць в $M_n(k)$ — це підалгебра в $M_n(k)$.

f) Асоціативне кільце $k\langle x_1, x_2 \rangle$ усіх поліномів від двох некомутативних змінних $x_1$ та $x_2$ — це нескінченновимірна алгебра (називається вільною алгеброю).

g) Нехай $G$ — скінченна група з одиницею $e$. Групова алгебра $k[G]$ — це алгебра з базисом $\{a_g \mid g \in G\}$ та множенням $a_g a_h = a_{gh}$. Наприклад, якщо $G$ — циклічна група порядку $m$, то $k[G] \simeq k[x]/(x^m - 1)$.

Нагадаємо, що **радикал алгебри** $J(A)$ — це перетин усіх максимальних правих ідеалів в $A$. Можна показати, що радикал $J(A)$ — це перетин усіх максимальних лівих ідеалів, а отже, $J(A)$ — двосторонній ідеал. Алгебра $A$ називається **напівпростою**, якщо $J(A) = 0$. Нескладно переконатися, що $J(A/J(A)) = 0$.

**Вправа 19.** Нехай $A = \mathbb{U}_2(K) = \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Покажіть, що
$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
та опишіть радикал алгебри $\mathbb{U}_n(k)$.

**Вправа 20.** Нехай $A = M_{d_1}(k) \oplus \dots \oplus M_{d_n}(k)$ (де $M_{d_i}(k)$ — це алгебра матриць над полем $k$ розміром $d_i$ на $d_i$). Покажіть, що $A$ напівпроста.

**Вправа 21.** Покажіть, що групова алгебра $k[G]$ скінченної групи $G$ напівпроста.

**Вправа 22.** Нехай $f : A \to B$ — гомоморфізм алгебр. Покажіть, що $f(J(A)) \subseteq J(B)$. Якщо $f$ — сюр'єктивний, покажіть, що $f(J(A)) = J(B)$.

Вправа 20 стверджує, що довільна алгебра вигляду
$$A = M_{d_1}(k) \oplus \dots \oplus M_{d_n}(k) \tag{3}$$
напівпроста. Насправді зворотнє твердження теж вірне: теорема Джозефа Веддерберна говорить, що довільна напівпроста скінченновимірна алгебра має вигляд (3), а отже, для довільної алгебри $A$ маємо наступне:
$$A/J(A) \simeq M_{d_1}(k) \oplus \dots \oplus M_{d_n}(k). \tag{4}$$

Називатимемо алгебру $A$ **базовою**, якщо в розкладі (4) усі $d_i$ рівні 1, тобто $A/J(A) \simeq \prod_i k$. Наприклад, алгебра $A = \mathbb{U}_n(K)$ базова, оскільки в цьому випадку $A/J(A) \simeq \underbrace{k \times \cdots \times k}_{\text{n копій}}$ (див. Вправу (19)).

**Вправа 23.** Покажіть, що алгебра $A = k[x]/(x^m)$ базова, а її радикал $J(A)$ породжений $x$.

**Вправа 24.** Покажіть, що алгебра $A = \begin{pmatrix} k & k[x]/x^2 \\ 0 & k[x]/x^2 \end{pmatrix}$ базова, а її радикал має вигляд

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & k[x]/x^2 \\ 0 & xk[x]/x^2 \end{pmatrix}.$$

## 3.2 Коротко про зображення скінченновимірних алгебр

**Зображенням** алгебри $A$ (лівий $A$-модуль) називатимемо векторний простір $V$ разом з гомоморфізмом алгебр $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$.

**Приклад 7.**

a) $V = 0$.

b) $V = A$, а $\rho : A \to \mathrm{End}A$ визначений наступним чином: $\rho(a)$ оператор лівого множення на $a$, тобто $\rho(a)b = ab$ (звичайний добуток). Таке зображення називається **регулярним**.

c) Якщо $A = k$, тоді нескладно переконатися, що довільне зображення $A$ — це довільний векторний простір над $k$, в якому $A$ діє множенням на скаляри поля $k$.

Якщо задано два зображення $(V_1, \rho_1)$ та $(V_2, \rho_2)$ алгебри $A$, то **морфізм** між ними задається лінійним оператором $\phi : V_1 \to V_2$ таким, що наступна діаграма комутує

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(a)"] \arrow[d, "\phi"'] & V_1 \arrow[d, "\phi"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(a)"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

для усіх $a \in A$.

Таким чином, можна сформувати категорію $\mathrm{Rep}A$ зображень алгебри $A$. Базові алгебри відіграють фундаментальну роль в теорії зображень скінченновимірних алгебр завдяки наступній теоремі

**Теорема 2.** *Для довільної скінченновимірної алгебри $A$ існує базова скінченновимірна алгебра $B$ така, що категорії $\mathrm{Rep}A$ та $\mathrm{Rep}B$ еквівалентні (див. означення 3).*

Отже, вивчення зображень усіх скінченновимірних алгебр "зводиться" до вивчення зображень базових алгебр. В наступних двох підсекціях ми переконаємось в тому, що довільна базова алгебра $A$ ізоморфна фактор-алгебрі алгебри шляхів певного колчану.

## 3.3 Колчани та алгебри шляхів

**Колчан** $Q$ — це орієнтовний граф. Ми будемо задавати колчан $Q$ множиною вершин $Q_0$, множиною ребер (стрілок) $Q_1$, а для заданої стрілки $h \in Q_1$, позначатимемо $s(h)$, $t(h)$ вершину її початку та кінця:

$$s(h) \xrightarrow{h} t(h).$$

**Зображення** колчану $Q$ — це задання для кожної вершини $i \in Q_0$ векторного простору $V_i$ а для кожної стрілки $h \in Q_1$ – лінійного відображення $V_h : V_{s(h)} \to V_{t(h)}$.

Теорія зображень колчанів тісно пов'язана з теорією зображень алгебр. Для кожного колчану $Q$ існує алгебра $kQ$ (так звана **алгебра шляхів** $Q$ така, що зображення колчану $Q$ "такі самі" як і зображення алгебри $kQ$ (відповідні категорії ізоморфні).

**Алгебра шляхів** $kQ$ колчану $Q$ — це алгебра над полем $k$, базис якої сформований усіма орієнтованими шляхами в $Q$ (включаючи тривіальні шляхи $p_i, i \in Q_0$), а множення задається конкатенацією шляхів: $ab$ — це шлях, в якому спочатку треба пройти шлях $b$, а потім шлях $a$. Якщо два шляхи не можуть бути зчеплені, то їх добуток визначається як 0.

**Приклад 8.** Алгебра шляхів колчану

$$1 \xrightarrow{h} 2$$

має базис з 3-х елементів $p_1$, $p_2$ (тривіальні шляхи в вершинах) та $h$ (шлях довжини 1), з наступним множенням $p_i^2 = p_i, i = 1, 2$, $p_1p_2 = p_2p_1 = 0$, $p_1h = hp_2 = h$, $hp_1 = p_2h = h^2 = 0$. Тому нескладно переконатися, що існує ізоморфізм $kQ \cong \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$, який задається

$$p_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad p_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Вправа 25.** Покажіть, що алгебра $kQ$ породжена $p_i, i \in Q_0$ та $a_h, h \in Q_1$ з наступними співвідношеннями:

1) $p_i^2 = p_i$, $p_ip_j = 0$, якщо $i \neq j$;

2) $a_hp_{s(h)} = a_h$, $a_hp_j = 0$, якщо $j \neq s(h)$;

2) $p_{t(h)}a_h = a_h$, $p_ia_h = 0$, якщо $i \neq t(h)$.

**Вправа 26.** Покажіть, що радикал алгебри $kQ$ породжений усіма стрілками в колчані $Q$.

**Вправа 27.** Використовуючи Вправу 26, покажіть, що $kQ/J(kQ) \simeq \prod_{i \in Q_0} k$. А отже $kQ$ — це базова алгебра для довільного колчану $Q$.

## 3.4 Колчан базової алгебри.

Нехай $A$ — скінченновимірна алгебра. Нагадаемо, що елемент алгебри $e$ називається **ідемпотентом**, якщо $e^2 = e$. Два ідемпотенти $e, f \in A$ називаються **ортогональними**, якщо $ef = fe = 0$. Ідемпотент $e$ називається **примітивним**, якщо $e$ неможливо розкласти в суму $e = e_1 + e_2$, де $e_1$, $e_2$ — ненульові ідемпотенти в $A$. Ідемпотент $e$ називатимемо **центральним**, якщо $ae = ea$ для усіх $a \in A$. Називатимемо алгебру $A$ **зв'язною**, якщо $A$ неможливо представити як прямий добуток двох алгебр, еквівалентно, якщо 0 та 1 — це єдині центральні ідемпотенти в $A$.

Нехай $A$ — базова скінченно-вимірна алгебра, а $\{e_1, \dots, e_n\}$ — повна множина примітивних ортогональних ідемпотентів в $A$. **Колчан Габріеля** $Q_A$, пов'язаний з $A$, визначимо наступним чином:

- "вершини" в $Q_A$ занумеруємо елементами множини $\{e_1, \dots, e_n\}$;
- кількість "стрілок" між вершинами, нумерованими $e_i$ та $e_j$, рівна $\dim e_i(J(A)/J^2(A))e_j$.

Нескладно довести, що колчан $Q_A$ не залежить від вибору повної множини примітивних ідемпотентів в $A$.

**Приклад 9.**

- Нехай $A = k[x]/(x^m)$. Легко показати, що $e = 1$ — єдиний ненульовий ідемпотент в $A$. Використовуючи Вправу 23, маємо $J(A) = (x)$, тому $J^2(A) = (x^2)$, а отже $e \dim(J(A)/J^2(A))e = 1$. Тому $Q_A$ має наступну форму:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

- Нехай $A = \begin{pmatrix} k & k[x]/x^2 \\ 0 & k[x]/x^2 \end{pmatrix}$. Нескладно переконатися, що

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

— повна множина примітивних ортогональних ідемпотентів (тому $Q_A$ має дві вершини), і

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & k[x]/x^2 \\ 0 & xk[x]/x^2 \end{pmatrix}, \quad J^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & xk[x]/x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(див. Вправу 24). А отже, $\dim J(A)/J^2(A) = 2$, тому $Q_A$ має дві стрілки. Прямими обчисленнями маємо

$$\dim e_i(J(A)/J^2(A))e_j = \begin{cases} 1, & (i,j) = (1,2) \text{ або } (i,j) = (2,2), \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Тому $Q_A$ має наступну форму:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

Якщо $Q$ — довільний скінченний колчан, нехай $R_Q$ — двосторонній ідеал в алгебрі шляхів $kQ$, породжений стрілками $Q$. Називатимемо двосторонній ідеал $I \subset kQ$ **допустимим**, якщо

$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2$$

для певного $m \geq 2$. Іншими словами, $I$ допустимий, якщо не містить жодної стрілки $Q$ та містить усі шляхи довжиною $\geq m$. Якщо $I$ — допустимий, то фактор алгебру $kQ/I$ називатимемо **обмеженою алгеброю шляхів**.

Наступна теорема задає канонічний вигляд базових скінченновимірних алгебр.

**Теорема 3.** *Нехай $A$ — базова, зв'язна, скінченновимірна алгебра. Існує допустимий ідеал $I$ в $kQ_A$ такий, що $A \cong kQ_A/I$.*

**Вправа 28.** Побудуйте колчан Габріеля алгебри $A = \mathbb{U}_n(k)$.

**Вправа 29.** Нехай $A = \mathbb{U}_3(k)$, а $C$ її підалгебра, що складається з усіх матриць

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

таких, що $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33}$. Покажіть, що $C$ ізоморфна $kQ/I$, де $I = \langle \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta \rangle$ — це ідеал в $kQ$, а $Q$ — наступний колчан

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

## 3.5 Бібліотечка


1. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В., *Конечномерные алгебры*, Вища школа, Киев, (1980).

2. Габриэль П., Ройтер А.D., *Представления конечномерных алгебр*, Киев, (1992).

3. Assem I., Simson D., Skowronski A., *Elements of the representation theory of associative algebras*, vol 1, London Mathematical Society Student Texts, (2007).

4. Auslander M., Reiten I., Smalo S.O., *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge University Press, (1977).

5. Etingof P., Golberg O., Hensel S., Liu T., Schwendner A., *Introduction to Representation Theory*, American Mathematical Society, (2011).

6. *fdLit* (http://www.math.uni-bonn.de/people/schroer/fd-literature.html) — сторінка Яна Шрьоера, що містить літературу з скінченновимірних алгебр, їх зображень та суміжних тем.

# 4 Алгебра шляхів як лівий спряжений функтор

"Adjoint functors arise everywhere."

— Saunders Mac Lane

В попередній лекції ми переконалися, що колчани (та їх зображення) відіграють фундаментальну роль в структурі та теорії зображень скінченновимірних алгебр. В цій лекції ми спробуємо показати, що конструкцію "колчан" $\leftrightarrows$ "алгебра" ($Q \mapsto kQ$, $A \mapsto Q_A$) можна розглядати як пару спряжених фукторів між певними категоріями.

Розглянемо категорію **Quiv**, де об'єкти — це скінченні колчани, а морфізми — це вкладення колчанів (тобто вкладення множин вершин та відповідних множин стрілок, якщо можливо). Нехай $\mathbf{Quiv}^{ac}$ — категорія ациклічних колчанів. Розглянемо категорію **SBAlg**, де об'єкти — це скінченновимірні базові алгебри, а морфізми — це сюр'єктивні гомоморфізми алгебр.

**Вправа 30.** Покажіть, що **Quiv** та **SBAlg** — категорії, $\mathbf{Quiv}^{ac}$ — повна підкатегорія в **Quiv**. А відповідність $Q \mapsto kQ$ породжує контраваріантний функтор $k[-] : \mathbf{Quiv}^{ac} \to$ **SBAlg**.

Нескладно переконатися, що відповідність $A \mapsto Q_A$ не породжує функтор між категоріями **SBAlg** та **Quiv**. Дійсно, вибір повної множини примітивних ортогональних ідемпотентів в $A$, взагалі кажучи, не єдиний, а вибір базису в просторі $e(J(A)/J^2(A))f$ (стрілки між $e$ та $f$) не канонічний. Ми розглянемо певну проміжну категорію між "колчанами" та "алгебрами" таку, що відповідне відображення є функтором.

## 4.1 Фактор-категорія $\mathbf{SBAlg}_n$

Конструкція фактор-категорії аналогічна конструкції фактор-множини чи фактор-алгебри. Нехай задана довільна категорія $\mathcal{C}$. Припустимо, що відношення еквівалентності $\sim$ задається на морфізмах $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$. Тобто для довільних $X, Y \in \mathcal{C}$ множина $\mathbf{Mor}(X, Y)$ розбивається на класи еквівалентності $[\alpha]$, які задовольняють умові: як тільки $[\alpha] = [\alpha']$, то $[\beta\alpha] = [\beta\alpha']$ та $[\alpha\beta] = [\alpha'\beta]$, якщо композиція відповідних морфізмів має сенс. Тоді ми можемо сформувати нову категорію $\mathcal{C}/\sim$, яку будемо називати **фактор-категорією**. Об'єкти $\mathcal{C}/\sim$ ті ж самі, що і об'єкти категорії $\mathcal{C}$, а множина морфізмів $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}/\sim}(X, Y)$ — це множина класів еквівалентності морфізмів $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ по відношенню до $\sim$. Композиція морфізмів задається правилом $[\beta][\alpha] = [\beta\alpha]$.

Визначимо наступне відношення еквівалентності в категорії **SBAlg**. Нехай $A, B \in$ **SBAlg** та $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{Mor}(A, B)$. Казатимемо, що $\alpha_1$ та $\alpha_2$ — *n-глибокі* (позначаючи це через $\alpha_1 \sim_n \alpha_2$), якщо

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(J^i(A)) \subseteq J^{i+1}(B), \qquad 0 \leq i \leq n,$$

де $J^0(A) = A$.

**Вправа 31.** Покажіть, що $\sim_n$ — це відношення еквівалентності в категорії **SBAlg**. (Вказівка: скористайтеся Вправою 22).

Таким чином, можна сформувати фактор-категорію

$$\mathbf{SBAlg}_n = \mathbf{SBAlg}/\sim_n .$$

Позначатимемо $\Pi_n : \mathbf{SBAlg} \to \mathbf{SBAlg}/\sim_n$ відповідний фактор-функтор (який є тотожнім на об'єктах, а кожен морфізм $\alpha : A \to B$ переводить в його клас еквівалентності $[\alpha]_n$ по відношенню до $\sim_n$).

## 4.2 Категорія Vколчанів

Скінченний (точковий) **Vколчан**

$$VQ = (VQ_0, VQ_1)$$

задається скінченною множиною вершин $VQ_0^* = \{*\} \cup VQ_0$, де $VQ_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$, разом з скінченновимірними векторними просторами $VQ_{e,f}$ для кожної пари вершин $e, f \in VQ_0^*$ такими, що $VQ_{*,e} = VQ_{e,*} = 0$ для усіх $e$. Вершину $*$ називатимемо *точкою*.

Позначатимемо $\Sigma_{VQ}$ вільний $k$-модуль, породжений $VQ_0$, який ми розглядатимемо як напівпросту алгебру, визначаючи

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases} .$$

Символами $VQ_1$ ми позначатимемо пряму суму $\bigoplus_{e,f \in VQ_0} VQ_{e,f}$, на якій натуральним чином визначена структура $\Sigma_{VQ}$-бімодуля.

**Морфізм** скінченних Vколчанів $\rho : VQ \to VR$ задається

- точковим відбраженням $\rho_0 : VQ_0^* \to VR_0^*$ (тобто таким, що $\rho_0(*) = *$), що звужується до бієкції між елементами $VQ_0$ та $VR_0$, які не відображаються в $*$.
- лінійним відображеням $\rho_{e,f} : VQ_{e,f} \to VR_{\rho_0(e),\rho_0(f)}$ для кожної пари вершин $e, f \in VQ_0^*$.

Казатимемо, що $\rho$ **сюр'єктивне**, якщо кожне відображення $\rho_{e,f}$ сюр'єктивне.

**Зауваження 2.** Можна перевірити, що $\rho$ — це морфізм $VQ \to VR$ тоді і тільки тоді, якщо

$$\rho_{VQ} = \bigoplus_{e,f \in VQ_0} \rho_{e,f} : VQ_1 \to VR_1$$

— це гомоморфізм $\Sigma_{VQ}$-бімодулів.

Визначимо категорію **SVQuiv**, в якій об'єкти — це скінченні Vколчани, а морфізми — це морфізми Vколчанів. Казатимемо, що Vколчан $VQ = (VQ_0, VQ_1)$ **ациклічний**, якщо існує $n > 0$ таке, що

$$\underbrace{VQ_1 \otimes_\Sigma \cdots \otimes_\Sigma VQ_1}_{\text{n}} = 0.$$

Символом $\mathbf{SVQuiv}^{ac}$ позначатимемо повну підкатегорію ациклічних Vколчанів.

**Вправа 32.** Визначте природній контраваріантний функтор між категоріями **Quiv** та **SVQuiv**.

## 4.3 Функтор "алгебра шляхів".

З парою $(\Sigma, V)$ (де $\Sigma$ — це довільна алгебра, а $V$ — це $\Sigma$-бімодуль) пов'яжемо **тензорну алгебру** $T(\Sigma, V)$ наступним чином

$$T(\Sigma, V) = \Sigma \oplus V \oplus V \otimes_\Sigma V \oplus \ldots.$$

Тензорна алгебра задовольняє наступній універсальній властивості.

**Твердження 1.** *Нехай $A$ та $\Sigma$ — $k$-алгебри, а $V$ — $\Sigma$-бімодуль. Припустимо, що є дві функції*

$$\varphi_0 : \Sigma \to A,\ \varphi_1 : V \to A$$

*такі, що*

1. *$\varphi_0$ — це гомоморфізм $k$-алгебр;*
2. *$\varphi_1$ — це гомоморфізм $\Sigma$-бімодулів (якщо $A$ розглядати як $\Sigma$-бімодуль, породжений відображенням $\varphi_0$).*

*Тоді існує єдиний гомоморфізм $k$-алгебр $\varphi : T(\Sigma, V) \to A$ такий, що $\varphi|_\Sigma = \varphi_0, \varphi|_V = \varphi_1$.*

Нехай $VQ = (VQ_0^*, VQ_{e,f})$ — це скінченний, ациклічний Vколчан. Називатимемо **алгеброю шляхів** (і позначатимемо $k[VQ]$) відповідну тензорну алгебру $T(\Sigma_{VQ}, VQ_1)$. Нескладно переконатися, що $k[VQ]$ — базова, а отже $k[VQ] \in$ **SBAlg**. Нехай $\rho : VQ \to VR$ — це сюр'єктивне відображення Vколчанів. Аналогічно до попереднього твердження можна отримати відображення $\varphi_0, \varphi_1$. Справді, $k[VR] = T(\Sigma_{VR}, VR_1)$, оскільки $\rho_0$ сюр'єктивне відображення на вершинах, тому воно породжує сюр'єктивний гомоморфізм алгебр $\varphi_0 : \Sigma_{VQ} \twoheadrightarrow \Sigma_{VR} \subset k[VR]$. З іншого боку, $\rho_1$ генерує відображення

$$\varphi_1 : VQ_1 \to VR_1 \subset k[VR].$$

**Вправа 33.** Перевірте, що $\varphi_1$ — це гомоморфізм $\Sigma_{VQ}$-бімодулів.

Тому, згідно з Твердженням 1, отримуємо єдиний гомоморфізм $k$-алгебр $k[\rho] : k[VQ] \to k[VR]$. Оскільки $\rho$ сюр'єктивне відображення, то $k[\rho]$ — це теж сюр'єктивний гомоморфізм алгебр (перевірте!).

Таким чином, ми отримуємо:

**Твердження 2.** *Наведена конструкція породжує коваріантні функтори:*

$$\begin{aligned} k[-] :&\mathbf{SVquiv}^{ac} \to \mathbf{SBAlg}, \\ \mathscr{K}_n[-] = \Pi_n \circ k[-] :&\mathbf{SVquiv}^{ac} \to \mathbf{SBAlg}_n. \end{aligned}$$

**Зауваження 3.** Відзначимо, що композиція функторів $k[-] \circ V[-]$ — це функтор з Вправи 30.

## 4.4 Функтор "Колчан Габріеля"

Тепер ми визначимо функтор в іншому напрямку. Нехай $A$ — скінченновимірна алгебра. Нагадаємо теорему Веддерберна-Мальцева (в скороченому вигляді):

**Теорема 4.** *Існує підалгебра $\Sigma$ в $A$ така, що $A = \Sigma \oplus J(A)$ як $k$-векторний простір та $\Sigma \cong A/J(A)$ як алгебри. Для довільних двох підалгебр $\Sigma$ та $\Sigma'$ таких, що $A = \Sigma \oplus J(A) = \Sigma' \oplus J(A)$, існує $w \in J(A)$ таке, що*

$$\Sigma' = (1+w)\Sigma(1+w)^{-1}.$$

Ключова ідея — визначити "вершини" як орбіти під дією $J(A)$. Нехай $A \in \mathbf{SBAlg}$, $J(A)$ — її радикал, а $\pi_A : A \twoheadrightarrow A/J(A)$ — канонічна проекція. Гомоморфізм алгебр $s : A/J(A) \hookrightarrow A$ — називатимемо *розчепленням* $\pi_A$, якщо $\pi_A \circ s = \mathrm{id}_{J(A)}$. Позначимо символом $\mathcal{S}_A$ множину усіх розчеплень, а символом $\mathcal{E}_A$ усі можливі множини примітивних ортогональних ідемпотентів $A$. Нагадаємо, що згідно з теоремою Веддерберна-Мальцева, $\mathcal{S}_A$ — непорожня. Оскільки $A$ — базова, то $A/J(A) \cong \prod_{i=1}^{n} k$. Тому довільне розчеплення $s \in S_A$ задає повну множину примітивних ортогональних ідемпотентів $\{s(j_1), \ldots, s(j_n)\} \in \mathcal{E}_A$, де $j_1, \ldots, j_n$ — це єдина множина примітивних ортогональних ідемпотентів в $A/J(A)$. Позначимо наведену відповідність $\Phi : \mathcal{S}_A \to \mathcal{E}_A$.

**Вправа 34.** Покажіть, що $\Phi$ — це біекція.

Довільний елемент $w \in J(A)$ задає автоморфізм

$$a \mapsto (1+w)a(1+w)^{-1}, \qquad a \in A.$$

Позначатимемо такий автоморфізм ${}^{1+w}(-)$, відповідно використовуватимемо таке позначення ${}^{1+w}a := (1+w)a(1+w)^{-1}$. Нехай $\mathcal{G}(A) \triangleleft \mathrm{InnAut}(A)$ — це група усіх таких автоморфізмів (позначатимемо цю групу $\mathcal{G}$, якщо зрозуміло, про яку алгебру йдеться). Позначатимемо через ${}^{\mathcal{G}}a = \{{}^{1+w}a \mid w \in J(A)\}$ орбіту елементу $a \in A$ під дією групи $\mathcal{G}(A)$.

Нехай $A$ — це базова скінченновимірна алгебра, та $s \in \mathcal{S}_A$ — довільне розчеплення. Нехай $\Phi(s) \in \mathcal{E}_A$ — відповідна множина примітивних ортогональних ідемпотентів в $A$. Визначимо **Vколчан** $GQ(A)$ алгебри $A$ наступним чином:

$$GQ(A)_0 := \{*\} \cup \{{}^{\mathcal{G}}e \mid e \in \Phi(s)\},$$
$$GQ(A)_{{}^{\mathcal{G}}e, {}^{\mathcal{G}}f} := e\frac{J(A)}{J^2(A)}f, \qquad \text{для фіксованих } \; e, f \in \Phi(s).$$

**Вправа 35.** Покажіть, що Vколчан $GQ(A)$ коректно визначений. Тобто $GQ(A)$ не залежить від вибору розчеплення $s \in \mathcal{S}_A$.

Нехай $A, B$ — це алгебри з відповідними групами автоморфізмів $\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$ та $\mathcal{H} = \mathcal{G}(B)$. Для заданого гомоморфізму алгебр $\alpha : A \twoheadrightarrow B$ визначимо морфізм Vколчанів $GQ(\alpha) : GQ(A) \to GQ(B)$ наступним чином:

$$\begin{aligned}
GQ(\alpha)({}^{\mathcal{G}}e) =& {}^{\mathcal{H}}\alpha(e);\\
GQ(\alpha)_{{}^{\mathcal{G}}e, {}^{\mathcal{G}}f} :& e\frac{J(A)}{J^2(A)}f \to \alpha(e)\frac{J(B)}{J^2(B)}\alpha(f)\\
& e(j + J^2(A))f \mapsto \alpha(e)(\alpha(j) + J^2(B))\alpha(f).
\end{aligned}$$

**Вправа 36.** Покажіть, що визначене відображення Vколчанів коректне. Більш того, цей морфізм Vколчанів сюр'єктивний.

Таким чином, маємо

**Твердження 3.** *Наведена конструкція задає коваріантний функтор*

$$GQ(-) : \mathbf{SBAlg} \to \mathbf{SVquiv}.$$

**Вправа 37.** Для довільного $n \geq 1$ доведіть, що існує єдиний функтор

$$\mathscr{G}\mathscr{Q}_n(-) : \mathbf{SBAlg}_n \to \mathbf{SVquiv}$$

такий, що наступна діаграма комутує

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{SBAlg} \arrow[r, "GQ(-)"] \arrow[d, "\Pi_n"'] & \mathbf{SVquiv} \\
\mathbf{SBAlg}_n \arrow[ur, "\mathscr{G}\mathscr{Q}_n(-)"'] &
\end{tikzcd}$$

Побудуйте функтор $\mathscr{G}\mathscr{Q}_n(-)$.

## 4.5 Спряження між функторами.

Позначимо символом $\mathbf{SBAlg}^{ac}$ повну підкатегорію базових алгебр таких, що Vколчан $GQ(A)$ ациклічний. Підсумовуючи конструкції, наведені вище, ми маємо наступну діаграму

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Quiv}^{ac} \arrow[r, "V[-]"] \arrow[rr, dashed, bend left=40, "\text{Алгебра шляхів}"] & \mathbf{SVQuiv}^{ac} \arrow[r, bend left, "k[-]"] \arrow[dr, "\mathscr{K}_1[-]"] & \mathbf{SBAlg}^{ac} \arrow[l, bend left, "GQ(-)"] \arrow[d, two heads, "\Pi_1"] \\
 & & \mathbf{SBAlg}^{ac}/\sim_1 \arrow[ul, bend left, "\mathscr{G}Q_1(-)"]
\end{tikzcd}$$

Тут функтор $\mathscr{K}_1[-]$ позначає композицію функторів $\Pi_1 \circ k[-]$. А функтор $\mathscr{G}Q_1(-)$ — це звуження функтора, побудованого у Вправі 37, на підкатегорію $\mathbf{SBAlg}^{ac}$.

Справедлива наступна теорема.

**Теорема 5.** *Функтор $\mathscr{K}_1[-]$ — лівий спряжений до функтора $\mathscr{G}Q_1(-)$.*

**Вправа 38.** Як наслідок з попередньої теореми, покажіть, що довільна алгебра $A \in$ **SBAlg** — це фактор-алгебра шляхів певного колчану.

**Вправа 39.** Опишіть одиницю та коодиницю спряження, наведеного в Теоремі 5. Опишіть образ функтора $\mathscr{K}_1[-]$. Цей функтор повний та точний?

# Подяки

Автор дякує Сергію Максименку за запрошення підготувати оффлайн лекції та за презентацію даного курсу на XI-й літній школі “Алгебра, Топологія, Аналіз” (1–14 серпня, 2016, Одеса, Україна). А також вдячний Наталії Голощаповій та Володимиру Теско за уважну вичитку тексту та слушні зауваження.

# Зважені простори аналітичних функцій на банаховому просторі

**Л. Атаманюк**

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

Нехай $X$ - комплексний банаховий простір і $U$ збалансована відкрита множина в $X$. Розглянемо злічену сім'ю неперервних невід'ємних ваг $V = \{v : U \to [0, \infty[$: для кожного $x \in U$ існує $v \in V$ така, що $v(x) > 0\}$. Наведемо декілька означень (дивитись також в [1], [2], [5]).

**Означення 1.** Простором зважених аналітичних функцій будемо називати простір $\mathcal{H}V(U)$, всіх аналітичних функцій $f$ з $U$ таких, що

$$p_v(f) := \{\sup v(x)|f(x)| : x \in U\} < \infty$$

для всіх $v \in V$.

**Означення 2.** Множина $A \subseteq U$ називається $U$-обмеженою, якщо вона є обмеженою і $d(A, X \setminus U) > 0$.

**Означення 3.** Простір $\mathcal{H}V_0(U) := \{f \in \mathcal{H}V(U)$ : для кожного $v \in V, v|f|$ прямує до нуля на нескінченості, поза U-обмеженими множинами $\}$.

Позначимо $\mathcal{P}(^nX)$ простір неперервних $n$-однорідних поліномів, наділених нормою $\|P\| := sup\{|P(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$. Для кожного $n \in N_0$ ми означимо $\mathcal{P}V(^nX) := \mathcal{P}(^nX) \cap \mathcal{H}V(U)$ і $\mathcal{P}V_0(^nX) := \mathcal{P}(^nX) \cap \mathcal{H}V_0(U)$. Якщо сім'я неперервних ваг складається з одного елемента $V = \{v\}$ такого, що $v(x) > 0$ для всіх $x \in U$, тоді $\mathcal{H}V(U)$ і $\mathcal{H}V_0(U)$, наділені нормою $\|\cdot\|_v := p_v$, є банаховими просторами (позначимо їх як $\mathcal{H}_v(U)$ і $\mathcal{H}_{v_0}(U)$ відповідно). Більше того, якщо $v \equiv 1$ тоді $\mathcal{H}_v(U) = \mathcal{H}^\infty(U)$.

**Означення 4.** Вагою $\tilde{v} : U \to [0; \infty[$, асоційованою з $v$, будемо називати вагу, визначену таким чином

$$\tilde{v}(x) = \frac{1}{\{\sup |f(x)| : f \in \mathcal{H}_v(U), \|f\|_v \leq 1\}} = \frac{1}{\|\delta_x\|_{(\mathcal{H}_v(U))'}},$$

де $\delta_x$ є функціоналом значення в точці.

**Означення 5.** Назвемо вагу $v$ радіальною, якщо виконується рівність $v(x) = v(\lambda x)$ для кожного $\lambda \in \mathcal{C}$ з $|\lambda| = 1$.

**Означення 6.** Будемо вважати, що злічена сім'я ваг $V$ задовольняє умову I, якщо для кожної $U$- обмеженої множини $A$ існує $v \in V$ така, що $\inf_{x \in A} v(x) > 0$.

Наступне твердження, котре в [5] довели Даніель Ґарандо і Павло Севілія-Періс показує, які умови повинні задовольняти ваги, щоб простір $\mathcal{H}V(X)$ був алгеброю.

**Теорема 1.** *Нехай $U$ є збалансована відкрита множина в $X$ і $V$ - сім'я радіальних, обмежених ваг, що задовольняє умову I. Простір зважених голоморфних функцій $\mathcal{H}V(X)$ буде алгеброю тоді і тільки тоді, коли для кожної ваги $v$ буде існувати вага $\tilde{w} \in V$ і $C > 0$ такі, що для всіх $x \in U$ виконується нерівність*

$$v(x) \leq C\tilde{w}(x)^2.$$

Нехай $U = X$ - банаховий простір, $v$ є вагою на $X$, заданою у вигляді $v(x) = e^{-r\|x\|}, r \in (0;1)$, $x \in X$ і $V = \{v\}$. Тоді простір $\mathcal{H}_v(X)$ аналітичних функцій $f : X \to \mathcal{C}$ таких, що

$$\|f\|_v = \sup_{x \in X} e^{-r\|x\|}|f(x)| < \infty$$

є банаховим простором.
Покажемо, що дана вага є радіальною. Візьмемо $t \in \mathcal{C}$ з $|t| = 1$, тоді $v(tx) = e^{-r\|tx\|} = e^{-r|t|\|x\|} = v(x)$. Знайдемо $\tilde{v}(x_0)$ для довільного фіксованого $x_0$. Згідно означення,

$$\tilde{v}(x_0) = \frac{1}{\|\delta_{x_0}\|_{(\mathcal{H}_v(X))^*}},$$

де

$$\|\delta_{x_0}\|_{(\mathcal{H}_v(X))^*} = \sup_{\|f\|_v \leq 1} |f(x_0)|$$

Нерівність $\|f\|_v \leq 1$ означає, що $\sup_{x \in X} e^{-r\|x\|}|f(x)| \leq 1$. Оскільки остання нерівність виконується для всіх $x \in X$, то, зокрема, і для $x = x_0$, тобто $e^{-r\|x_0\|}|f(x_0)| \leq 1$, для всіх $f : \|f\|_v \leq 1$. Отож, одержуємо $|f(x_0)| \leq \frac{1}{e^{-r\|x_0\|}}$, для всіх $f : \|f\|_v \leq 1$. А це і означає, що

$$\sup_{\|f\|_v \leq 1} |f(x_0)| \leq \frac{1}{e^{-r\|x_0\|}},$$

тобто

$$\|\delta_{x_0}\|_{(\mathcal{H}_v(X))^*} \leq \frac{1}{e^{-r\|x_0\|}}.$$

Звідси маємо, що

$$e^{-r\|x_0\|} \leq \frac{1}{\|\delta_{x_0}\|_{(\mathcal{H}_v(X))^*}} = \tilde{w}(x_0).$$

Отже, якщо $v(x) = e^{-r\|x\|}$, візьмемо $w(x) = e^{-\frac{r}{2}\|x\|}$ і буде виконуватись нерівність:

$$v(x) = w^2(x) \leq \tilde{w}^2(x).$$

Таким чином, з теореми 1, випливає наступне твердження.

**Твердження 1.** *Зважений простір $\mathcal{H}V(X)$, де сім'я ваг $V = \{v_r\}$, $v_r = e^{-r\|x\|}, 0 < r \leq 1, r \in \mathbb{Q}$ є алгеброю Фреше.*

Позначимо

$$\|P\| = \sup\{|P(x)|, \|x\| \leq 1\}, P \in \mathcal{P}(^nX),$$

тоді

$$\|P\|_v = \sup_{x \in X} e^{-r\|x\|}|P(x)| = \sup_{x \in X} e^{-r\|x\|}|P\big(\frac{x}{\|x\|}\big)|\|x\|^n \leq \sup_{x \in X} e^{-r\|x\|}\|x\|^n\|P\| \leq n^n r^{-n} e^{-n}.$$

Отож, одержуємо

$$r^{-1}e^{-1}\|P\| \le \|P\|_v \le r^{-n}n^n e^{-n}\|P\|. \tag{1}$$

Нехай $\varphi$ є лінійним мультиплікативним функціоналом на $(\mathcal{H}V(X))'$. Позначимо через $\varphi_n$ звуження $\varphi$ на підпростір $n$-однорідних поліномів $\mathcal{P}_v({}^nX)$. Тоді $\varphi_n$ є обмеженим лінійним функціоналом на $\mathcal{P}_v({}^nX)$ і

$$\|\varphi_n\|_v = \sup\{|\varphi(P)| : P \in \mathcal{P}_v({}^nX), \|P\|_v \le 1\}.$$

Враховуючи нерівність (1), отримаємо

$$n^{-n}r^n e^n\|\varphi_n\| \le \|\varphi_n\|_v \le re\|\varphi_n\|.$$


[1] Bierstedt K.D., Bonet J., Galbis A. Weighted spaces of holomorphic functions on balanced domains. Michigan Math., 40 (1993), 271-297.

[2] Bierstedt K.D., Bonet J., Taskinen J. Associated weights and spaces of holomorphic functions. Studia Math., 127(2) (1998), 137-168.

[3] Garcia D., Maestre M., Rueda P. Weigted spaces of holomorphic functions on Banach spaces. Studia Math., 138(1) (2000), 5-16.

[4] Aron R.M., Cole B., Gamelin T.W. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space. J. Reine Angew. Math. 415, 51–93 (1991)

[5] Carando D., Sevilla-Peris, P. Math. Z. Spectra of weighted algebras of holomorphic functions 263: 887(2009)

# On the embeddings and closures of a topological $\lambda$-polycyclic monoid

**S. Bardyla, O. Gutik**

Faculty of Mathematics, National University of Lviv, Universytetska 1, Lviv, 79000, Ukraine

*sbardyla@yahoo.com, ovgutik@yahoo.com*

We prove that for every cardinal $\lambda \geqslant 2$ any continuous homomorphism from a topological semigroup $P_\lambda$ into an arbitrary countably compact topological semigroup is annihilating and there exists no a Hausdorff feebly compact topological semigroup which contains $P_\lambda$ as a dense subsemigroup. We give sufficient conditions when a topological inverse $\lambda$-polycyclic monoid $P_\lambda$ is absolutely $H$-closed in the class of topological inverse semigroups and construct an example of a topological inverse monoid $S$ which contains the polycyclic monoid $P_2$ as a dense discrete subsemigroup.

**Theorem 1.** *For every cardinal $\lambda \geqslant 2$ any continuous homomorphism from a topological semigroup $P_\lambda$ into a topological semigroup $S$ such that $S \times S$ is a Tychonoff pseudocompact space is annihilating, and hence $S$ does not contain the $\lambda$-polycyclic monoid $P_\lambda$.*

**Theorem 2.** *For arbitrary cardinal $\lambda \geqslant 2$ there exists no Hausdorff feebly compact topological semigroup which contains the $\lambda$-polycyclic monoid $P_\lambda$ as a dense subsemigroup.*

**Theorem 3.** *Let $\lambda$ be a cardinal $\geqslant 2$ and $\tau$ be a Hausdorff inverse semigroup topology on $P_\lambda$ such that $U(0) \cap L$ is an infinite set for every open neighborhood $U(0)$ of zero $0$ in $(P_\lambda, \tau)$ and every maximal chain $L$ of the semilattice $E(P_\lambda)$. Then $(P_\lambda, \tau)$ is absolutely $H$-closed in the class of topological inverse semigroups.*

[1] S. Bardyla and O. Gutik, *On a semitopological polycyclic monoid*, Algebra Discr. Math. **21** (2016), no. 2, 163–183.

[2] S. Bardyla and O. Gutik, *On a complete topological inverse polycyclic monoid*, Carpathian Math. Publ. (submitted), arXiv:1603.08147.

# О почти геодезических отображениях пространств аффинной связности

**В. Е. Березовский[1], Й. Микеш[2], Е. В. Черевко[3]**

[1]Уманский национальний университет садоводства, [2]Университет Палацкого, Оломоуц, Чехия, [3]Одесский национальный экономический университет, Одесса, Украина

*berez.volod@rambler.ru*
*josef.mikes@upol.cz*
*cherevko@usa.com*

Рассмотрим канонические почти геодезические отображения $\pi_2 : A_n \to \overline{A}_n$, которые удовлетворяют условию взаимности [1], [2]. Такие отображения характеризуются уравнениями:

$$P^h_{ij}(x) = \sigma_i(x)F^h_j(x) + \sigma_j(x)F^h_i(x), \tag{1}$$

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta^h_i \quad (e = \pm 1), \tag{2}$$

$$F^h_{i,j} = \gamma_i \delta^h_j + \mu_i F^h_j + \frac{e}{4} N^h_{i\alpha} F^\alpha_j, \tag{3}$$

$$\gamma_i + \mu_\alpha F^\alpha_i, \tag{4}$$

где $P^h_{ij}(x)$ – тензор деформации связностей, $\gamma_i(x)$, $\mu_i(x)$ – некоторые ковариантные векторы, $N^h_{ij}(x)$ – тензор Нейенхейеса $e$-структуры $F^h_i(x)$. Запятой мы обозначаем ковариантную производную, согласованную со связностью афинного пространства $A_n$.

Нами доказана

**Теорема 1.** *Если при почти геодезических отображениях второго типа, определяемых уравнениями (1)-(4), сохраняется тензор Римана, то ковектор $\sigma_i$ удовлетворяет условиям*

$$\sigma_{i,j} = \frac{e}{n-1} F^\beta_\alpha \big(B^\alpha_{i\beta k} - \frac{1}{n+1}\big(B^\alpha_{i\beta k} - B^\alpha_{k\beta i}\big)\big).$$

*Тензор $B^h_{ijk}$ имеет специальную структуру, и выражается через тензоры $\gamma_i$, $\mu_i$, $F^h_i$, $N^h_{ij}$.*

[1] Синюков Н. С. *Геодезические отображення римановых пространств* М., Наука, 1979 - 256 с.

[2] Mikeš J., Berezovski V. E., at al. *Differential geometry of special mappings*, Olomouc: Palacky University, 2015, 566 p.

# Об оценке площади образа круга

**В. В. Билет**[1], **Р. Р. Салимов**[2]

[1] Институт прикладной математики и механики НАН Украины, г. Славянск

[2] Институт математики НАН Украины, г. Киев

*biletvictoriya@mail.ru, ruslan623@yandex.ru*

Задача об искажении площадей при квазиконформных отображениях берет свое начало в работе Б. Боярского, см. [1]. Ряд результатов в этом направлении получен в работах [2], [3], [4]. Впервые верхняя оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии М. А. Лаврентьева, см. [5]. В монографии [6], см. предложение 3.7, получено уточнение неравенства Лаврентьева в терминах угловой дилатации.

Пусть $G$ – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Напомним, что отображение $f : G \to \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in G$, если в этой точке $f$ имеет полный дифференциал и его Якобиан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 \neq 0$. Гомеоморфизм $f$ класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ называется *регулярным*, если $J_f > 0$ почти всюду. Говорят, что гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{C}$ обладает *$N$-свойством* (Лузина), если для любого множества $E \subset G$ из условия $|E| = 0$ следует, что $|f(E)| = 0$. Далее полагаем

$$B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}, \quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}.$$

**Теорема 1. (см. [7])** *Пусть $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ — регулярный гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$, обладающий $N$-свойством. Тогда при $p = 2$ имеет место оценка*

$$|f(B_r)| \leqslant \pi \exp\left\{-4\pi \int\limits_r^1 \frac{dt}{\delta_p(t)}\right\},$$

*а при $p > 2$ —*

$$|f(B_r)| \leqslant \pi \left(1 + (2\pi)^{p-1}(p-2)\int\limits_r^1 \frac{dt}{\delta_p(t)}\right)^{-\frac{2}{p-2}},$$

*где*

$$\delta_p(r) = \left(\int\limits_{\gamma_r} D_p^{\frac{1}{p-1}}(z)\,|dz|\right)^{p-1}, \quad \gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$$

*и*

$$D_p(z) = \frac{|f_\theta(re^{i\theta})|^p}{r^p J_f(re^{i\theta})},\ z = re^{i\theta},\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

*— $p$-угловая дилатация.*

[1] Боярский Б. В., *Гомеоморфные решения систем Бельтрами* // ДАН СССР. – 1955. – № 102. – С. 661 – 664.

[2] Astala K., *Area distortion of quasiconformal mappings* // Acta Math. – 1994. – V. 173. – P. 37 – 60.

[3] Eremenko A., Hamilton D. H., *On the area distortion by quasiconformal mappings* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1995. – V. 123. – P. 2793 – 2797.

[4] Gehring F. W., Reich E., *Area distortion under quasiconformal mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. – 1966. – V. 388. – P. 1 – 15.

[5] Лаврентьев М. А., *Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа*, М., 1962, 136 с.

[6] Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V., *Infinitesimal Geometry of Quasiconformal and Bi-Lipschitz Mappings in the Plane*, Tracts in Mathematics 19, Warsaw - Donetsk - Helsinki, 2013, 216 p.

[7] Bilet V., Salimov R., *The estimation of the area of a disk image for Sobolev classes*, arXiv:1604.07618, 6 p. (in Russian).

# Застосування ізотопних функцій

**О. П. Бондар**

КЛА НАУ

*bondarkla@ukr.net*

В.В.Шарко [1] довів збіг гомологічних інваріантів правильних мінімальних функцій Морса на однозв'язному замкненому многовиді, застосувавши ізотопність функцій Морса. Він вказав необхідну і достатню умову спряженості (по суті, - ізотопності) таких функцій на многовидах вимірності, більшої за 5.

Ізотопні функції [4], що узагальнюють ізотопні функції Морса, є одним з інструментів розв'язання проблеми [2] приналежності функцій одній орбіті під дією групи

$$G_{Diff} = Diff(M) \times Diff_+(R^1),$$

що діє на множині $C^\infty(M)$ всіх диференційовних функцій на $M$ наступним чином: $(H,h)f = h \circ f \circ H^{-1}$, де $H \in Diff(M)$ - група дифеоморфізмів многовиду $M$, $h \in Diff_+(R^1)$ - дифеоморфізми прямої $R^1$, що зберігають орієнтацію, $f \in C^\infty(M)$.

**Твердження 1.** *Ізотопні функції $f_0$ і $f_1$, породжені ізотопією $H_t(0 \le t \le 1)$ (Азимов [3]) n-вимірного многовиду зі звичайними ручками індексів $\lambda$ і $\lambda+1$, приклеєними незалежно, та многовиду з круглою ручкою індексу $\lambda(\lambda > 0)$, не належать одній орбіті під дією групи $G_{Diff}$. А саме, при $0 \le t < t_1$ функція $f_t$ має дві невироджені критичні точки, в околі яких у відповідній системі координат*

$$f_t = -x_1^2 - ... - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + ... + x_n^2$$

*для однієї критичної точки і*

$$f_t = -x_1^2 - ... - x_\lambda^2 - x_{\lambda+1}^2 + x_{\lambda+2}^2 ... + x_n^2$$

*для іншої,*

*при $t_1 < t < t_2$ функція $f_t$ має одну вироджену критичну точку, в околі якої*

$$f_t = x_1(-x_1^2 - ... - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + ... + x_n^2),$$

*при $t_2 < t \le 1$ функція $f_t$ має одне критичне коло, в нормальному перерізі кожної точки якого*

$$f_t = -x_1^2 - ... - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + ... + x_{n-1}^2.$$

[1] В.В.Шарко, *Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты)*,-Киев: Наук. думка, (1990), 296с.

[2] В.В.Шарко. *Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях*,-Укр. мат. журн.-55,N.5,(2003),-С.687-700.

[3] D.Asimov. *Round handles and non-singular Morse-Smale flows*, Ann. Math. -102,N.1,(1975),-P.41-54.

[4] О.П.Бондарь. *Об определении изотопных функций*,-Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі - 2015 (2015), С.67.

# Classification of pairs of linear mappings up to topological equivalence

**N.V. Budnytska, T.V. Rybalkina**
Institute of Mathematics, Kyiv, Ukraine
*nadya_vb@ukr.net, rybalkina_t@ukr.net*

We consider pairs of linear mappings $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ of the form

$$V \underset{\mathcal{B}}{\overset{\mathcal{A}}{=\!=\!=}} W \tag{1}$$

in which $=\!=\!=$ is $\rightleftarrows$ or $\rightrightarrows$; $V$ and $W$ are finite dimensional unitary or Euclidean spaces. We say that the pair of linear mappings (1) transforms to

$$V' \underset{\mathcal{B}'}{\overset{\mathcal{A}'}{=\!=\!=}} W'$$

(with the same orientation of arrows) by bijections $\varphi_1 : V \to V'$ and $\varphi_2 : W \to W'$ if

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}'\varphi_1 = \varphi_2\mathcal{A} \ \text{ and } \ \mathcal{B}'\varphi_2 = \varphi_1\mathcal{B} & & \text{for the case } \rightleftarrows \\ \mathcal{A}'\varphi_1 = \varphi_2\mathcal{A} \ \text{ and } \ \mathcal{B}'\varphi_1 = \varphi_2\mathcal{B} & & \text{for the case } \rightrightarrows \end{array}$$

We say that two pairs of linear mappings $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ and $(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$ are *linearly equivalent* if $\varphi_1$ and $\varphi_2$ are linear bijections and *topologically equivalent* if $\varphi_1$ and $\varphi_2$ are homeomorphisms.

Classification of pairs of linear mappings up to linear equivalence follows from [1] for the case $\rightleftarrows$ and from [2] (Section XII) for the case $\rightrightarrows$.

Classification of pairs of linear mappings up to topological equivalence is obtained in [4] for the case $\rightleftarrows$ and in [3] for the case $\rightrightarrows$.

[1] N. M. Dobrovoloskaya, V. A. Ponomarev, *A pair of counter operators*, Uspehi Mat. Nauk **20** (no. 6) (1965), 80–86 (in Russian).

[2] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, vol. 2, AMS Chelsea, 2000.

[3] V. Futorny, T. Rybalkina, V. V. Sergeichuk, *A regularizing decomposition of matrix pencils and a topological classification of pairs of linear mappings*, Linear Algebra Appl. **450** (2014), 121-137.

[4] T. V. Rybalkina, *Topological classification of pairs of counter linear maps*, Mat. Stud. **39** (2013), 21-28 (in Ukrainian).

# Sharp estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane

**L. Vygivska, I. Denega**

Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv

*ludmila@ukr.net, iradenega@yandex.ru*

The report is devoted to investigation of one problem of geometric function theory of a complex variable. Let $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ be a set of natural and real numbers, respectively, $\mathbb{C}$ be a complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ be a one point compactification and $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

**Definition 1.** A finite set of arbitrary domains $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ such, as $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$ is called a system of non-overlapping domains.

Denote for different points $a_k$, $k = \overline{1, n}$ on the unit circle

$$\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad k = \overline{1, n}.$$

**Definition 2.** Let

$$r(B, a) = \begin{cases} \exp(\lim\limits_{z \to a}(g_B(z, a) + \log|z - a|)), & a \neq \infty \\ \exp(\lim\limits_{z \to a}(g_B(z, a) - \log|z|)), & a = \infty \end{cases}$$

be a inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to the point $a \in B$, $g_B(z, a)$ is Green's function for the domain $B$. Inner radius is a generalization of conformal radius for multiply connected domains.

Consider an extremal problem which was formulated in 1994 in the paper [1, P. 68, N 9.2] in the list of unsolved problems and then repeated in 2014 in monograph [2, P. 330, N 16].

**Problem 1.** Consider the product

$$I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k),$$

where $B_0$, $B_1$,...,$B_n$ $(n \geq 2)$ are pairwise disjoint domains in $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, and $0 < \gamma \leq n$. Show that it attains its maximum at a configuration of domains $B_k$ and points $a_k$ possessing rotational $n$-symmetry.

The proof is due to Dybinin for $\gamma = 1$ [3] and to Kuz'mina for $0 < \gamma < 1$ [4]. Kovalev [5] solved this problem under the additional assumption that the angles between neighbouring line segments $[0, a_k]$ do not exceed $2\pi/\sqrt{\gamma}$ and $n \geq 5$. We obtained estimate of the product $I_n(\gamma)$ for some $\gamma > n$.

**Theorem 1.** *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_4 = 4,17$, $\gamma_5 = 5,71$, $\gamma_6 = 7,5$, $\gamma_7 = 9,53$, $\gamma_8 = 11,81$ and $\gamma_n = 0,12\,n^2$ if $n \geqslant 9$. Then for any system of different points which lie on the unit circle $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, such that $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ and any system of non-overlapping domains $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, the following inequality holds*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{1}$$

*Equality sign is attained if* $a_k$ *and* $B_k$, $k=\overline{0,n}$, *are, respectively, poles and circular domains of the quadratic differential*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

The Theorem 1 strengthens main result of the paper [5]. Taking into account Theorem 1 we have the following statements.

**Corollary 1.** *[5] Let* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 5$, $\gamma\in(0,\gamma_n]$, $\gamma_n=n$. *Then for any system of different points which lie on the unit circle* $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, *such that* $0<\alpha_k\leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{1,n}$ *and any system of non-overlapping domains* $B_k$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, *the following sharp estimate holds (1), where equality sign is attained in the same case as in Theorem 1.*

**Corollary 2.** *[6] Let* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 4$, $\gamma\in(0,\gamma_n]$, $\gamma_n=n$. *Then for any system of different points which lie on the unit circle* $|a_k|=1$, $k=\overline{1,n}$, *such that* $0<\alpha_k\leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k=\overline{1,n}$ *and any system of non-overlapping domains* $B_k$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, *the following inequality holds (1), where equality sign is attained in the same case as in Theorem 1.*


[1] V. N. Dubinin, *Symmetrization method in geometric function theory of complex variables.* Successes Mat. Science. **49**, no.1 (295), 3–76, 1994 (in Russian); translation in Russian Math. Surveys, 49, no.1, 1–79, 1994.

[2] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014.

[3] V. N. Dubinin, *Separating transformation of domains and problems on extremal decomposition.* Notes scientific. sem. Leningr. Dep. of Math. Inst. AN USSR. **168**, 48–66, 1988 (in Russian); translation in J. Soviet Math. 53, no.3, 252–263, 1991.

[4] G. V. Kuzmina, *Extremal metric method in problems of the maximum of product of powers of conformal radii of non-overlapping domains with free parameters.* Notes scientific. sem. Leningr. Dep. of Math. Inst. AN USSR. **302**, 52–67, 2003 (in Russian); translation in Journal of Mathematical Sciences (New York), 129:3, 3843–3851, 2005.

[5] L. V. Kovalev, *On the problem of extremal decomposition with free poles on a circle.* Dal'nevostochnyi Mat. Sb., 2, 96–98, 1996 (in Russian).

[6] A. K. Bakhtin, I. V. Denega, *Addendum to a theorem on extremal decomposition of the complex plane*, Bulletin de la société des sciences et des lettres deŁódź, Recherches sur les déformations, V. LXII, no.2, 83–92, 2012.

# Варіанти комутативних зв'язок

**О. Десятерик**
КНУ ім. Тараса Шевченка (аспірант)
*sasha.desyaterik@gmail.com*

Нехай $a$ — фіксований елемент напівгрупи $S$. Для довільних $x, y \in S$ покладемо $x *_a y = xay$. Тоді $(S, *_a)$ є напівгрупою, яка називається варіантом напівгрупи $S$.

Задачу вивчення варіантів напівгруп вперше поставив Ляпін у відомій монографії [1]. Ляпін формулював задачу лише для напівгруп перетворень, незабаром різні автори почали вивчати варіанти багатьох інших класів напівгруп.

Теорема 1 встановлює критерій ізоморфності варіантів комутативних зв'язок з нулем. Далі цей критерій використано для опису варіантів кількох конкретних комутативних зв'язок з нулем. А саме, за допомогою цього критерію описані варіанти множини натуральних чисел з операціями $min(n, m)$ та НСД$(n, m)$, булеану нескінченної множини та решітки підпросторів зліченновимірного векторного простору.

Комутативна зв'язка $S$ є нижньою напіврешіткою відносно часткового порядку $a \leq b \Leftrightarrow ab = a$. Зауважимо, що варіанти скінченних напіврешіток вивчалися у [2].

Інтервалом $S_{[a,b]}$ комутативної зв'язки будемо називати множину

$$S_{[a,b]} = \{x \in S | x \cdot a = a,\ b \cdot x = x\}.$$

Нехай $a$ — фіксований елемент комутативної зв'язки $S$ з нулем. Для кожного елемента $x$ з інтервалу $S_{[0,a]}$ через $\Omega(x)$ позначимо множину $\{y \in S | a \cdot y = x\}$, а вагою $\omega(x)$ елемента $x$ назвемо потужність цієї множини: $\omega(x) = |\Omega(x)|$.

**Теорема 1.** *Два варіанти $(S, *_a)$ та $(S, *_b)$ комутативної зв'язки $S$ з нулем ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує ізоморфізм з інтервалу $S_{[0,a]}$ в інтервал $S_{[0,b]}$, який зберігає ваги усіх елементів. (Доведена у роботі [3])*

**Наслідок 1.** *Всі варіанти множини $N$ зі звичайним порядком є попарно не ізоморфними.*

Нехай $(N, |)$ — множина натуральних чисел, впорядкована відношенням подільності. Натуральному числу $n$, канонічний розклад якого має вигляд $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_m}$, поставимо у відповідність мультимножину $pow(n) = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ додатних показників його канонічного розкладу.

**Наслідок 2.** *Варіанти $((N, |), *_n)$ та $((N, |), *_t)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли мультимножини $pow(n)$ та $pow(t)$ збігаються.*

Нехай $(\mathfrak{B}(M), \subseteq)$ — булеан нескінченної множини $M$, тобто впорядкована за включенням множина всіх підмножин множини $M$.

**Наслідок 3.** *Нехай $A$ і $B$ — підмножини множини $M$. Варіанти $(\mathfrak{B}(M), *_A)$ та $(\mathfrak{B}(M), *_B)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли виконується одна з двох умов*:

(1) *множини $A$ і $B$ рівнопотужні і мають потужність меншу, ніж множина $M$*;

(2) *кожна з множин $A$ і $B$ рівнопотужна множині $M$, а їх доповнення $M \setminus A$ і $M \setminus B$ рівнопотужні.*

Нехай $\mathcal{L}(V)$ — впорядкована за включенням решітка підпросторів нескінченновимірного векторного простору $V$.

**Наслідок 4.** *Нехай $U$ і $W$ — підпростори векторного простору $V$. Варіанти $(\mathcal{L}(V), *_U)$ та $(\mathcal{L}(V), *_W)$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли виконується одна з двох умов*:

(1) *підпростори $U$ і $W$ мають однакову розмірність меншу, ніж розмірність простору $V$;*

(2) *кожен з підпросторів $U$ і $W$ має розмірність простору $V$, та корозмірності підпросторів $U$ та $W$ співпадають, тобто $dim(V/U) = dim(V/W)$.*


[1] Е.С.Ляпин, *Полугруппы*, Физматгиз. Москва, 1960.

[2] O. G. Ganyushkin , O. O. Desiateryk, *Variants of a semilattice*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Phisics & Mathematics — 2013. — V. 4. — C. 12–16.

[3] O. Desiateryk *Variants of commutative bands with zero*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Phisics & Mathematics — 2015. — V. 4. — P. 15–20.

# On the differences of the Nevanlinna coefficients of the radial projection of zeros and poles of a meromorphic function of completely regular growth in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

**O. Vyshynskyi**
Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine
*vyshynskyi@ukr.net*

Let $\lambda$ be a growth function of *moderate growth*, that is there exists positive $M$ such that $\lambda(2r) \le M\lambda(r)$ for all $r \ge 1$. Let $f$ be a meromorphic in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ function not vanishing identically, $\{b_j\}$ be the poles of $f$, $\gamma_j = \arg b_j$. Denote (see [1]) for $k \in \mathbb{Z}$

$$n_k^1(r,f) = \sum_{1<|b_j|\le r} e^{-ik\gamma_j}, \ n_k^2(r,f) = \sum_{\frac{1}{r}\le|b_j|<1} e^{-ik\gamma_j}, \ r > 1.$$

Let $N_k^i(r,f,1/f) = \int\limits_1^r \frac{n_k^i(t,1/f) - n_k^i(t,1/f)}{t}dt$, $i = 1,2, r \ge 1$. Consider the value

$$\triangle N_k(r,f,1/f) = N_k^1(r,f,1/f) - N_k^2(r,f,1/f), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

The functions $n_k(r,1/f)$ and $n_k(r,f)$ are also known as *the Fourier-Stieltjes coefficients of the radial projection* of the zeros and poles of function $f$. While the functions $N_k(r,1/f)$ and $N_k(r,f)$ can also be called *the Nevanlinna coefficients of the radial projection* of the zeros and poles of function $f$. For a given meromorphic in $\mathbb{C}^*$ function $f$, as $r$ tends to $+\infty$ the functions $\triangle N_k(r,f)$ in some general sense describe the difference in the distribution of zeros and poles while approaching the origin $z = 0$ and the point at infinity $z = \infty$.

For completely regularly growing in $\mathbb{C}^*$ function $f$ ([1]), a sufficient condition for the existence of limits of $\dfrac{\triangle N_k(r,f,1/f)}{\lambda(r)}$ on some sequences $\{r_j\}, r_j \to \infty$, as well as relations for these quantities are obtained.

These relations also allow to establish a connection between the growth indicators (see [1]) of $f$.

[1] M. Goldak, A. Khrystiyanyn, *Holomorphic functions of completely regular growth in the punctured plane* // Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech. Math., 2011, Issue 75, p. 91-96. (in Ukrainian)

# Про властивості і застосування $W^n$-зображення точок одиничного гіперкуба

**В. Волошина**

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

*wictorria@gmail.com*

**Вступ**. Дослідження висвітлює нові ймовірнісні феномени, отримані при узагальненні на $n$-вимірний випадок результатів М. В. Працьовитого та Г. М. Торбіна про властивості розподілів випадкових величин типу Джессена-Вінтнера, зокрема породжених незалежними символами $Q$- та $Q^*$-зображень. У роботах О.В. Школьного [6] показано, що за умови виконання $N$-властивості, виконуються розширення теореми Джессена–Вінтнера та Леві $[3, 5]$ про чистоту розподілу випадкового вектора з незалежними символами $W^n$-зображення та його неперервність. При цьому, зокрема, за умови існування більш ніж зчисленної кількості $W^2$-зображень для хоча б однієї точки квадрата $E^2$, такі наслідки не матимуть місця.

Нами було досліджено ряд найважливіших властивостей $W^n$-зображення, а також отримано необхідну й достатню умову абсолютної неперервності розподілу випадкового вектора з незалежними символами $W^n$-зображення.

**1. $W^n$-зображення точок $n$-вимірного одиничного гіперкуба.** Розглянемо $n$-вимірний ($n \geq 2$) одиничний гіперкуб $E^n = [0;1] \times [0;1] \times ... \times [0;1] \subset R^n$. Виконаємо поділ $E^n$ на $r$ ($r \geq 2$) замкнених просторі $R^n$ множин $\Delta_0^{W^n}, \Delta_1^{W^n}, ..., \Delta_{r-1}^{W^n}$. Ці множини назвемо циліндрами першого рангу. При цьому мають виконуватися умови:

$$\bigcup_{i=0}^{r-1} \Delta_i^{W^n} = E^n,\ \lambda\left(\Delta_i^{W^n} \bigcap \Delta_j^{W^n}\right) = 0,\ i \neq j,\ i,j \in \overline{0, r-1},$$

$$\lambda\left(\Delta_0^{W^n}\right) : \lambda\left(\Delta_1^{W^n}\right) : ... : \lambda\left(\Delta_{r-1}^{W^n}\right) = q_0 : q_1 : ... : q_{r-1},$$

де $q_i > 0$, $\sum\limits_{i=0}^{r-1} q_i = 1$, а $\lambda$ – $n$-вимірна міра Лебега.

Всі отримані на першому кроці множини, тобто $\Delta_{\alpha_1}^{W^n}$, де $\alpha_1 \in \overline{0, r-1}$ на другому кроці діляться на $r$ частин, замкнених у $R^n$: $\Delta_{\alpha_1 0}^{W^n}$, $\Delta_{\alpha_1 1}^{W^n}$, ..., $\Delta_{\alpha_1 [r-1]}^{W^n}$. Ці множини назвемо циліндрами другого рангу. Поділ виконується так, щоб:

$$\bigcup_{i=0}^{r-1} \Delta_{\alpha_1 i} = E^n,\ \lambda\left(\Delta_{\alpha_1 i}^{W^n} \bigcap \Delta_{\alpha_1 j}^{W^n}\right) = 0,\ i \neq j,\ i,j \in \overline{0, r-1},$$

$$\lambda\left(\Delta_{\alpha_1 0}^{W^n}\right) : \lambda\left(\Delta_{\alpha_1 1}^{W^n}\right) : ... : \lambda\left(\Delta_{\alpha_1 [r-1]}^{W^n}\right) = q_0 : q_1 : ... : q_{r-1}$$

для довільного фіксованого $\alpha_1$.

На $k$-му ($k \in \mathbb{N}$) кроці кожна множина $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1}}^{W^n}$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1} \in \overline{0, r-1}$ (тобто, довільний циліндр $k$-го рангу) знову ділиться на $r$ частин:

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} 0}^{W^n}, \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} 1}^{W^n}, ..., \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{k-1} [r-1]}^{W^n}.$$

Отримані множини ми назвемо циліндрами k-го рангу $W^n$-зображення точок одиничного гіперкуба. Кожна з яких має бути замкненою в $R^n$.

При цьому для довільного фіксованого набору $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1} \in \overline{0, r-1}$ мають виконуватися умови:

1. $\bigcup\limits_{i=0}^{r-1} \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} i} = \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}}$.

2. $\lambda \left( \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} i} \bigcap \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} j} \right) = 0,\ i \neq j.$

3. $\lambda \left( \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} 0} \right) : \lambda \left( \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} 1} \right) : \ldots : \lambda \left( \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1} [r-1]} \right) = q_0 : q_1 : \ldots : q_{r-1}.$

4. $diam \left( \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \right) \to 0,\ k \to \infty.$

Для вказаного вище розбиття одиничного гіперкуба $E^n$ виконуються теореми 1,2.

**Теорема 1.** *Для довільної послідовності* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}, \alpha_k \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} := \{0, 1, ..., r-1\}$ *існує послідовність* $\Delta^{W^n}_{\alpha_1} \supset \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \alpha_2} \supset \ldots \supset \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k} \supset \ldots$ *та єдина точка* $x$ *така, що*

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}.$$

**Теорема 2.** *Для довільного фіксованого* $x$ *з* $E^n$ *існує послідовність символів* $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *така, що:*

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{W^n}_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \ldots \alpha_k(x)} =: \Delta^{W^n}_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \ldots \alpha_k(x) \ldots}.$$

*Останній вираз називається* $W^n$*-представленням точки* $x$.

Частинним випадком вказаного розбиття є розбиття одиничного квадрата у двовимірному евклідовому просторі у роботах [4, 6]. Отримане зображення точок одиничного гіперкуба, таким чином, є узагальненням $Q-$зображення дійсного числа з одиничного відрізка на $n-$вимірний випадок.

**2. Про проблему чистоти розподілів випадкових векторів з незалежними символами $W^n$-зображення**. Виберемо і зафіксуємо довільне $W^n$-зображення із алфавітом $A = \{0, 1, 2, ..., r-1\}$ і розглянемо об'єкт виду

$$\xi = \Delta^{W^n}_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \ldots},$$

де $\xi_k$ - незалежні випадкові величини з наступними розподілами:

| $\xi_k$ | $0$ | $1$ | $2$ | ... | $n-1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_{ik}$ | $p_{0k}$ | $p_{1k}$ | $p_{2k}$ | ... | $p_{[n-1]k}$ |

**Означення.** Нехай

$$\xi = \Delta^{W^n}_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \ldots},$$

де $\xi_k$ - незалежні випадкові випадкові, які можуть набувати значення $i$ із алфавіту **A** фіксованого $W^n$-зображення з ймовірністю $p_{ik}$. Тоді $\xi$ називатимемо випадковим вектором, породженим незалежними символами $W^n$-зображення.

**Теорема 3.** *Відображення* $\xi$ *із вимірного простору* $(\Omega, S)$ *в* $(R^n, B)$ *є вимірним* .

**Гіпотеза 1.** Випадковий вектор

$$\xi = \Delta^{W^n}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

породжений незалежними символами $W^n$-зображення має чистий розподіл.

**Гіпотеза 2.** Випадковий вектор

$$\xi = \Delta^{W^n}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

породжений незалежними символами $W^n$-зображення має чисто неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max p_{ik} = 0$.

Для випадку $n = 2$ обидва твердження спростовані у загальному виді у [4].

Вище стверджувалось, що відображення $\xi$ є вимірним. Як нескладно показати $\xi$ є і бівимірним і для нього діє узагальнення теореми Какутані з [1]. Нехай $\Omega_k = \{0, 1, ..., n-1\}$, $S_k = 2^{\Omega_k}$,

$$P_k(i) := p_{ik},\ \forall i \in \Omega_k, P_k(L) := \sum_{i \in L} P_k(i),\ \forall L \in S_k,$$

$$\nu_k(i) := q_i,\ \forall i \in \Omega_k, \nu_k(L) := \sum_{i \in L} \nu_k(i),\ \forall L \in S_k$$

і

$$(\Omega, S, P) := \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, S_k, P_k),$$

$$(\Omega, S, \nu) := \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, S_k, \nu_k).$$

Нехай n-вимірна міра Лебега на $E^n$ співпадає з образом міри $\nu$ при відображенні $\xi$, а ймовірнісна міра $P^* = \mu_\xi$, що відповідає випадковому вектору $\xi$, є образом міри $P$ при відображенні $\xi$:

$$P^*(U) = \mu_\xi(U) = P(\xi^{-1}(U)),\ \forall U \in \mathcal{B},$$

$$\lambda(U) = \nu^*(U) = \nu(\xi^{-1}(U)),\ \forall U \in \mathcal{B}.$$

**Теорема.** *Припустимо, що $\nu_k$ () є абсолютно неперервною відносно міри $\mu_k$. Тоді міра $\mu$ є або чисто абсолютно неперервною відносно міри $\mu$ або чисто сингулярною (включаючи дискретний випадок). Більше того,*

$$\nu \ll \mu \text{ тоді і тільки тоді, коли} \prod_{k=1}^{\infty} \rho(\mu_k, \nu_k) > 0, \tag{1}$$

*де* $\rho(\mu_k, \nu_k) = \int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\nu_k}{d\mu_k}} d\mu_k$.

**Зауваження.** Вираз $\int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\nu_k}{d\mu_k}} d\mu_k$ співпадає з інтегралом Хеллінгера $[1, 2]$.

**Наслідок 1.** *Розподіл випадкового вектора $\xi$ з незалежними символами $W^n$-розкладу є сингулярним відносно міри Лебега тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{p_{ik}q_i)}\right)=0. \tag{2}$$


[1] Albeverio S., Torbin G. Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions. Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 248-264.

[2] Kakutani S. Equivalence of infinite product measures, Ann. of Math., 49(1948), 214-224.

[3] Lévy P. Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes. Studia Math. **3**(1931), 119-155.

[4] Волошина В.О., Торбін Г.М.Про деякі ймовірнісні феномени, пов'язані з розподілами випадкових векторів, породжених $W$ -зображенням. Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. - 2014, - № 16 (1). - С. 258–278.

[5] М.В. Працьовитий. Фрактальний підхід до дослідження сингулярних розподілів. Національний педагогічний університет, Київ, 1998. — 296с.

[6] Школьний О.В. Комплекснозначні випадкові величини типу Джессена-Вінтнера: дис. на здоб. ступ. канд. фіз.-мат. наук. НАН України, ІМ, Київ, 2000 – 115 с.

# До задачі про тінь

**І. Ю. Виговська[1], Х. К. Дакхіл[2]**
[1]Інститут математики НАНУ, Київ, Україна [2]Київський національний університет імені Т.Г.Шевченка, Київ, Україна
*vkirinata@gmail.com*[1], *moon5385@gmail.com*[2]

В доповіді досліджуються деякі варіанти задачі про тінь [1-3], що еквівалентно знаходженню умов належності точки узагальнено опуклій оболонці сім'ї компактних множин.

**Задача** (про тінь). Яка мінімальна кількість замкнутих куль, що попарно не перетинаються з центрами на сфері $S^{n-1}$ і радіуса меншого від радіуса сфери досить щоб будь яка пряма, що проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль?

Встановлено достатні умови для того щоб система куль сталого радіуса з центрами на сфері $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ задавала тінь в центрі сфери.

**Означення.** Скажемо, що множина $E \subset \mathbb{R}^n$ опукла відносно променя з точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, якщо знайдеться промінь $P$, такий що $x \in P$ і $P \cap E = \varnothing$.

**Теорема 1.** *Існує система з 11 куль сталого радіуса з центрами на сфері* $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, *яка забезпечує тінь в центрі сфери.*

**Теорема 2.** *Існує система з 32 куль сталого радіуса з центрами на сфері* $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, *яка буде опуклою відносно променя з центра сфери.*

[1] Ю. Зелинский, И. Выговская, М. Стефанчук *Обобщённо выпуклые множества и задача о тени*, Український математичний журнал, **67**, №12, 2015, С.1659-1666.

[2] Y. Zelinskii, *Generalized Convex Envelopes of Sets and the Problem of Shadow*, Journal of Mathematical Sciences, (2015), **211**, No.5, P. 710-717.

[3] Г. Худайберганов, *Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров* Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772, - 85 Деп.

# Self-linked sets of groups

**V. Gavrylkiv**
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
*vgavrylkiv@gmail.com*

In the talk we shall discuss some properties of self-linked subsets of groups. By definition, a subset $A$ of a group $G$ is *self-linked* if $A \cap gA \neq \emptyset$ for each $g \in G$.

**Proposition 1.** *A subset $A \subset G$ of a group $G$ is self-linked if and only if $AA^{-1} = G$.*

In fact, this notion can be defined in the more general context of $G$-spaces. By a *$G$-space* we understand a set $X$ endowed with a left action $G \times X \to X$ of a group $G$. Each group $G$ will be considered as a $G$-space endowed with the left action of $G$. An important example of a $G$-space is the homogeneous space $G/H = \{gH : g \in G\}$ of a group $G$ by a subgroup $H \subset G$.

A subset $A \subset X$ of a $G$-space $X$ defined to be *self-linked* if $A \cap gA \neq \emptyset$ for all $g \in G$.

For a $G$-space $X$ by $sl(X)$ we denote the smallest cardinality $|A|$ of a self-linked subset $A \subset X$. Some lower and upper bounds for $sl(G)$ are established in the following proposition.

**Proposition 2.** *Let $G$ be a finite group and $H$ be a subgroup of $G$. Then*

1) $sl(G) \geq (1 + \sqrt{4|G| - 3})/2$;

2) $sl(G) \leq sl(H) \cdot sl(G/H) \leq sl(H) \cdot \lceil (|G/H| + 1)/2 \rceil$.

3) $sl(G) < |H| + |G/H|$.

We use these lower and upper bounds to characterize groups $G$ with $sl(G) \geq |G|/2$ in the following theorem.

**Theorem 1.** *For a finite group $G$*

1) $sl(G) = \lceil (|G| + 1)/2 \rceil > |G|/2$ *if and only if $G$ is isomorphic to one of the groups:* $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_2 \times C_2$, $C_5$, $D_6$, $(C_2)^3$;

2) $sl(G) = |G|/2$ *if and only if $G$ is isomorphic to one of the groups:* $C_6$, $C_8$, $C_4 \times C_2$, $D_8$, $Q_8$.

**Theorem 2.** *For a group $G$ the following conditions are equivalent:*

1) *for any partition $G = A \cup B$ either $AA^{-1} = G$ or $BB^{-1} = G$;*

2) *each element of $G$ has odd order.*

We were able to calculate the cardinalities $sl(G)$ for cyclic groups $G = C_n$ of cardinality $|C_n| \leq 100$ and for dihedral groups $G = D_n$ of cardinality $|D_n| \leq 80$. Using these results we give a negative answer for the Problem 1.4(2) from [1].

The results of (computer) calculations are presented in the following tables (here $lb(G) = (1 + \sqrt{4|G| - 3})/2$):

| $\lvert C_n\rvert$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $lb(C_n)$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| $sl(C_n)$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 |

| $\lvert C_n\rvert$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $lb(C_n)$ | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| $sl(C_n)$ | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 7 | 8 |

| $\lvert C_n\rvert$ | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $lb(C_n)$ | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 |
| $sl(C_n)$ | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 8 | 9 | 9 | 9 |

| $\lvert C_n\rvert$ | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $lb(C_n)$ | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| $sl(C_n)$ | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 |

| $\lvert C_n\rvert$ | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $lb(C_n)$ | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| $sl(C_n)$ | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |

| $\lvert D_n\rvert$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $lb(D_n)$ | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| $sl(D_n)$ | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 9 |

| $\lvert D_n\rvert$ | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $lb(D_n)$ | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| $sl(D_n)$ | 10 | 10 | 11 | 10 | 11 | 11 | 12 | 11 | 12 | 12 | 13 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | 16 |


[1] T. Banakh, V. Gavrylkiv, O. Nykyforchyn *Algebra in superextension of groups, I: zeros and commutativity*, Algebra Discr. Math. (2008), no. 3, 1–29.

[2] T. Banakh, V. Gavrylkiv, *Algebra in the superextensions of twinic groups*, Dissert. Math. **473** (2010), 74 pp.

# Оцінки інтеграла від модуля мішаної похідної суми кратного тригонометричного ряду

**С. Б. Гембарська**

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк

*gembarskaya72@mail.ru*

В [1], а ще раніше в [2], С. О. Теляковським досліджувались ряди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{1}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx, \tag{2}$$

коефіцієнти яких прямують до нуля

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \tag{3}$$

і квазівипуклі, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\Delta^2 a_k\right| < \infty, \tag{4}$$

де $\Delta^2 a_k = \Delta a_k - \Delta a_{k+1} = a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$.

Добре відомо, що умови (3) та (4) забезпечують рівномірну збіжність рядів (1) та (2) на відрізку $[\varepsilon, \pi]$ при будь-якому $\varepsilon > 0$, а їх суми $f(x)$ і $g(x)$ відповідно — неперервно диференційовні на $(0, \pi]$

В [1] доведено теореми, що містять оцінки інтегралів від $|f'|$ і $|g'|$ взятих по відрізках $A_{l,m} := \left[\frac{\pi}{m+1}, \frac{\pi}{l}\right]$, $l, m \epsilon N$, $1 \le l \le m$, що дало змогу відслідковувати поведінку цих інтегралів при $m \to \infty$ і $l = 1$, а точніше, як зростають інтеграли від $|f'|$ і $|g'|$ по відрізках $[\varepsilon, \pi]$ при $\varepsilon \to +0$, якщо ці функції неінтегровні на $[-\pi, \pi]$ і як спадають інтеграли по відрізках $[0, \varepsilon]$ при $\varepsilon \to +0$, якщо функції $|f'|$ і $|g'|$ інтегровні на $[-\pi, \pi]$.

В доповіді мова буде йти про поширення результатів С. О. Теляковського із [1] на кратні (подвійні) тригонометричні ряди.

Нехай задано подвійний ряд

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma_{k_2}} a_{k_1,k_2} \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2, \tag{5}$$

де $\gamma_{k_2} = 1$ при $k_2 = 0$, $\gamma_{k_2} = 0$ при $k_2 \ne 0$, коефіцієнти якого задовольняють умову

$$a_k = a_{k_1,k_2} \to 0, \quad k_1 + k_2 \to \infty, \tag{6}$$

і квазівипуклі, тобто

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 \sum_{k_2=1}^{\infty} k_2 \left|\Delta^{2,2} a_{k_1,k_2}\right| < \infty, \tag{7}$$

де

$$\Delta^{1,0}a_{k_1,k_2}=a_{k_1,k_2}-a_{k_1+1,k_2},\quad \Delta^{0,1}a_{k_1,k_2}=a_{k_1,k_2}-a_{k_1,k_2+1},\quad \Delta^{1,1}a_{k_1,k_2}=\Delta^{1,0}\left(\Delta^{0,1}a_{k_1,k_2}\right),$$

$$\Delta^{2,0}a_{k_1,k_2}=\Delta^{1,0}a_{k_1,k_2}-\Delta^{1,0}a_{k_1+1,k_2},\quad \Delta^{0,2}a_{k_1,k_2}=\Delta^{0,1}a_{k_1,k_2}-\Delta^{0,1}a_{k_1,k_2+1},$$

$$\Delta^{2,2}a_{k_1,k_2}=\Delta^{1,1}\left(\Delta^{1,1}a_{k_1,k_2}\right).$$

В [2] С. О. Теляковський показав, що при виконанні умов (6) і (7) ряд (5) збігається за Принсхеймом (див. [3]) на $(0,\pi]\times(0,\pi]$ до функції $h(x)=h(x_1,x_2)$, тобто

$$\lim_{\min(n_1,n_2)\to\infty}\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}2^{-\gamma_{k_2}}a_{k_1,k_2}\sin k_1x_1\cos k_2x_2:=h\left(x_1,x_2\right);$$

збіжність цього ряду є рівномірною на $T_\varepsilon^2:=[\varepsilon_1,\pi]\times[\varepsilon_2,\pi]$ при будь-яких $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$, а його сума є неперервно диференційовною на $(0,\pi]\times(0,\pi]$.

Отже, основна задача полягає в оцінці інтегралів від $\left|\frac{\partial^2h(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}\right|$ взятих по множинах $P_{l,m}:=\left[\frac{\pi}{m_1+1},\frac{\pi}{l_1}\right]\times\left[\frac{\pi}{m_2+1},\frac{\pi}{l_2}\right],\ l_i,m_i\in N,\ 1\le l_i\le m_i,\ i=1,2$ в термінах символів від виразів, що визначаються лише за допомогою коефіцієнтів $a_k$ ряду (5) і параметрів $l_i,m_i,\ i=1,2$.

Справедливе твердження.

**Теорема 1.** *Якщо коефіцієнти ряду (5) задовольняють умови (6) і (7), то має місце оцінка*

$$\iint\limits_{P_{l,m}}\left|\frac{\partial^2h\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_1\partial x_2}\right|dx_1dx_2=O\left(\gamma_{l,m}\right),\tag{8}$$

*де*

$$\gamma_{l,m}:=\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\frac{k_1+1}{l_1}\sum_{k_2=l_2}^{m_2}u_{k_2}\left|\Delta^{1,0}\alpha_{k_1,k_2}\right|+\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min\left(k_1+1-l_1,m_1+1-l_1\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{k_2=l_2}^{m_2}u_{k_2}\left|\Delta^{2,0}\alpha_{k_1,k_2}\right|+\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{(k_1+1)}{l_1}\frac{k_2^2}{l_2^2}\left|\Delta^{1,1}\alpha_{k_1,k_2}\right|+$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min\left(k_1+1-l_1,m_1+1-l_1\right)\sum_{k_2=0}^{l_2-1}\frac{k_2^2}{l_2^2}\frac{m_2+1-l_2}{m_2}\left|\Delta^{2,1}\alpha_{k_1,k_2}\right|+$$

$$+\frac{m_1+1-l_1}{m_1}\sum_{k_1=0}^{l_1-1}\frac{k_1+1}{l_1}\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min\left(k_2+1-l_2,m_2+1-l_2\right)\left|\Delta^{1,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|+$$

$$+\sum_{k_1=l_1}^{\infty}\min\left(k_1+1-l_1,m_1+1-l_1\right)\sum_{k_2=l_2}^{\infty}\min\left(k_2+1-l_2,m_2+1-l_2\right)\left|\Delta^{2,2}\alpha_{k_1,k_2}\right|,$$

$$u_{k_2} := \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{k_2+1}}^{\frac{\pi}{k_2}} ctg\frac{x_2}{2}dx_2 = \ln\frac{\sin\frac{\pi}{2k_2}}{\sin\frac{\pi}{2(k_2+1)}},$$

$l_i, m_i \in N, 1 \leq l_i \leq m_i, i = 1, 2.$


[1] Теляковский С. А. Оценки интеграла от производной суммы тригонометрического ряда с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. — 1995. — 186.— С. 111–122.

[2] Теляковский С. А. Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. — 1964. — 63. — С. 426–444.

[3] Жижиашвили Л. В. Сопряженные функции и тригонометрические ряды. — Тбилиси: Изд–во Тбилис. ун–та, 1969. — 102 с.

# Ідемпотентно опуклі комбінації нескінченної кількості елементів

**І. Д. Глушак, О. Р. Никифорчин**

Прикарпатський національний університет ім.В.Стефаника, Івано-Франківськ

*inna.hlushak@pu.if.ua, nick@pu.if.ua*

Трійка $(X, \oplus, \otimes)$ називається $(I, max, *)$-*напівмодулем*(лівим ідемпотентним), якщо $X$ – це множина з операціями $\oplus : X \times X \to X$, $\otimes : I \times X \to X$, які для всіх $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in I$ мають властивості:

1. $x \oplus y = y \oplus x$;
2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
3. існує єдиний елемент $\bar{0} \in X$, такий що $x \oplus \bar{0} = x$ для всіх $x$;
4. $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$, $\max\{\alpha, \beta\} \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$;
5. $(\alpha * \beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x)$;
6. $1 \otimes x = x$;
7. $0 \otimes x = \bar{0}$.

Надалі замість $(I, max, *)$-напівмодуль будемо вживати термін $I$-напівмодуль.

$(X, \oplus, \otimes)$ – *компактний гаусдорфовий лоусонів $I$-напівмодуль*, якщо $(X, \oplus, \otimes)$ є $I$-напівмодулем, і на $X$ задано компактну гаусдорфову топологію, що робить його компактною лоусоновою верхньою напівграткою [1] з попарним супремумом $\oplus$ (і частковим порядком, визначеним як $x \le y \Leftrightarrow x \oplus y = y$), а множення $\otimes$ є неперервним. Така напівгратка є повною, а з існування найменшого елемента 0 випливає, що вона є повною граткою.

Для всіх $x_1, x_2, \dots x_n \in X$ та коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I$, що $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = 1$, задаємо *$I$-опуклу комбінацію* скінченної кількості елементів

$$\alpha_1 \otimes x_1 \oplus \alpha_2 \otimes x_2 \oplus \dots \oplus \alpha_n \otimes x_n,$$

яку надалі позначатимемо просто $\alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n$.

Її однозначно можна відновити за операцією попарної опуклої комбінації $x \oplus (\alpha \otimes y)$, яка є відображенням $X \times I \times X \to X$.

Замкнена $I$-опукла (тобто така, яка містить всі $I$-опуклі комбінації своїх елементів) підмножина компактного гаусдорфового лоусонового $I$-напівмодуля називається *$I$-опуклим компактом*. Можна дати рівносильне «внутрішнє» означення $I$-опуклого компакта, як компакта на якому визначено неперервну тернарну операцію попарної опуклої комбінації, що задовольняє природні алгебраїчні тотожності [2]. Такий компакт опукло вкладається у компактний гаусдорфів лоусонів $I$-напівмодуль.

Перевага компактних гаусдорфових лоусонових $I$-напівмодулів у тому, що можна коректно означити ідемпотентну опуклу комбінацію нескінченної кількості елементів, використовуючи скінченні опуклі комбінації

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i x_i = \inf\{\sup_{i \in \mathcal{I}_1} \alpha_i \otimes \sup_{i \in \mathcal{I}_1} x_i \oplus \dots \oplus \sup_{i \in \mathcal{I}_n} \alpha_i \otimes \sup_{i \in \mathcal{I}_n} x_i \mid n \in \mathbb{N}, \mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \dots \cup \mathcal{I}_n\},$$

яка неперервно залежить від своїх аргументів, якщо останні розуміти як замкнену множину у топологічному добутку компакта на одиничний відрізок.

**Теорема 1.** *Нехай $X$ — $I$-опуклий компакт, а* $\exp_1(X \times I)$ *позначає підпростір гіперпростору* $\exp(X \times I)$ *з топологією Вієторіса , що складається із замкнених множин в $X \times I$, які містять принаймні одну пару вигляду $(x, 1)$. Тоді відображення $h$ :* $\exp_1(X \times I) \to X$, *яке для $\mathcal{A} \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X \times I$ визначено формулою*

$$h(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \{\alpha_i x_i | (x_i, \alpha_i) \in \mathcal{A}\},$$

*є неперервним.*

Доведення теореми представлено в [3]. Отримані результати є важливими при розв'язанні задач наближень неадитивних мір (ємностей) на компакті, оскільки апроксимуючі ємності в багатьох випадках [4] є ідемпотентними опуклими комбінаціями у компактному напівмодулі, яким є простір ємностей на компакті.


[1] Lawson J.D. *Topological semilattices with small semilattices* , J.Lond. Math.Soc. – 1969. – №11. – 719-724.

[2] Никифорчин О.Р. *Простори неадитивних мір: категорії і топологічні властивості*: дис. д-ра фіз.-мат. наук : 01.01.04 / Никифорчин Олег Ростиславович ; Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка. - Л., 2012. - 410 с.

[3] І.Д. Глушак, О.Р.Никифорчин *Неперервність ідемпотентно опуклої комбінації нескінченної кількості елементів I-опуклого компактна*, Прикарпатський вісник НТШ. Число. - 2016. - №1(33), 152-156.

[4] Hlushak I.D., Nykyforchyn O.R. *Continuous approximations of capacities on metric compacta*, Carpathian Mathematical Publications, Vol 8, №1 (2016), 44-50.

# Atoms of saddle critical level line of smooth functions on surfaces with boundary

**B. I. Hladysh**
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
*biv92@ukr.net*

In the work [1] was found the local representation of smooth function in some neighborhood of non-degenerated critical point on the boundary of the manifold. Also in the work [2] there is the theorem which gives the topological classification of smooth function around critical point on the closed manifold.

Let $M$ be a smooth surface with the boundary $\partial M$, $f$ — smooth function, defined on $M$.

**Theorem 1.** Let $p_0 \in \partial M$ is isolated critical point of function $f$ and also of its restriction to the boundary $f|_{\partial M}$. Then exists the neighborhood $U(p_0)$ of point $p_0$, such that $p_0 = (0,0)$ is origin and function $f$ is topologically equivalent with the function $g(x,y) = Re(x+iy)^k$, $y \geq 0$ for some integer $k, k \geq 1$.

Further we will suppose that $p_0$ is saddle critical points which satisfies the conditions of theorem 1 and $f(p_0) = 0$.

Smooth functions $f$ and $g$ are *topological equivalent* in some neighborhood of their critical level lines $f^{-1}(c_1)$ and $g^{-1}(c_2)$ if there are exist $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ and the homeomorphism $\lambda : f^{-1}(c_1 - \varepsilon_1, c_1 + \varepsilon_1) \to g^{-1}(c_2 - \varepsilon_2, c_2 + \varepsilon_2)$, which transfer level lines of function $f$ into level lines of function $g$ and save the direction of growing of functions.

*Atom* is the class of topological equivalence of restriction of function $f$ to the set $f^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$.

Then we consider the neighborhood of point $p_0$, which is limited by $f^{-1}(-\varepsilon)$, $f^{-1}(\varepsilon)$ (for some $\varepsilon > 0$), some trajectories of gradient field and by the boundary of the manifold. This neighborhood can be represented in the view of polygon with $k+1$ sides. After continuation of previously described neighborhood, we get $(k+1)$–polygon, some sides of which are clued.

**Theorem 2.** 1. Each atom of saddle critical point coincide with the atom $A_{\tau^{(k)}}$ for some substitution $\tau^{(k)}$ on the set $\{1, 2, \ldots, k\}$, which determine the cluing of the sides.

2. The number of atoms $A_{\tau^{(k)}}$ can be calculated from the following formula:

$$N_1 = 1, N_2 = 2, N_3 = 4, N_k = 2\sum_{j=1}^{k-3} P_j^{(k)} + P_{k-2}^{(k)}$$

where $P_j^{(k)}, j = \overline{1, k-2}$ is the set of sequences of numbers, which depend on $k$ and are defined by the recurrent correlation: $P_0^{(k)} = 1$, $P_1^{(k)} = k-1$, $P_2^{(k)} = k-2$, $P_j^{(k)} = (P_0^{(k)} + P_1^{(k)} + \ldots + P_{j-2}^{(k)})(k-j)$, $j \in \overline{3, k-2}$.

[1] Hladysh B.I., Prishlyak O.O. *Functions with non-degenerated critical points on the boundary of the surface (in Ukrainian)* Ukr. Mat. Zh. **68** (2016), no. 1, 28–37.

[2] Prishlyak O.O. *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface* Topology and its application **119** (2002), no. 3, 257–267.

# Determinants of Hessenberg matrices whose entries are $h(x)$–Fibonacci polynomials

**T. P. Goy**

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk

*tarasgoy@yahoo.com*

A large class of polynomials can also be defined by Fibonacci-like recurrence relations such yields Fibonacci numbers. Such polynomials are called Fibonacci polynomials [1]. Nalli and Haukkanen [2] introduced the $h(x)$–Fibonacci polynomials $F_{hn}(x)$ are defined by the recurrence relation

$$F_{h,n+1}(x) = h(x)F_{hn}(x) + F_{h,n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

with initial conditions $F_{h0}(x) = 0$, $F_{h1}(x) = 1$, where $h(x)$ is polynomial with real coefficients.

Let $P_{hn}(x)$, $Q_{hn}(x)$, $R_{hn}(x)$ be an $n \times n$ Hessenberg matrices given for all $n \geq 1$ by

$$P_{hn}(x) = \begin{pmatrix} F_{h1}(x) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ F_{h2}(x) & F_{h1}(x) & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ F_{h,n-1}(x) & F_{h,n-2}(x) & \cdots & F_{h1}(x) & 1 \\ F_{hn}(x) & F_{h,n-1}(x) & \cdots & F_{h2}(x) & F_{h1}(x) \end{pmatrix},$$

$$Q_{hn}(x) = \begin{pmatrix} F_{h1}(x) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ F_{h3}(x) & F_{h1}(x) & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ F_{h,2n-3}(x) & F_{h,2n-5}(x) & \cdots & F_{h1}(x) & 1 \\ F_{h,2n-1}(x) & F_{h,2n-3}(x) & \cdots & F_{h3}(x) & F_{h1}(x) \end{pmatrix},$$

$$R_{hn}(x) = \begin{pmatrix} F_{h2}(x) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ F_{h4}(x) & F_{h2}(x) & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ F_{h,2n-2}(x) & F_{h,2n-4}(x) & \cdots & F_{h2}(x) & 1 \\ F_{h,2n}(x) & F_{h,2n-2}(x) & \cdots & F_{h4}(x) & F_{h2}(x) \end{pmatrix}.$$

**Proposition.** *The following formulas are hold*:

$$\det(P_{hn}(x)) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\big(1 + (-1)^{n+j}\big)\binom{\frac{n+j}{2}}{j}\binom{j}{n-k}\big(-h(x)\big)^{n-k},$$

$$\det(Q_{hn}(x)) = (-1)^{n-1}h^2(x)\big(h^2(x)+1\big)^{n-2},$$

$$\det(R_{hn}(x)) = h(x)\det(R_{h,n-1}(x)) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n+i}F_{h,2(n-i+1)}(x)\det(R_{h,i-1}(x)).$$

[1] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[2] A. Nalli, P. Haukkanen, On generalized Fibonacci and Lucas polynomials, *Chaos Solitons Fractals* **43** (2009), 3179–3186.

# On the holomorph of middle Bol loops

**Grecu Ion**
Moldova State University, Chişinău, Republic of Moldova
*iongrecu21@gmail.com*

A loop $(Q,\cdot)$ is called a right (left, middle) Bol loop if it satisfies the identity $(xy\cdot z)y = x(yz\cdot y)$ (respectively, $y(z\cdot yx) = (y\cdot zy)x$, $x(yz\backslash x) = (x/z)(y\backslash x)$), where "\" ("/") is the right (left) division in the loop $(Q,\cdot)$. The middle Bol identity is a necessary and sufficient condition for the universality of the anti-automorphic inverse property $(x\cdot y)^{-1} = y^{-1}\cdot x^{-1}$ [1]. Middle Bol loops are isostrophes of right (left) Bol loops [2,4].

Let $(Q,\cdot)$ be a loop and let $H = Aut(Q,\cdot)\times Q$. Define $(*)$ on $H$ as follows:

$$(\alpha, x) * (\beta, y) = (\alpha\beta, \beta(x)\cdot y),$$

for all $(\alpha,x),(\beta,y)\in H$. $(H,*)$ is a loop and is called the holomorph of $(Q,\cdot)$.

Gvaramija proved in [3] that the holomorph $(H,*)$ of a loop $(Q,\cdot)$ is a middle Bol loop if and only if the following conditions hold:

1. $(Q,\cdot)$ is a middle Bol loop;
2. $x/\theta(x)\in N_l^{(\cdot)}, \forall x\in Q, \forall\theta\in Aut(Q,\cdot)$, where $N_l^{(\cdot)}$ is the left nucleus of $(Q,\cdot)$.

We give necessary and sufficient conditions when the holomorph of a middle Bol loop is a middle Bol loop and when it coincides with the holomorph of the corresponding right Bol loop.

**Proposition 1.** *The holomorph $(H,*)$ of a loop $(Q,\cdot)$ is a middle Bol loop if and only if the triple $T = (\psi I_x^{-1}, \psi I_x, L_{\psi(x)} I_x\psi)$ is an anti-autotopism of $(Q,\cdot)$, $\forall x\in Q$, $\forall\psi\in Aut(Q,\cdot)$, where $I_a : Q\mapsto Q$, $I_a(y) = y\backslash a, \forall a, y\in Q$.*

**Corollary 1.** *The holomorph $(H,*)$ of a middle Bol loop $(Q,\cdot)$ is a middle Bol loop if and only if one of the following conditions holds:*
*1. the triple $T = (L_{\psi(x)}L_x^{-1}, \varepsilon, L_{\psi(x)}L_x^{-1})$ is an autotopism of $(Q,\cdot)$, $\forall x\in Q$, $\forall\psi\in Aut(Q,\cdot)$;*
*2. the triple $T = (L_{\psi(x)\cdot x^{-1}}, \varepsilon, L_{\psi(x)\cdot x^{-1}})$ is an autotopism of $(Q,\cdot)$, $\forall x\in Q$, $\forall\psi\in Aut(Q,\cdot)$.*

**Proposition 2.** *Let $(Q,\cdot)$ be a right Bol loop and let $(Q,\circ)$ be the corresponding middle Bol loop. If $(H,*)$ ($(H,\otimes)$) is the holomorph of $(Q,\cdot)$ (resp. the holomorph of $(Q,\circ)$), then $(H,*)$ is a right Bol loop if and only if $(H,\otimes)$ is a middle Bol loop.*

**Proposition 3.** *The holomorpf of a middle Bol loop $(Q,\circ)$ coincides with the holomorph of the corresponding right Bol loop if and only if $(Q,\circ)$ is a Moufang loop.*

[1] V. Belousov , *Foundations of the theory of quasigroups and loops*, Nauka, Moscow, 1967.(Russian)

[2] A. A. Gwaramija, *On a class of loops*, Uch. Zapiski MGPI. 375(1971), 25-34. (Russian)

[3] A. A. Gwaramija,*To the theory of $B-3$ Loops*, Trudy Gruz. Inst. Subtrop. Hoz. Vol. XVIII, 1969, 653–656. (in Russian)

[4] P. Syrbu *On middle Bol loops.* ROMAI J, 2010, Vol 6(2) , p. 229-236.

# Про кратність многозначних відображень областей

**Ю. Б. Зелінський, О. В. Сафонова**

Інститут математики НАН України, Київ, Україна; Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

*zel@imath.kiev.ua, olechkadeadin@ukr.net*

Нехай $M, N$ — $n$-вимірні многовиди; $D \subset M$ і $D_1 \subset N$ — відкриті зв'язні області; $\overline{D}$ — замикання області $D$, $IntD$ — внутрішні точки області $D$, $\partial D$ — межа області $D$.

Для многозначних ациклічних напівнеперервних зверху простих відображень справедлива така теорема.

**Теорема 1.** *Нехай $F : \overline{D} \to \overline{D_1}$ – многозначне відображення областей степеня $k$ таке, що $F(\partial D) \cap F(IntD) = \varnothing$. Тоді, або $F$ є відкритим відображенням, або існує точка в образі, яка має щонайменше $|k| + 2$ прообразів. Якщо $F$-нульвимірне відображення, то у другому випадку множина точок образа, що мають не менше ніж $|k| + 2$ прообразів, має повну вимірність $n$.*

Аналог цього результату для власного неперервного відображення замкненої області на многовиді отримано в роботах [1] - [3].

З теореми 1 випливає твердження такої теореми.

**Теорема 2.** *Нехай для многозначного відображення $F : \overline{D} \to \overline{D_1}$ виконуються такі умови:*
*1) $F(\partial D) \cap F(IntD) = \varnothing$;*
*2) існує степінь відображення $F$, що дорівнює $k$.*
*Тоді або відображення $F|_{IntD}$ є відкритим, або знайдеться точка $y \in F(IntD)$ така, що $F^{-1}(y)$ має щонайменше $|k| + 2$ прообразів. Якщо ж відображення $F$ нульвимірне і не відкрите, то множина точок $y \in F(IntD)$, які мають не менше ніж $|k| + 2$ прообразів, містить відкриту підмножину в $F(IntD)$.*

[1] Ю.Б. Зелинский, *О некоторых проблемах Косинского* // Укр. матем. журнал. – 1975. – **27**, №4. – С. 510–516.

[2] Ю.Б. Зелинский, *О кратности непрерывных отображений областей* // Укр. матем. журнал. – 2005. – **57**, №4. – С. 554–558.

[3] А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, Ю.Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці Інституту математики НАН України. – **73**. – 2008. – 308 с.

# Multivalued mappings and their properties

**B. Klishchuk**
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
*bogdanklishchuk@mail.ru*

K. N. Soltanov in his papers [1–3] proposed a method of finding of fixed points for noncontinuous mappings in Banach space. Other approaches to a proof of an existence of fixed points can be found in monograph of Yu. Zelinski [1].

Let $E^n$ be $n$-dimensional Euclidean space (real or complex), $\langle *,* \rangle$ be a scalar product in $E^n$ and *conv* $A$ be a convex hull of some subset $A$ of $E^n$.

Let $X$ and $Y$ be some topological spaces. The mapping $F : X \to Y$ is called *a multivalued mapping* if the set $F(x) \subset Y$ is the image of the point $x \in X$.

Consider the multivalued mappings (including single-valued and discontinuous mappings) of subsets of Euclidean space.

Let $F_1, F_2 : X \to Y$ be two multivalued mappings. The mapping $F_2$ is *the restriction* of $F_1$ if $F_1(x) \supset F_2(x)$ for all points $x \in X$.

Let $\angle xOy = arccos \frac{Re\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}}$ where $x$, $y$ are some points of $E^n$.

**Definition 1.** The set $A \subset X$ is **a radian $\varepsilon$-net** if for any ray, emanating from the origin, there exists a ray that forms an angle less than some $\varepsilon \in (0; \frac{\pi}{2})$ with the first ray and the second ray intersects $A$.

**Definition 2.** The mapping $F : X \to Y$ satisfies **"$\varepsilon$-specified condition of an acute angle"** on the set $A \subset X$ if $X = Y$ and for any point $x \in A$ there exists $y \in F(x)$ such that $\angle xOy < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

It was obtained theorems about includings for multivalued mappings whose restrictions to some subset in a closure of a domain of Euclidean space satisfy "the $\varepsilon$-specified condition of an acute angle" [5].

**Theorem 1.** *Let $D$ be a domain in Euclidean space $E^n$ containing the origin $0$. Let $K \subset \overline{D}$ be a subset of a closure of this domain and $K$ is a radian $\varepsilon$-net. Suppose that the multivalued mapping $F : \overline{D} \to E^n$ has the restriction $F_1(K)$ satisfying "the $\varepsilon$-specified condition of an acute angle". If conv $F_1(K) \subset F(\overline{D})$ then $0 \in F(\overline{D})$.*

**Corollary 1.** *Let $K \subset \overline{D}$ be a subset of the domain $\overline{D}$ and $K$ is a radian $\varepsilon$-net. Suppose that the multivalued mapping $F : \overline{D} \to E^n$ has the restriction $F_1(K)$ and conv $F_1(K) \subset F(\overline{D})$. If $0 \notin F(\overline{D})$ then there exists the pair of points $x \in K$, $y \in F(x)$ such that $\angle xOy \geqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.*

Let $G = Id - F$ be a multivalued mapping $G : X \to X$ such that the set $G(x) = \{x - y | y \in F(x)\}$ is the image of the point $x \in X$.

**Corollary 2.** *Let $K \subset \overline{D}$ be a subset of the domain $\overline{D}$ and $K$ is a radian $\varepsilon$-net. Suppose that the multivalued mapping $G = Id - F : \overline{D} \to E^n$ has the restriction $G_1(K)$ satisfying "the $\varepsilon$-specified condition of an acute angle". If conv $G_1(K) \subset G(\overline{D})$ then the mapping $F$ has the fixed point $x \in F(x)$.*

[1] K. N. Soltanov, *Nonlinear mappings and the solvability of nonlinear equations.*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **289**, No. 6, 1986.

[2] K. N. Soltanov, *Remarks on Separation of Convex Sets, Fixed-Point Theorem and Applications in Theory of Linear Operators*, Fixed Point Theory and Applications, 2007.

[3] K. N. Soltanov, *On semi-continuous mappings, equations and inclusions in the Banach space*, Hacettepe J. Math. Statist., **37**, 2008.

[4] Yu. B. Zelinski, *Multivalued mappings in analysis*, Kiev: Naukova dumka, 1993.

[5] Yu. B. Zelinski, B. A. Klishchuk, M. V. Tkachuk, *Theorems about includings for multivalued mappings*, Ukrainian Mathematical Journal, **66**, No. 7, 2014.

# Проективная классификация кривых третьего порядка на проективной плоскости

**Н. Г. Коновенко**

ОНАПТ, Одесса, Украина

*konovenko@ukr.net*

Мы рассматриваем классификацию кривых третьего порядка на проективной плоскости относительно группы проективных преобразований $\mathbf{SL}_3(\mathbb{C})$. Это классическая задача, восходящая к И. Ньютону (см. [4]), где обсуждается подход к этой задаче с алгебраической точки зрения. Здесь мы предлагаем альтернативный подход, основанный на дифференциальной геометрии и проективных дифференциальных инвариантах. Для кривой $L$ на проективной плоскости $\mathbb{C}\mathbf{P}^2$ обозначим через $Q_7(L)$ ее проективную кривизну, а через $Q_8 = \nabla(Q_7)$ - ее производную Штуди ( [1] - [3]). Проективная кривизна кривой $Q_7(L)$ является проективным инвариантом порядка 7, а ее Штуди производная $Q_8(L)$ - инвариантом 8-го порядка.

Для алгебраических кривых инварианты $Q_7(L)$ и $Q_8(L)$ являются рациональными функциями на кривой $L$ и поэтому существует алгебраическое соотношение между ними:

$$H(Q_7\,(L)\,, Q_8\,(L)) = 0. \tag{1}$$

Это соотношение задаёт алгебраическую кривую на плоскости, которую мы называем *определяющей*.

В работе ( [3]) доказано, что две неприводимые алгебраические плоские кривые, которые не являются прямыми линиями или квадриками, проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда их определяющие кривые совпадают. Также показано, что кубические кривые являются решениями следующего уравнения 9-го порядка:

$$\nabla^2(Q_7)Q_7 - \frac{11}{8}(\nabla(Q_7))^2 - \frac{7}{72}Q_7\nabla(Q_7) - \frac{216}{35}Q_7^3 - \frac{49}{21600}Q_7^2 = 0. \tag{2}$$

Рассматривая это уравнение, как дифференциальное уравнение второго порядка относительно производной Штуди и интегрируя его, приходим к следующему уравнению 8-го порядка

$$F^3 + \eta G Q_7^9 = 0, \tag{3}$$

где

$$F = \frac{49}{147456}\,{Q_8}^4 + \frac{343}{3317760}\,{Q_8}^3 + \left(\frac{2401}{199065600} + \frac{7}{192}\,{Q_7}^3\right){Q_8}^2 +$$
$$+\left(-\frac{49}{25920}\,{Q_7}^3 + \frac{16807}{26873856000}\right)Q_8 + \left({Q_7}^3 - \frac{343}{1036800}\right)\left({Q_7}^3 - \frac{343}{9331200}\right)$$

и

$$G = 117649 - 6401203200\,{Q_7}^3 + 18151560\,Q_8 + 583443000\,{Q_8}^2 + 87071293440000\,{Q_7}^6 -$$
$$-493807104000\,{Q_7}^3 Q_8 + 3174474240000\,{Q_7}^3{Q_8}^2 + 7001316000\,{Q_8}^3 + 28934010000\,{Q_8}^4,$$

а $\eta$ - константа интегрирования. При этом группа проективных преобразований действует транзитивно на пространстве решений уравнения (3) при фиксированном $\eta$.

Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Две неприводимые кубические кривые проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда константы $\eta$ для них совпадают.*

[1] G. H. Halphen. Sur les invariants différentiels, Paris: Gauthier-Villars, (1878).

[2] F. Klein, W. Blaschke. Vorlesungen über höhere Geometrie, Berlin, J. Springer, (1926).

[3] N. Konovenko, V. Lychagin. On projective classifica-tion of algebraic curves// Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society (2013). V.10, P. 1-14.

[4] H. Kraft. Geometrische Methoden in der Invariantentheorie // Aspects of Mathematics, D1, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1984). x+308 pp.

# Класифікація та розв'язання функційних рівнянь на двомісних оборотних функціях

**Р. Коваль[1], Ф. Сохацький[2], Г. Крайнічук[3]**
[1] Національний медичний університет ім. М.Пирогова
[2],[3] Донецький національний університет ім. В.Стуса
*rayisa_koval@mail.ru, fmsokha@ukr.net, kraynichuk@ukr.net*

Об'єктом досліджень є загальні квадратичні функційні рівняння, які розглядаються над множиною двомісних оборотних функцій (бінарних квазігрупових операцій) довільної множини, як скінченної так і нескінченної. Тут розглядаються лише функційні рівняння (загальне означення див. Я. Ацель [1]), кожне з яких є рівністю двох термів другого порядку, що містять лише предметні та функційні змінні, причому всі предметні змінні зв'язані квантором загальності. Функційні рівняння, що вивчаються, мають задовольняти таким п'яти умовам:
1) функційні змінні попарно різні (такі рівняння називають загальними);
2) не мають ні функційних, ні предметних сталих;
3) кожна функційна змінна є двомісною (такі рівняння називають бінарними)
4) кожна функційна змінна набуває значень в множині оборотних функцій (такі рівняння називають квазігруповими);
5) кожна предметна змінна має точно дві появи (такі рівняння називають квадратичними). Множину загальних квадратичних квазігрупових функційних рівнянь від чотирьох предметних змінних на множині двомісних функцій позначимо через $K_4$.

Нагадаємо, що двомісна функція (бінарна операція) називається оборотною (квазігруповою), якщо вона оборотна по кожній своїй змінній, тобто існує ліва обернена і права обернена функції. Для всіх квазігрупових функційних змінних $F$ виконуються такі рівності:

$$ {}^{\ell}F(F(x;y);y)=x, \quad F({}^{\ell}F(x;y);y)=x, \quad {}^{r}F(x;F(x;y))=y, \quad F(x;{}^{r}F(x;y))=y. \qquad (1)$$

Оборотність функції дозволяє ввести на функційних рівняннях відношення еквівалентності, згідно якому легко прослідковується залежність між множинами розв'язків рівнянь, що відрізняються первинними перетвореннями.

**Означення 1.** Заміна у рівнянні $\omega=\upsilon$ підтерма $F(t_1;t_2)$ на підтерм ${}^{s}F(t_2;t_1)$ називається *комутуванням.*

Заміна у рівнянні $\omega=\upsilon$ підтерма $F(x;t)$ на $x$ та заміна іншої появи змінної $x$ на ${}^{\ell}F(x;t)$ називається *внутрішнім діленням через змінну* $x$.

Заміна рівняння $F(\omega_1;\omega_2)=\upsilon$ на рівняння ${}^{\ell}F(\upsilon;\omega_2)=\omega_1$ називається *зовнішнім діленням.*

Комутування, внутрішнє ділення через довільну предметну змінну, зовнішнє ділення та їх композиції називаємо *первинними перетвореннями.*

Первинні перетворення, перейменування предметних і функційних змінних та заміна сторін рівняння місцями утворюють групу $I$, причому для будь-якого $\alpha\in I$ виконується $\alpha K_4=K_4$.

Розглядаємо дію групи $I$ на множині $K_4$. Під класифікацією множини $K_4$ будемо розуміти описання всіх орбіт дії групи $I$ на множині $K_4$.

Отримано такі результати:

1) знайдено низку інваріантів первинних перетворень;

2) дано повну класифікацію множини $K_4$, а саме загальних квадратичних бінарних квазігрупових функційних рівнянь від чотирьох предметних змінних, зокрема доведено, що $K_4$ розбивається на 17 класів (орбіт);

3) розв'язано по одному представникові з кожної орбіти.

Отримані результати є розширенням і удосконаленням дослідження, проведеного раніше першим автором [2].


[1] Aczel J., *Lectures on Functional Equations and their applications*, New York: Acad. press, 1966, 510.

[2] Koval' R.F. *Класифікація квадратичних функційних рівнянь малої довжини на квазігрупах*, Науковий часопис НПУ ім. М.Драгоманова, фізико-математичні науки, 2004, №5, 111-127.

# On quasigroup varieties of parastrophic associativity

**H. Krainichuk**
Donetsk National University
*kraynichuk@ukr.net*

A groupoid $(Q;\cdot)$ is called a *quasigroup*, if for all $a$, $b \in Q$ every of the equations $x \cdot a = b$ and $a \cdot y = b$ has a unique solution. A *$\sigma$-parastrophe* $(Q;\overset{\sigma}{\cdot})$ of $(Q;\cdot)$ is defined by

$$x_{1\sigma} \overset{\sigma}{\cdot} x_{2\sigma} = x_{3\sigma} \iff x_1 \cdot x_2 = x_3, \quad \sigma \in S_3.$$

A *$\sigma$-parastrophe of a class* of quasigroups $\mathfrak{A}$ is called a class ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$, which consists of all $\sigma$-parastrophes of quasigroups from $\mathfrak{A}$ [1]. A set of all pairwise parastrophic classes is called a *truss*. A truss of varieties is uniquely defined by an identity which describes one of varieties from the given truss.

A groupoid $(Q;\cdot)$ is called an *isotope of a groupoid* $(Q;+)$ iff there exists a triple of bijections $(\alpha, \beta, \gamma)$, which is called an *isotopism*, such that the relation $\gamma(x \cdot y) = \alpha x + \beta y$ holds. An isotope of a group is called a *group isotope*.

Let $(Q;\cdot)$ be a group isotope and 0 be an arbitrary element of $Q$, then the right part of the formula

$$x \cdot y = \alpha x + a + \beta y$$

is called a 0-*canonical decomposition* [2], if $(Q;+)$ is a group, 0 is its neutral element and $\alpha 0 = \beta 0 = 0$. In this case, we say: the element 0 defines the *canonical decomposition*; $(Q;+)$ is its *decomposition group*; $\alpha$, $\beta$ are its *coefficients* and $a$ is its *free member*.

An arbitrary element of a group isotope uniquely defines a canonical decomposition of the isotope [2]. Using this result the following theorem has been proved.

**Theorem.** *Quasigroup identities of parastrophic associativity*

$$(x \overset{\sigma_1}{\cdot} y) \overset{\sigma_2}{\cdot} z = x \overset{\sigma_3}{\cdot} (y \overset{\sigma_4}{\cdot} z), \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 \in S_3$$

*define ten trusses consisting of 25 quasigroup varieties, every of these trusses is defined by one of the following identities:*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $xy \cdot z = x \cdot yz$ | Variety of all groups |
| 2 | $xy \cdot z = x \cdot zy$ | Variety of all commutative groups |
| 3 | $xy \cdot z = zy \cdot x$ | $x \cdot y = \alpha x + a + \alpha^2 y$, $(Q;+)$ is a commutative group, $\alpha$ is an automorphism |
| 4 | $x(yx \cdot z) = zy$ | $x \cdot y = \alpha x + a - y$, $(Q;+)$ is a commutative group, $\alpha$ is an automorphism, $\alpha^2 = -\iota$, |
| 5 | $xy \cdot z = xz \cdot y$ | $x \cdot y = x + \beta y$, $(Q;+)$ is a commutative group, $\beta$ is a permutation |
| 6 | $x \cdot y(x \cdot yz) = z$ | $x \cdot y = \alpha x + \beta y$, $(Q;+)$ is a commutative group, $\alpha$ is a permutation, $\beta$ is an automorphism, $\beta^2 = -\iota$, |
| 7 | $xy \cdot yz = xz$ | Variety of all Boolean groups |
| 8 | $(x \cdot yz)z = yx$ | $x \cdot y = \alpha x + a + \alpha^2 y$, $(Q;+)$ is a Boolean group, $\alpha$ is an automorphism, $\alpha^3 = -\iota$, $\alpha a = a$, |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | $x(yz \cdot zx) = y$ | $x \cdot y = \alpha x + a + \alpha^5 y$, $(Q;+)$ is a Boolean group, $\alpha$ is an automorphism, $\alpha^7 = -\iota$, $\alpha^2 a = -a$, $a + \alpha^3 a + \alpha^5 a + \alpha^6 a = 0$, |
| 10 | $(xy \cdot z)y = xz$ | $x \cdot y = x + \beta y$, $(Q;+)$ is a Boolean group, $\beta$ is a permutation |

In this table: in the second column, an identity defining a truss of varieties is written; in the third column, canonical decompositions of quasigroups from the corresponding variety are given.


[1] F.M. Sokhatsky, Symmetry in quasigroup and loop theory. 3rd Mile High Conference on Nonassociative Mathematics, Denver, Colorado, USA, August 11-17, 2013; http://web.cs.du.edu/~petr/milehigh/2013/Sokhatsky.pdf.

[2] F.M. Sokhatsky On group isotopes II. Ukrainian Mathematical Journal, **47**(12) (1995), 1935 – 1948.

# Про еквівалентність різних означень $G$-моногенних відображень

**Т. С. Кузьменко**

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

*kuzmenko.ts15@gmail.com*

Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватерніонів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої складається з одиниці алгебри 1 і елементів $I, J, K$, для яких виконуються наступні правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \qquad IJ = -JI = K, \qquad JK = -KJ = I, \qquad KI = -IK = J.$$

В алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ існує інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, таблиця множення елементів якого має вигляд

| $\cdot$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1$ | $0$ | $e_3$ | $0$ |
| $e_2$ | $0$ | $e_2$ | $0$ | $e_4$ |
| $e_3$ | $0$ | $e_3$ | $0$ | $e_1$ |
| $e_4$ | $e_4$ | $0$ | $e_2$ | $0$ |

,

а одиниця алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ в цьому базисі є сумою ідемпотентів: $1 = e_1 + e_2$.

Введемо в розгляд лінійні функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, визначені рівностями

$$f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0,$$
$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0.$$

Нехай

$$i_1 = e_1 + e_2, \qquad i_2 = a_1 e_1 + a_2 e_2, \qquad i_3 = b_1 e_1 + b_2 e_2$$

при $a_k,\, b_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2$ — трійка лінійно незалежних векторів над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжену векторами $i_1, i_2, i_3$. Очевидно, що

$$\xi_1 := f_1(\zeta) = x + a_1 y + b_1 z, \qquad \xi_2 := f_2(\zeta) = x + a_2 y + b_2 z.$$

Відмітимо, що точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, утворюють прямі

$$L^1 : \quad x + y\,\mathrm{Re}\, a_1 + z\,\mathrm{Re}\, b_1 = 0, \qquad y\,\mathrm{Im}\, a_1 + z\,\mathrm{Im}\, b_1 = 0,$$

$$L^2 : \quad x + y\,\mathrm{Re}\, a_2 + z\,\mathrm{Re}\, b_2 = 0, \qquad y\,\mathrm{Im}\, a_2 + z\,\mathrm{Im}\, b_2 = 0$$

в тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$.

Множині $S$ тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність множину $S_\zeta := \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in S\}$ в $E_3$. Нехай $\Omega_\zeta$ — область в $E_3$.

Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ (або $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$) будемо називати *право-$G$-моногенним* (або *ліво-$G$-моногенним*) в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо $\Phi$ (або $\widehat{\Phi}$) диференційовне за Гато у кожній точці цієї області, тобто якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ (або $\widehat{\Phi}'(\zeta)$) алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3$$

$$\left(\text{або } \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{\widehat{\Phi}(\zeta+\varepsilon h)-\widehat{\Phi}(\zeta)}{\varepsilon}=\widehat{\Phi}'(\zeta)h \quad \forall\, h\in E_3\right).$$

Неперервне відображення $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду

$$\Phi(\zeta)=\sum_{k=1}^{4}U_k(x,y,z)e_k,\quad x,y,z\in\mathbb{R} \tag{1}$$

будемо називати $H$*-моногенним* в області $\Omega_\zeta\subset E_3$, якщо $\Phi$ диференційовне за Хаусдорфом в кожній точці $\zeta\in\Omega_\zeta$, тобто якщо компоненти відображення (1) мають частинні похідні першого порядку за змінними $x,y,z$, і формальний диференціал відображення

$$d\Phi:=\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x}dx+\frac{\partial U_k}{\partial y}dy+\frac{\partial U_k}{\partial z}dz\right)e_k$$

є лінійним однорідним поліномом диференціала $d\zeta=dx+i_2dy+i_3dz$, тобто

$$d\Phi=\sum_{s=1}^{16}A_s\,d\zeta\,B_s\,,$$

де $A_s$, $B_s$ — деякі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ – значні функції.

При цьому значення $\Phi'_H(\zeta):=\sum\limits_{s=1}^{16}A_sB_s$ називається *похідною Хаусдорфа* $H$-моногенного відображення $\Phi(\zeta)$ в точці $\zeta$.

$H$-моногенне відображення $\Phi$, диференціал якого подається у вигляді $d\Phi=d\zeta\,\Phi'_H(\zeta)$ будемо називати *право-*$H$*-моногенним*, а $H$-моногенне відображення $\widehat{\Phi}$, диференціал якого подається у вигляді $d\widehat{\Phi}=\widehat{\Phi}'_H(\zeta)d\zeta$ — *ліво-*$H$*-моногенним* в області $\Omega_\zeta$.

В роботах [1–4] доведено різні критерії $G$-моногенності відображень. Наступне твердження є теоремою про еквівалентність різних означень $G$-моногенних відображень в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

**Теорема.** *Відображення* $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ $\big($*або* $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})\big)$ *є право-*$G$*-моногенним* $\big($*або ліво-*$G$*-моногенним*$\big)$ *в області* $\Omega_\zeta\subset E_3$ *тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

I. *компоненти* $U_k:\Omega\to\mathbb{C}$ *розкладу* (1) *є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* $\Omega$ *і виконуються аналоги умов Коші – Рімана:*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=i_2\,\frac{\partial\Phi}{\partial x},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=i_3\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$\left(\text{або}\quad \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial y}=\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\,i_2,\qquad \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}=\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\,i_3\right)$$

*в кожній точці області* $\Omega_\zeta$*;*

II. *компоненти* $U_k:\Omega\to\mathbb{C}$ *розкладу* (1) *є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* $\Omega$ *і відображення* $\Phi$ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *— право-*$H$*-моногенне* $\big($*або ліво-*$H$*-моногенне*$\big)$ *в області* $\Omega_\zeta$*.*

*Якщо* $f_1(E_3)=f_2(E_3)=\mathbb{C}$ $\big($*де* $f_k(E_3)$ *— образ простору* $E_3$ *при відображенні* $f_k$, $k=1,2\big)$*, то відображення* $\Phi$ *буде право-*$G$*-моногенне* $\big($*або* $\widehat{\Phi}$ *— ліво-*$G$*-моногенне*$\big)$ *тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

III. *для кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ *знайдеться окіл, в якому відображення* $\Phi$ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *розкладається в степеневий ряд*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}(\zeta - \zeta_0)^n p_n, \qquad p_n \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$$

$$\left(\textit{або} \quad \widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{p}_n(\zeta - \zeta_0)^n, \qquad \widehat{p}_n \in \mathbb{H}(\mathbb{C})\right);$$

IV. *відображення* $\Phi$ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *неперервне і виконується рівність*

$$\int\limits_{\triangle_\zeta} d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0$$

$$\left(\textit{або} \quad \int\limits_{\triangle_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta) d\zeta = 0\right)$$

*для кожного трикутника* $\triangle_\zeta$, *замикання якого* $\overline{\triangle_\zeta}$ *міститься в* $\Omega_\zeta$.

*Якщо* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$ *і, крім того, область* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *опукла в напрямку прямих* $L^1$, $L^2$, *то відображення* $\Phi$ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *буде право-*$G$*-моногенним* $\big($*або* $\widehat{\Phi}$ *— ліво-*$G$*-моногенним*$\big)$ *тоді і тільки тоді, коли*

V. *існують єдині аналітичні в області* $D_1 := f_1(\Omega_\zeta) = \{\xi_1 = x + a_1 y + b_1 z : (x, y, z) \in \Omega\}$ *функції* $F_1$, $F_3$ $\big($*або* $\widehat{F}_1$, $\widehat{F}_4\big)$ *і єдині аналітичні в області* $D_2 := f_2(\Omega_\zeta) = \{\xi_2 = x + a_2 y + b_2 z : (x, y, z) \in \Omega\}$ *функції* $F_2$, $F_4$ $\big($*або* $\widehat{F}_2$, $\widehat{F}_3\big)$ *такі, що в області* $\Omega_\zeta$ *відображення* $\Phi$ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4$$

$$\left(\textit{або} \quad \widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{F}_1(\xi_1)e_1 + \widehat{F}_2(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3(\xi_2)e_3 + \widehat{F}_4(\xi_1)e_4\right).$$


[1] *В. С. Шпаківський, Т. С. Кузьменко.* Про один клас кватерніонних відображень // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 1. — С. 117 – 130.

[2] *V. S. Shpakivskyi, T. S. Kuzmenko.* Integral theorems for the quaternionic $G$-monogenic mappings // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. — 2016. — **24**, No. 2. — P. 271 – 281.

[3] *Т. С. Кузьменко.* Степеневі ряди та ряди Лорана в алгебрі комплексних кватерніонів // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 3. — С. 164 – 174.

[4] *В. С. Шпаковский, Т. С. Кузьменко.* О моногенных отображения кватернионной переменной // подано до Укр. мат. вісника (http://arxiv.org/pdf/1605.08869v1.pdf).

# Про опис $P$-визначальних поліномів для додатних квадратичних форм Тітса частково впорядкованих множин

**В. А. Лісикевич**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

*vikadrug@ukr.net*

Ми досліджуємо реберно-локальні деформації квадратичних форм над полем дійсних чисел (введених В. М. Бондаренком у роботі [1]) у випадку, коли вони є квадратичними формами Тітса скінченних частково впорядкованих множин. Нагадаємо деякі означення роботи [1].

Нехай

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j \tag{1}$$

— квадратична форма над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Її *реберно-локальною деформацією* називається квадратична форма вигляду

$$f^{(p,q)}(z,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + t f_{pq} z_p z_q + \sum_{(i,j)\neq(p,q)} f_{ij} z_i z_j, \tag{2}$$

де $p$ і $q$ ($p < q$) такі, що $f_{pq} \neq 0$, а $t$ — параметр, що пробігає поле $\mathbb{R}$.

Квадратична форма (2) називається також *локальною деформацією квадратичної форми* (1) *відносно* $z_p z_q$.

Число $a \in \mathbb{R}$ називається *$P$-граничним числом квадратичної форми $f(z)$ для $z_p z_q$* або *$(p,q)$-им $P$-граничним числом квадратичної форми $f(z)$*, якщо $f(z,a)$ не є додатною квадратичною формою і в кожному околі числа $a$ існує число $c$ таке, що $f(z,a)$ є додатною квадратичною формою.

У випадку, коли квадратична форма $f(z)$ додатна, існує рівно два $(p,q)$-их $P$-граничних числа і якщо їх позначити $b_1$ і $b_2$, то поліном

$$\Delta_f^{(p,q)}(t) = (t - b_1)(t - b_2)$$

називається *$P$-визначальним поліномом квадратичної форми $f(z)$ для $z_p z_q$* або *$P$-визначальним $(p,q)$-поліномом квадратичної форми $f(z)$*.

Нехай $S$ — скінченна частково впорядкована множина (без елемента 0). Її квадратичною формою Тітса називається цілочислова квадратична форма, яка задається наступною рівністю:

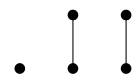
$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j,i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i.$$

Частково впорядкованих множина $S$ з додатною квадратичною формою Тітса називається серійною, якщо для будь-якого $N > |S|$ існує частково впорядкована множина $T_N$ порядку $N$ з додатною формою Тітса, яка містить в собі множину $S$, і несерійною в іншому разі). У роботі [2] описано всі серійні та несерійні частково впорядковані множини. З точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму, число несерійних множин дорівнює 108 (очевидно, що серійних множин нескінченно багато).

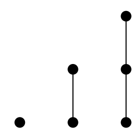
Основним результатом роботи є опис всіх $P$-визначальних поліномів $\Delta_Q^{(p,q)}$, $p,q \in S$ ($p < q$), квадратичної форми Тітса $Q = q_S(z)$ для довільної несерійної частково впорядкованої множини $S$.

Як один із наслідків основного результату приведемо опис $P$-визначальних поліномів $\Delta_Q^{(p,q)}$, $p,q \in S$ ($p < q$), для примітивних несерійних частково впорядкованих множин. З точністю до ізоморфізму існує 3 такі множини, а саме

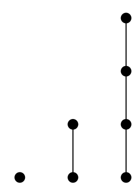
1) $S_1 = \{1,2,3,4,5 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5\}$:



2) $S_2 = \{1,2,3,4,5,6 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6\}$:



3) $S_3 = \{1,2,3,4,5,6,7 \,|\, 2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7\}$:



Квадратичну форму Тітса $q_S(z)$ частково впорядкованої множини $S = S_i$, для простоти, $q_i = q_i(z)$, $i = 1,2,3$.

**Теорема 1.** *$P$-визначальні поліноми квадратичної форми Тітса частково впорядкованої множини $S = S_1, S_2, S_3$ (для $z_p z_q$, які відповідають $p,q \in S$, $p < q$) є наступними*:

1) $\Delta_{q_1}^{(2,3)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}$, $\Delta_{q_1}^{(4,5)}(t) = t^2 - \frac{12}{5}t + \frac{4}{5}$;

2) $\Delta_{q_2}^{(2,3)}(t) = t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{3}$, $\Delta_{q_2}^{(p,q)}(t) = t^2 - \frac{5}{2}t + 1$ *при* $p,q \in \{4,5,6\}$;

3) $\Delta_{q_3}^{(2,3)}(t) = t^2 - \frac{20}{7}t + \frac{12}{7}$, $\Delta_{q_3}^{(p,q)}(t) = t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{3}$ *при* $p,q \in \{4,5,6,7\}$.

Робота виконана разом з проф. В. М. Бондаренком.


[1] V. M. Bondarenko, *On types of local deformations of quadratic forms*, Algebra Discrete Math. 18 (2014), no. 2, 163–170.

[2] В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина, (Min, max)-*эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса*, Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2 (2005), no 3, 18-58.

# Infinite double stochastic matrices and $Q_\infty^*$-representation of real numbers generated by them

**V. Markitan**
Institute of Mathematics NAS of Ukraine
*v.p.markitan@npu.edu.ua*

**Definition 1.** *A*n infinite double stochastic matrix is a matrix $||q_{ik}||$ having nonnegative elements and such that the sum of elements in each row and each column is equal 1, i.e. both the conditions hold:

1. $q_{ik} \geqslant 0$;
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{ik} = 1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} q_{ik}$.

Obviously, the permutation of any two rows or columns of double stochastic matrix gives a double stochastic matrix as well. The following statement implies that there is uncountably many double stochastic symmeric matrices with all positive coefficients, and presents a ceratin method of constructing them.

**Lemma 1.** *If $(a_n)$ is any sequence of non-negative integers such that*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = 1;$$

$$S_n \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad (n \in N),$$

*then the matrix $\|q_{ik}\|$ with elements*

$$q_{ik} = \begin{cases} a_{i+k-1}, & \text{if} \quad i \neq k; \\ a_{2i-1} + S_{i-1}, & \text{if} \quad i = k; \end{cases}$$

*is infinite double stochastic symmetric matrix.*

Among the infinite double stochastic symmetric matrices we distinguish a one-parametric family constructed as in Lemma 1 via geometric progressions $\{bq^i\}_{i=0}^{\infty}$, $q \in (0,1)$.

**Lemma 2.** *Let $||q_{ik}||$ be a matrix for which following conditions hold:*
*1.* $q_{01} = b \in (0;1)$*;*
*2.* $b + q = 1$*;*
*3.* $q_{ik} = bq^{i+k-1}$ *for all* $i \neq k-1$, $k \in N$*;*
*4.* $q_{ik} = bq^{2(k-1)} + 1 - q^{k-1}$ *for all* $i = k-1$, $k \in N$.
*Then $||q_{ik}||$ is an infinite double stochastic symmetric matrix.*

Due to [1] for each $x \in [0,1)$ there exists a unique sequence of nonnegative integers $(\alpha_n)$:

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[ \beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right] =: \Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}, \tag{1}$$

where

$$\beta_{0k} \equiv 0, \beta_{ik} \equiv \sum_{j=0}^{i-1} q_{jk}, \quad i \in N, k \in N.$$

Formula (1) is called the $Q_\infty^*$-representation of $x \in [0,1)$ generated by the matrix $||q_{jk}||$. If the matrix $||q_{jk}||$ satisfies conditions of Lemma 2 then in the expansion of $x$ into the series (1) we have that

$$\begin{cases} \beta_{0k} = 0, \\ \beta_{\alpha_k k} = q^{k-1}\left(1 - q^{\alpha_k}\right) \quad \text{for all} \quad \alpha_k < k \in \mathbb{N}, \\ \beta_{\alpha_k k} = 1 - q^{\alpha_k + k - 1} \quad \text{for all} \quad \alpha_k \geq k \in \mathbb{N}; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} q_{\alpha_k k} = bq^{\alpha_k + (k-1)} \quad \text{for all} \quad \alpha_k \neq k-1, k \in \mathbb{N}, \\ q_{\alpha_k k} = bq^{2\alpha_k} + 1 - q^{\alpha_k} \quad \text{for all} \quad \alpha_k = k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

It is worthwhile to say that if in (2) $\alpha_k \neq k-1$ for all $k \in \mathbb{N}$, then

$$x = 1 - q^{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k}(1-q)^{k-1} q^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_i + \frac{(k-1)(k-2)}{2}},$$

where $\beta_{\alpha_k k}$ are defined by the formulas (2).

Topological and metric properties of real number sets with restriction on using symbols in the $Q_\infty^*$-representation are investigated.


[1] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[2] Працьовитий М.В. Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — № 14.— С. 189–216.

# Топологічна еквівалентність функцій відносно усереднень з різними мірами

**О. Марункевич**
Інститут математики НАН України
*oxanamarunkevysh@rambler.ru*

Нехай $\mu$ — ймовірнісна міра на відрізку $[-1, 1]$, тобто невід'ємна $\sigma$-адитивна міра, визначена на борелівській алгебрі множин відрізка $[-1, 1]$, і така, що $\mu[-1, 1] = 1$. Тоді для кожної неперервної функції $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ та числа $\alpha > 0$ такого, що $2\alpha < b - a$ можна визначити нову вимірну функцію $f_\alpha : (a + \alpha, b - \alpha) \to \mathbb{R}$ за формулою:

$$f_\alpha(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t\alpha) d\mu. \tag{0.1}$$

Називатимемо її *$\alpha$-усередненням* функції $f$ відносно міри $\mu$.

Такі усереднення функцій відіграють важливу роль як в теоретичних дослідженнях так і практичних задачах обробки сигналів і називаються лінійними фільтрами, [4], [5], [7].

В [6] досліджувалось питання за яких умов $f_\alpha$ буде топологічно еквівалентним до $f$ для всіх досить малих $\alpha$. Грубо кажучи, це означає, що графіки $f_\alpha$ та $f$ «мають однакову форму».

**Означення 1.** див. напр. [2], [8] Нагадаємо, що дві неперервні функції $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ та $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ називаються **топологічно еквівалентними**, якщо існують зберігаючі орієнтацію гомеоморфізми $h : (a, b) \to (c, d)$ та $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $\phi \circ f = g \circ h$, тобто зображена нижче діаграма є комутативною.

$$\begin{array}{ccc} (a,b) & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi} \\ (c,d) & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

**Означення 2.** Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція і $\mu$ — ймовірнісна міра на $[-1, 1]$. Скажемо, що $f$ є **топологічно стійкою** відносно усереднень по мірі $\mu$, якщо існує $\varepsilon > 0$, таке що для всіх $\alpha \in (0, \varepsilon)$ функції $f$ та $f_\alpha$ є топологічно еквівалентними.

В статті [6] отримано достатні умови топологічної стійкості неперервних функцій зі скінченним числом локальних екстремумів відносно усереднень. Показано, що ця проблема може бути зведена до перевірки локальної топологічної стійкості усереднень $f$ в околах цих локальних екстремумів. В статті [6] також отримано достатні умови для топологічної стійкості усереднень функцій відносно дискретних мір зі скінченими носіями.

**Теорема 1.** (див. [6]) *Нехай $\mu$ — ймовірнісна міра на $[-1, 1]$ і $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна функція, що має лише скінченну кількість локальних екстремумів $x_1, \ldots, x_n$. Припустимо, що значення $f(x_i)$, $(i = 1, \ldots, n)$, попарно різні і відрізняються від $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(a) *функція $f$ є топологічно стійкою відносно усереднень по мірі $\mu$;*

(b) *для кожного* $i = 1, \dots, n$ *паросток* $f : (\mathbb{R}, x_i) \to \mathbb{R}$ *в точці* $x_i$ *є топологічно стійким відносно усереднень по мірі* $\mu$.

В роботі [3] наведено достатні умови для топологічної стійкості паростків функцій відносно мір з кусково неперервними (і зокрема з локально постійними) щільностями, див теореми 2 та 3.

**Теорема 2.** *Нехай* $f, g : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}$ *— дві кусково* $1$*–диференційовні функції і* $h = f - g$. *Припустимо, що виконані такі умови:*

*(a)* $f$ *та* $g$ *строго спадають на* $[-\epsilon, 0]$ *і строго зростають на* $[0, +\epsilon]$*;*

*(b) існує таке* $C > 0$*, що для всіх* $x \in [-\alpha, \alpha]$ *виконана нерівність*

$$f''_{\alpha}(x) \geq C\alpha\,;$$

*(c) похідна* $h' = g' - f'$ *— неперервна в точці* $0$ *і* $h'(0) = 0$.

*Тоді функція* $g$ *в точці* $0$ *є топологічно стійкою відносно усереднень за мірою* $\mu$.

**Теорема 3.** *Нехай* $g : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbb{R}$ *— кусково* $1$*–диференційовна функція, що задовольняє такі умови:*

*(a)* $g$ *строго спадає на* $[-\epsilon, 0]$ *і строго зростає на* $[0, +\epsilon]$*;*

*(b) існують скінчені границі зліва та справа*

$$L = \lim_{x \to 0-0} g'_x, \qquad R = \lim_{x \to 0+0} g'_x.$$

*Для* $i = 0, \dots, n+1$ *визначимо числа*

$$X_i = L\mu[t_0, t_i] + R\mu[t_i, t_{n+1}] = L\sum_{j=0}^{i-1}(t_{j+1} - t_j)p_j + R\sum_{j=i-1}^{n}(t_{j+1} - t_j)p_j.$$

*Припустимо, що для кожного* $i \in \{0, \dots, n\}$ *хоча б одне з чисел* $X_i$ *або* $X_{i+1}$ *відмінне від нуля. Тоді функція* $g$ *в точці* $0$ *є топологічно стійкою відносно усереднень за мірою* $\mu$.


[1] A. Antoniouk, K. Keller, S. Maksymenko, *Kolmogorov-Sinai entropy via separation properties of order-generated σ-algebras* // Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2014. — Vol. 34 no. 5. — Pp. 1793–1809.

[2] В. И. Арнольд, *Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера* // УМН. — 1992. — Т. 47:1(283). — С. 3–45.

[3] С. І. Максименко, О. В. Марункевич, *Топологічна стійкість неперервних функцій відносно усереднень за мірами з кусково постійними щільностями.*,— // Збірник праць Інституту математики Національної академії наук України — Київ, Ін-т математики НАН України, (2015), №6 (12), С. 146-163.

[4] С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику.* — Москва. — Наука. — 1981. — 640 с.

[5] Kenneth R. Crounse, *Methods for Image Processing and Pattern Formation in Cellular Neural Networks: A Tutorial* // Transactions on Circuits and Systems-1: fundamental theory and application. — IEEE. — 1995. — Vol. 42, no. 10. — Pp. 583–601.

[6] С. І. Максименко, О. В. Марунчак, *Топологічна стабільність функцій відносно усереднень* // Укр. мат. журн. — 2015.

[7] P. Milanfar, *A tour of modern image filtering: new insights and methods, both practical and theoretical* // Signal Processing Magazine. — IEEE. — 2013. — Vol. 30(1). — 106–128 p.

[8] R. Thom, *L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome* // Topology. — 1965. — T. 3, №2 (suppl). — C. 297–307.

# On ultrametric fractals generated by closed convex sets of measures

**N. Mazurenko**
Vasyl Stefanyk Precarpatian National University
*mnatali@ukr.net*

In [3], the authors defined the notion of invariant idempotent measure on a complete ultrametric space. These measures are idempotent counterparts of the probabilistic fractals [2].

The probability measure functor $P$ acting on the category UMET ultrametric spaces and nonexpanding maps was considered in [1]. Given on ultrametric space $(X, d)$ the space $P(X)$ of probability measures with compact supports is endowed with the metric $\hat{d}$:

$$\hat{d}(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \nu(O_\varepsilon(x)) = \mu(O_\varepsilon(x)), \text{ for every } x \in X\}.$$

This metric turns out to be an ultrametric on $P(X)$. As usual, a nonempty subset $A \in P(X)$ is called convex if $t\mu + (1-t)\nu \in A$ for every $\mu, \nu \in A$ and $t \in [0, 1]$. We endow the set $ccP(X)$ of closed convex subsets of compact support on $X$ with the Hausdorf metric.

The aim of the talk is to obtain counterparts for the construction $ccP$ of ultrametric fractals described in [3].

[1] J. I. den Hartog and E. P. de Vink, *Building Metric Structures with the Meas-Functor*, Liber Amicorum Jaco de Bakker; F. de Boer, M. van der Heiden, P. Klint and J. Rutten (eds.), CWI, Amsterdam, 2002, 93–108.

[2] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. 30(1981), 713–747.

[3] N. Mazurenko, M. Zarichnyi, *Idempotent ultrametric fractals*, Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 79(2014), 111–118.

# Hilbert scheme and multiplet matter content

**T. V. Obikhod**
Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine
*obikhod@kinr.kiev.ua*

As a generalization of the concept of an algebraic variety, the scheme consists of a topological space $X$, the sheaf $O_X$ of commutative rings on $X$ together with covering $(X_i)_{i\in I}$ of $X$ such that $(X_i, O_{X_i\in X})$ is isomorphic to the affine scheme Spec $\Gamma(X_i, O_X)$ of the ring of sections $O_X$ over $X_i$ [1].

The study of schemes can be divided into two tasks: local and global. Local tasks are usually associated with coherent sheaves or with complexes of sheaves. For example, the study of the local structure of morphism from topoloogical space $X$ to scheme $S$, $X \to S$ is important because of sheaves of differential forms $\Omega^P_{X/S}$. The global part is usually connected with the fact that it is possible to calculate the cohomology of coherent sheaves, which are associated with homotopy invariants, Betti numbers, $b_n = \dim H^n_D$ for real manifold and so on.

One type of new schemes is algebraic space, the quotient by the equivalence relation on scheme, the special case of which is an orbifold $X/Z_n$, a generalization of the concept of an algebraic variety. Universal family of objects from the category of schemes $S$ to the category of sets $X$, $F(S) = \mathrm{Hom}(S, X)$, parameterized by the scheme, is called the Hilbert scheme [2,3].

Since the vector bundle on a smooth manifold is a locally trivial bundle of modules, and there is a correspondence between a locally free sheaves and vector bundles, it is possible to make the transition from sections of the scheme to the space of sections of vector bundles. Spaces of differential forms as a spaces of sections of vector bundles over smooth manifolds, belong to linear spaces of functional analysis, which is widely used in theoretical physics, in particular, in the string theory.

In accordance with [4], Hodge numbers as an elements of the cohomology groups, $h^{p,q} = \dim H^{p,q}$ in Kahler geometry ($H^n_D = \oplus_{p+q=n} H^{p,q}$ known as Hodge decomposition), correspond to multiplet sets of particles, and the Euler characteristic, which is defined by the Hodge numbers $\chi = \sum\limits_n (-1)^n b_n = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} h^{p,q}$ gives the number of generations of particles in high-energy physics [5]

[1] Grothendieck, A. and Dieudonné, J. A., *Eléments de géométrie algébrique. I*, B.-Hblb.-N. Y., 1971

[2] David Mumford, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, Princeton University Press, 1966.

[3] David Mumford, John Fogarty and Frances Kirwan, *Geometric Invariant Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

[4] W. V. D. Hodge, *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*, CUP Archive, 1989.

[5] P. Candelas and A. Font *Duality between the webs of heterotic and type II vacua*, Nucl. Phys. B 1998. Vol. 511. P. 295– 325.

# On the shadow problem for domains in the Euclidean spaces

**T. Osipchuk**
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
*osipchuk@imath.kiev.ua*

The problem on shadow, generalized on domains of space $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, is investigated. The shadow problem means to find the minimal number of open or closed balls satisfying some conditions and such that every line passing through the given point intersects at least one ball of the collection. In our case the conditions for the balls are following. We consider a domain in $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) and its any fixed point as the given point. So, we expect the balls are mutually non-overlapping, do not hold the given point and with centers on the boundary of the domain.

**Lemma 1.** *Let two open or closed non-overlapping balls of $\mathbb{R}^n$, with centers on a sphere $S^{n-1}$ and with radiuses less than the sphere radius, are given. Then, every ball, homothetic to the smaller ball (homothetic to one of the balls, if they are equal), relative to the sphere center, with coefficient of homothety $k_1$ would not intersect every ball, homothetic to the bigger one, relative to the sphere center, with coefficient of homothety $k_2$, if $k_1 \geq k_2$.*

**Lemma 2.** *There are four closed (opened) non-overlapping balls of $\mathbb{R}^3$, with centers in the vertexes of regular triangular pyramid and with radiuses less than the radius of sphere circumscribed about the pyramid such that generate the shadow in the sphere center.*

In [2], there are considered sets similar to the convex ones which are defined as follows.

**Definition 1.** *The set $E \subset \mathbb{R}^n$ is $m$-convex relative to the point $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, if there exists an $m$-dimensional plane $L$ such that $x \in L$ and $L \cap E = \emptyset$.*

**Definition 2.** The set $E \subset \mathbb{R}^n$ is *$m$-convex* if it is $m$-convex relative to every point $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

It is easy to verify that both definitions satisfy the axiom of convexity: the intersection of every subfamily of such sets also satisfies the definition. For every set $E \subset \mathbb{R}^n$, it can be considered the minimal $m$-convex set containing $E$ which is called *$m$-hull* of the set $E$.

**Theorem 1.** *In order that every given point $x_0$ of a domain $D \subset \mathbb{R}^2$ belong to 1-hull of mutually non-overlapping closed (open) balls which do not hold the point $x_0$ and with centers on the boundary of the domain $D$, it is sufficient to have two balls. (taken from [7]).*

**Proof.** Let us consider the circumference $S^1$ with center at the point $x_0$ and with maximal radius such that its interior is contained in domain $D$. Then, let us construct the collection of two mutually non-overlapping closed (open) circles which do not hold the point $x_0$ and with centers on the circumference as it was done in [8]. Along with, let us situate the center of the bigger circle at the point $x \in \partial D \cap S^1$. Now, we construct the circle that is homothetic to the smaller one relative to the point $x_0$ and with center on $\partial D$. Then, due to lemma 1, this ball do not intersect the bigger one. The theorem is proved. □

**Theorem 2.** *In order that every given point $x_0$ of a domain $D \subset \mathbb{R}^3$ belong to 1-hull of mutually non-overlapping closed (open) balls which do not hold the point $x_0$ and with centers on the boundary of the domain $D$, it is sufficient to have four balls. (taken from [7]).*

**Proof.** Let us consider sphere $S^2$ with center at the point $x_0$ and with maximal radius such that its interior is contained in the domain $D$. Then, let us construct the collection of four mutually non-overlapping closed (open) balls which do not hold the point $x_0$ and with centers on the sphere as it was done in lemma 2. Along with, let us situate the center of the biggest ball at the point $x \in \partial D \cap S^2$. Now, we use the homothety to the rest three balls relative to the point $x_0$ in such a way as the centers of homothetic balls to be on $\partial D$. Then, due to lemma 1 each of the balls would not intersect each other. The theorem is proved. $\square$

There exists domain of $\mathbb{R}^3$ with point that belongs to 1-hull of three mutually non-overlapping closed (open) balls which do not hold the point and with centers on the boundary of the domain. A prolate ellipsoid with value of ratio between its major and minor axis more then $2\sqrt{2}$ is the example of such domain and the ellipsoid center is the point ( [5], [6]).

You can fined more information about shadow problem and its variations in [3]– [8].


[1] *Yu.B. Zelinskii* Multivalued Mappings in Analysis [in Russian], Naukova Dumka, Kyiv, 1993, 264 pp.

[2] *Yu.B. Zelinskii* Convexity. Selected Chapters [in Russian], Inst. of Math. ot the NASU, Kyiv, 2012, **92**, 280 pp.

[3] *Yu.B. Zelinskii, I.Yu. Vygovska, M.V. Stefanchuk* Sets convex in the extended sens and the problem of shadow [in Russian], arXiv preprint arXiv:1501.06747, 2015.

[4] *Yu.B. Zelinskii* The problem of shadow for a family of sets // Zbirn. Prats Inst. Math. NANU, 12, No. 4 (2015)

[5] *M. Tkachuk, T. Osipchuk* The shadow problem for ellipsoids // Zbirn. Prats Inst. Math. NANU, 12, No. 4 (2015)

[6] *M. Tkachuk, T. Osipchuk* On the shadow problem and its generalizations to ellipsoids, arXiv preprint arXiv:1501.06747, 2015.

[7] *T. Osipchuk* On the shadow problem for domains in the Euclidean spaces, arXiv preprint arXiv:1602.01300, 2016.

[8] *G. Khudaiberganov*, On the Homogeneous Polynomially Convex Hull of a Union of Balls [in Russian], Manuscr.dep. 21.02.1982, No. 1772, 85 Dep., VINITI, Moscow, 1982.

# Finite one-sided distributive structures

**I. Yu. Raievska, M. Yu. Raievska**
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
*raeirina@imath.kiev.ua, raemarina@imath.kiev.ua*

Complicated symbolic computations are being used to solve problems from different areas of mathematics, in particular, to study of finite one-sided distributive structures.

Based on well-known system of computer algebra GAP [1] and package SONATA [2] we construct and investigate local nearrings of small order.

[1] The GAP Group, Aechen, St Andrews. GAP — Groups, Algoritms, and Programming, Version 4.6.5, 2013. (http://www.gap.dcs.st-and.ac.uk/ gap)

[2] Aichinger E., Binder F., Ecker J., Mayr P., Nöbauer C. SONATA — system of nearrings and their applications, GAP package, Version 2.8; 2015. (http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Sonata/)

# On the boundary behavior of mappings in the class $W^{1,1}_{\rm loc}$ on Riemann surfaces

**V. Ryazanov, S. Volkov**

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine

*vl.ryazanov1@gmail.com, sergey.v.volkov@mail.ru*

In terms of dilatations, it is proved a series of criteria for continuous and homeomorphic extension to the boundary of mappings with finite distortion between regular domains on the Riemann surfaces

**Theorem 1.** *(Our definitions and proofs see [1]) Let $\mathbb{S}$ and $\mathbb{S}^*$ be Riemann surfaces, $D$ and $D^*$ be domains on $\overline{\mathbb{S}}$ and $\overline{\mathbb{S}^*}$, correspondingly, $\partial D \subset \mathbb{S}$ and $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, $D$ be locally connected on its boundary and $\partial D^*$ be strongly accessible. Suppose that $f : D \to D^*$ is a homeomorphism of finite distortion with $K_f \in L^1_{\rm loc}$ and*

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{dr}{||K_f||\,(p_0,r)} \;=\; \infty \qquad\qquad \forall\ p_0 \in \partial D \tag{1}$$

*where*

$$||K_f||\,(p_0,r) \;=\; \int\limits_{h(p,p_0)=r} K_f(p)\ ds_h(p)\ . \tag{2}$$

*Then the mapping $f$ is extended by continuity to $\overline{D}$ and $f(\partial D) = \partial D^*$.*

**Corollary 1.** *In particular, the conclusion of Theorem holds if*

$$K_f(p) \quad = O\left(\log\frac{1}{h(p,p_0)}\right) \qquad as \quad p\to p_0 \qquad\qquad \forall\ p_0\in\partial D \tag{3}$$

*or, more generally,*

$$k_{p_0}(\varepsilon) = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad as \quad \varepsilon\to 0 \qquad\qquad \forall\ p_0\in\partial D \tag{4}$$

*where $k_{p_0}(\varepsilon)$ is the mean value of the function $K_f$ over the circle $h(p,p_0)=\varepsilon$.*

[1] S. Volkov, V. Ryazanov, *On the boundary behavior of mappings in the Sobolev class on Riemann surfaces*, ArXiv: 1604.00280v4 [math.CV] 9 Jun 2016, 24pp. (in English).

# Об оценке нижнего предела

**Р. Р. Салимов**

Институт математики НАН Украины, г. Киев

*ruslan623@yandex.ru*

Пусть $D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Напомним, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x) \cdot J(x,f) \tag{1}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geqslant 1$, где $f'(x)$ якобиева матрица $f$, $\|f'(x)\|$ — её операторная норма: $\|f'(x)\| = \sup\limits_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$ и $J(x,f) = \det f'(x)$ — якобиан отображения $f$.

Пусть $p > n-1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. *$\alpha$-Внутренняя дилатация* отображения в точке определяется равенством

$$K_{I,\alpha}(x,f) = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l^{\alpha}(f'(x))}, & \text{если } |J(x,f)| \neq 0 \\ 1, & \text{если } f'(x) = 0 \\ \infty, & \text{в остальных точках}\,, \end{cases} \tag{2}$$

где $l(f'(x)) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$.

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом $L^{\varphi}$ пространство всех функций $f : D \to \mathbb{R}$, таких что

$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dm(x) < \infty \tag{3}$$

при некотором $\lambda > 0$. Здесь $m$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство $L^{\varphi}$ называется *пространством Орлича.*

*Классом Орлича–Соболева* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций $f$, заданных в $D$, с первыми обобщёнными производными по Соболеву, градиент $\nabla f$ которых принадлежит классу Орлича локально в области $D$. Далее, если $f$ – локально интегрируемая вектор–функция $n$ вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right) dm(x) < \infty\,, \tag{4}$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы снова пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$.

Всюду далее $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

**Теорема 1.** *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n, n \geqslant 3$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, где $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ — неубывающая функция, такая что для некоторого $t_* \in (0,\infty)$*

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty \tag{5}$$

*и* $f(0)=0$. *Если для некоторого* $\sigma>0$

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\frac{dr}{k_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}(r)}\geqslant C_0>0, \tag{6}$$

*при всех* $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, *где* $k_{I,\alpha}(r)=\int\limits_{S(r)}K_{I,\alpha}(x,f)\,d\mathcal{A}$ , $\alpha=\frac{p}{p-n+1}$ , *то при* $p>n$ *имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|x|^{\frac{\sigma}{p-n}}}\leqslant \nu_0\,C_0^{-\frac{1}{p-n}}\,, \tag{7}$$

*где* $\nu_0$ — *положительная константа, зависящая только от размерности пространства* $n$, $p$ *и* $\sigma$.

**Замечание 1.** Приведем простой пример отображения $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ для $p>n\geqslant 3$ и $\sigma>0$, показывающий, что найденный порядок роста в оценке (7) является точным. Именно,

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\,|x|^{\frac{\sigma}{p-n}} \tag{8}$$

при $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

# Нижние оценки площади образа круга

**Р. Салимов, Б. Клищук**
Институт математики НАН Украины
*ruslan623@yandex.ru, bogdanklishchuk@mail.ru*

Пусть задано семейство $\Gamma$ кривых $\gamma$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Борелевскую функцию $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ называют *допустимой* для $\Gamma$, пишут $\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(z)\,|dz| \ \geqslant \ 1$$

для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$.

Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда *$p$–модулем* семейства $\Gamma$ называется величина

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) \ = \ \inf_{\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^p(z)\,dx\,dy\,.$$

Для произвольных множеств $E$, $F$ и $G$ в $\mathbb{C}$ через $\Delta(E, F, G)$ обозначим семейство всех непрерывных кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, которые соединяют $E$ и $F$ в $G$, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Пусть $D$ — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ и $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Положим

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant r_2\}\,,$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : \, |z - z_0| = r_i\}\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ является кольцевым $Q$-гомеоморфизмом относительно $p$-модуля в точке $z_0 \in D$, если соотношение

$$\mathcal{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \ \leqslant \ \int\limits_{\mathbb{A}} Q(z)\,\eta^p(|z - z_0|)\,dx\,dy$$

выполнено для любого кольца $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)\,,\ 0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geqslant 1\,.$$

Ниже приведены нижние оценки площади образа круга при кольцевых $Q$-гомеоморфизмах относительно $p$-модуля при $p > 2$.

**Теорема 1.** *Пусть $D$ и $D'$ — ограниченные области в $\mathbb{C}$ и $f : D \to D'$ — кольцевой $Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля в точке $z_0 \in D$ при $p > 2$. Тогда при всех $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, имеет место оценка*

$$|fB(z_0, r)| \geqslant \pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int\limits_0^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}}\, q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}},$$

*где* $B(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|\leqslant r\}$ *и* $q_{z_0}(r)=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{S(z_0,r)} Q(z)\,|dz|$ *— среднее интегральное значение по окружности* $S(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|=r\}$.

**Следствие 1.** *Пусть $D$ и $D'$ — ограниченные области в $\mathbb{C}$ и $f:D\to D'$ — кольцевой $Q$-гомеоморфизм относительно $p$-модуля в точке $z_0\in D$ при $p>2$. Предположим, что функция $Q$ удовлетворяет условию*

$$q_{z_0}(t)\leqslant q_0\,t^{-\alpha},\ q_0\in(0,\infty)\,,\ \alpha\in[0,\infty)\,,$$

*для $z_0\in D$ и п.в. всех $t\in(0,d_0)$, $d_0=\mathrm{dist}(\mathrm{z}_0,\partial\mathrm{D})$. Тогда при всех $r\in(0,d_0)$ имеет место оценка*

$$|fB(z_0,r)|\geqslant \pi^{-\frac{\alpha}{p-2}}\left(\frac{p-2}{\alpha+p-2}\right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}}\,|B(z_0,r)|^{1+\frac{\alpha}{p-2}}\,.$$

# Гомеоморфизмы, искажающие неконформные модули

**Р. Р. Салимов, Р. В. Скуратовский**

Институт математики НАНУ, НПУ, Киев,

*ruslan623@yandex.ru, ruslcomp@mail.ru*

Напомним некоторые определения. Борелева функция $\varrho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых $\Gamma$ в $\mathbb{C}$, пишут $\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(z)\, |dz| \geqslant 1$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geqslant 1$. Тогда *$p$-модулем* семейства кривых $\Gamma$ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \varrho^p(z)\, dxdy\, .$$

Пусть $G$ — область в $\mathbb{C}$. Предположим, что $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — непрерывная возрастающая функция удовлетворяющая условию $\psi(0) = 0$, $p > 1$ и $q > 1$.

Гомеоморфизм $f : G \to \mathbb{C}$ будем называть *$\langle \psi, p, q \rangle$-гомеоморфизм*, если

$$M_p(f\Gamma) \leqslant \psi\left(M_q(\Gamma)\right) \tag{1}$$

для произвольного семейства $\Gamma$ кривых $\gamma$ в области $G$.

**Теорема 1.** *Пусть $1 < p < 2$, $1 < q < 2$ и $f\colon G \to \mathbb{C}$ — $\langle \psi, p, q \rangle$-гомеоморфизм. Тогда существуют положительные постоянные $\alpha$ и $\beta$ такие, что*

$$\limsup_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{\psi^{\frac{1}{2-p}}\left(\alpha\, |z - z_0|^{2-q}\right)} \leqslant \beta < \infty$$

*для всех $z_0 \in G$.*

При $p = q$ и $\psi(t) = kt$, $k > 0$, мы приходим к результату Геринга, см. теорему 2 в [1], см. также [2].

[1] *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the $p$-capacity of ring in $n$-space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. – 1971. – **66**. – P. 175–193.

[2] *Nakai M.* Royden algebras and quasi-isometries of Riemannian manifolds. Pacific J. Math. 40 (1972), no. 2, 397–414

# Про зліченнократні відображення областей евклідових просторів

**В. М. Сафонов**

Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

*safonov_v_m@ukr.net*

Відкрите зліченнократне відображення локально компактного хаусдорфового простору в метричний простір має щільну множину точок локального гомеоморфізма. Виявляється, що для многовидів однакової вимірності припущення про відкритість відображення є зайвим. Більш того, зліченну кратність неперервного відображення можна припустити лише на множині другої категорії. В одновимірному випадку висновок теореми зводиться до існування скрізь щільної на заданому відрізку послідовності інтервалів без спільних точок, в яких відображення є строго монотонним [1] - [4].

Отже, має місце така теорема.

**Теорема 1.** *Нехай $D$ — обмежена область $n$-вимірного евклідового простору і $f : \overline{D} \to R^n$ — неперервне нульвимірне відображення таке, що множина його зліченних рівнів скрізь другої категорії. Тоді існує скрізь щільна відкрита множина $G \subset D$ точок локального гомеоморфізма $f$.*

Неважко переконатися, що твердження теореми 1 є справедливим для будь-якої відкритої множини.

**Теорема 2.** *Нехай $V$ — довільна відкрита множина $n$-вимірного евклідового простору і неперервне нульвимірне відображення $f : V \to R^n$ має множину зліченних рівнів скрізь другої категорії. Тоді існує скрізь щільна в $V$ відкрита множина $G$ точок локального гомеоморфізма відображення $f$.*

[1] Александров П.С., О счетнократных открытых отображениях // Докл. АН СССР.— 1936.— 4, №7.— С. 283-287.

[2] Трохимчук Ю.Ю., Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности.— Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008.— 539 с.

[3] Сафонов В.М., Про зліченнократні функції / Аналіз і застосування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2012. — С. 341-346.

[4] Трохимчук Ю.Ю., Сафонов В.М., О множестве второй категории счетных уровней непрерывных отображений / Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2013 — т. 10, №4-5 — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013 — С. 526-531.

# Наближення класів $(\psi, \bar\beta)$–диференційовних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами

**А. С. Сердюк, І. В. Соколенко**

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

*serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua*

Нехай $C$ і $L_p,\ 1 \le p \le \infty,$ — простори $2\pi$-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$. Позначимо через $C^{\psi}_{\bar\beta,p},\ 1 \le p \le \infty$, множину всіх $2\pi$-періодичних функцій $f$, які зображуються за допомогою згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B^0_p, \tag{1}$$

$$B^0_p = \{\varphi \in L_p : \ \|\varphi\|_p \le 1,\ \varphi \perp 1\},$$

із фіксованим твірним ядром $\Psi_{\bar\beta} \in L_{p'},\ 1/p + 1/p' = 1,$ ряд Фур'є якого має вигляд

$$\Psi_{\bar\beta}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right),$$

де $\psi = \psi(k)$ і $\bar\beta = \beta_k,\ k = 1, 2, \dots,$ — довільні послідовності дійсних чисел. Функцію $\varphi$ в зображенні (1) називають $(\psi, \bar\beta)$-похідною функції $f$ і позначають $f^{\psi}_{\bar\beta}(x)$. Поняття $(\psi, \bar\beta)$-похідної належить О.І. Степанцю (див., наприклад, [1]). Оскільки $\varphi \in L_p$, а $\Psi_{\bar\beta} \in L_{p'}$, то (див. [1, с. 144]) згортка (1) є неперервною функцією, а, отже $C^{\psi}_{\bar\beta,p} \subset C$. Зрозуміло, що при $p = 2$ умова включення $\Psi_{\bar\beta} \in L_2$ еквівалентна виконанню умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) < \infty. \tag{2}$$

Нехай $f(x)$ — довільна $2\pi$-періодична неперервна функція. Через $\tilde S_n(f; x)$ будемо позначати тригонометричний поліном порядку $n$, що інтерполює $f(x)$ у точках $x^{(n)}_k = 2k\pi/(2n+1),\ k = 0, 1, \dots, 2n$, тобто такий, що

$$\tilde S_n(f; x^{(n)}_k) = f(x^{(n)}_k), \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

Для будь-якого класу $\mathfrak{N} \subset C$ розглянемо величини

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; \tilde S_n; x) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} |f(x) - \tilde S_n(f; x)|, \quad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}.$$

**Теорема 1.** *Нехай послідовність дійсних чисел $\psi(k)$ задовольняє умову (2). Тоді для довільної послідовності $\bar\beta = \beta_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, і довільного $n \in \mathbb{N}$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\bar\beta,2}; \tilde S_n; x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sin^2\frac{(2n+1)mx}{2} \sum_{k=m(2n+1)-n}^{m(2n+1)+n} \psi^2(k)\right)^{1/2}.$$

[1] А.И. Степанец, *Методы теории приближений: В 2 ч.*, Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. 1.

# Наближення сумами Фур'є на класах узагальнених інтегралів Пуассона в рівномірній метриці

**А. С. Сердюк[1], Т. А. Степанюк[2]**

[1]Інститут математики НАН України, [2]Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

*sanatolii@ukr.net, tania_stepaniuk@ukr.net*

Позначимо через $C^{\alpha,r}_{\beta,p}, r>0, \ \ \alpha>0, \ \beta\in\mathbb{R}, \ 1\le p\le\infty$, множину всіх $2\pi$–періодичних функцій, котрі при всіх $x\in\mathbb{R}$ зображуються за допомогою згортки

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \ a_0\in\mathbb{R}, \ \varphi\in B^0_p,$$

$$B^0_p=\left\{\varphi: \ ||\varphi||_p\le 1, \ \varphi\perp 1\right\}, \ 1\le p\le\infty,$$

з ядрами вигляду

$$P_{\alpha,r,\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos\big(kt-\frac{\beta\pi}{2}\big).$$

Ядра $P_{\alpha,r,\beta}(t)$ називають узагальненими ядрами Пуассона, а класи $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ — класами узагальнених інтегралів Пуассона.

Розглядається задача про знаходження асимптотичних при $n\to\infty$ рівностей для величин

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C=\sup_{f\in C^{\alpha,r}_{\beta,p}}\|f(\cdot)-S_{n-1}(f;\cdot)\|_C, \ r>0, \ \alpha>0, \ 1\le p\le\infty,$$

де $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинні суми Фур'є порядку $n-1$ функції $f$.

При довільних $\upsilon>0$ і $1\le s\le\infty$ позначимо

$$\mathfrak{I}_s(\upsilon):=\Big\|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\Big\|_{L_s[0,\upsilon]}, \tag{1}$$

де

$$\|f\|_{L_s[a,b]}=\begin{cases}\left(\int\limits_a^b|f(t)|^s dt\right)^{\frac{1}{s}}, & 1\le s<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|, & s=\infty.\end{cases}$$

Також при довільних $\alpha>0$, $r\in(0,1)$ і $1\le p\le\infty$ покладемо $n_0=n_0(\alpha,r,p)$ — найменший з номерів $n$, такий, що

$$\frac{1}{\alpha r}\frac{1}{n^r}+\frac{\alpha r\chi(p)}{n^{1-r}}\le\begin{cases}\frac{1}{14}, & p=1,\\ \frac{1}{(3\pi)^3}\cdot\frac{p-1}{p}, & 1<p<\infty,\\ \frac{1}{(3\pi)^3}, & p=\infty,\end{cases}$$

де $\chi(p)=p$ при $1\le p<\infty$ і $\chi(p)=1$ при $p=\infty$.

В прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

**Теорема 1.** *Нехай* $0 < r < 1$, $1 \le p \le \infty$, $\alpha > 0$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді при* $n \ge n_0(\alpha, r, p)$ *справедлива оцінка*

$$\mathcal{E}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p})_C = e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \Bigg( \frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} \mathfrak{J}_{p'}\Big(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\Big) + \gamma_{n,p} \Big( \frac{1}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}} \mathfrak{J}_{p'}\Big(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\Big) \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} \Big) \Bigg),$$

*де* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, *а для величини* $\gamma_{n,p} = \gamma_{n,p}(\alpha, r, \beta)$ *виконується нерівність* $|\gamma_{n,p}| \le (14\pi)^2$.

# Про властивості функції росту петлевого автомата

**В. Скочко**

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

*vovaskochko@gmail.com*

Нехай маємо скінченну множину $X$, яку називатимемо алфавітом.

**Означення 1.** Автоматом над алфавітом $X$ називається набір $A = \langle X, Q, \pi, \lambda \rangle$, де:

1. $Q$ - множина (множина внутрішніх станів автомата);
2. $\pi : X \times Q \to Q$ - відображення (функція переходів);
3. $\lambda : X \times Q \to X$ - відображення (функція виходів).

Якщо зафіксувати деякий стан $q_0$ як початковий, то отримаємо ініціальний автомат $A_{q_0}$.

Потужністю автомата $A$ називають кількість його станів, тобто $|Q|$. Надалі розглядатимемо тільки скінченні автомати, тобто автомати зі скінченною потужністю.

На множині автоматів над $X$ можна визначити операцію композиції наступним чином.

**Означення 2.** Нехай $A_1$ та $A_2$ - деякі два автомата над $X$. Тоді їх композицією називається автомат $B = A_1 * A_2$ з множиною станів $Q_1 \times Q_2$, функцією переходів $\pi$ та функцією виходів $\lambda$, що визначені формулами:

$$\pi(x, (s_1, s_2)) = (\pi_1(x, s_1), \pi_2(\lambda_1(x, s_1), s_2)),$$

$$\lambda(x, (s_1, s_2)) = \lambda_2(\lambda_1(x, s_1), s_2).$$

Якщо розглядати ініціальні автомати $A_{1,q_1}$ і $A_{2,q_2}$, то їх композицією є автомат $B = A_1 * A_2$ з початковим станом $(q_1, q_2)$. Варто зазначити, що композиція ініціальних автоматів відповідає їх послідовному підключенню. Тобто для будь-якого слова $\omega$ має місце рівність $\phi_{B_{(q_1,q_2)}}(\omega) = \phi_{A_{1,q_1}}(\phi_{A_{2,q_2}}(\omega))$.

Зауважимо, що потужність композиції двох скінченних автоматів дорівнює добутку їх потужностей. Однак серед станів композиції можуть з'явитися тотожні, а також недосяжні(жодна літера жодного слово не потрапить на такий стан). Тому доцільно розглядати так званий редукований автомат, що отримується відкиданням недосяжних станів та заміною кількох тотожних станів на один.

**Означення 3.** Нехай автомат $A$ має початковий стан $q_0$. Тоді функцією росту $\gamma_A(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають функцію, що ставить у відповідність кожному $n$ потужність редукованого автомата для $A^n_{q_0}$.

Якщо розглядати автомати у яких для кожного стану $q$ функція виходу $\pi(\cdot, q)$ є підстановкою на $X$, то для такого автомата існує обернений автомат. Такий автомат називатимемо оборотним. Зауважимо, що якщо розглядати лише редуковані автомати, то вони утворюють групу відносно операції композиції. З іншого боку, якщо розглянути повне $|X|$-арне дерево $T$, то кожному оборотному автомату можна поставити у відповідність деякий автоморфізм з $Auto(T)$.

**Означення 4.** Порядком оборотного автомата називають порядок відповідного йому автоморфізма як елемента групи $Auto(T)$.

**Означення 5.** Петлевим ініціальним автоматом називатимемо автомат $A_{q_0}$ для якого виконуються наступні умови:

1. функції переходів усіх станів, крім початкового, тотожно дорівнюють тривіальному стану;

2. у початковому стані є рівно одна петля( $\exists! x \in X : \pi(x, q_0) = q_0$ ).

Результатом дослідження є наступні твердження.

**Теорема 1.** *Нехай $A_{q_0}$ - петлевий автомат, і $\gamma(n)$ - відповідна функція росту. Тоді існує строго зростаюча послідовність $\{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ така, що*

$$\exists C_1 > 0, C_2 > 0 \forall i : \quad \gamma(n_i) < C_1 log\, n_i + C_2.$$

**Теорема 2.** *Генератриса функції росту петлевого автомата має логарифмічний ріст. Тому вона є алгебраїчною тоді і лише тоді, коли він має скінченний порядок.*

**Зауваження 1.** Для доведення теореми використовується побудована спеціальним чином послідовність станів $\{a_i\}, i > 0$ така, що існує індекс $i_0$ та число $s$ для яких $\forall k, j \geq 0$ $a_{i+ks+j} = a_{i+j}$. Також можна побудувати алгоритм, який визначає кількість скінченних станів у $n$-ій ітерації використовуючи лише остачі від ділення числа $n$ на відповідні довжини орбіт станів $a_i$. Тобто спочатку $n$ ділиться на довжину орбіти $a_1$, потім отримана частка знову ділиться з остачею на довжину орбіти $a_2$, процес продовжується доки частка не стане рівною 0 або 1.


[1] Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский, *Автоматы, динамические системы и группы, Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **231**, 134–214, 2000.

[2] S. Eilenberg, *Automata, languages, and machines*, New York; London: Acad. Press, 1974.

# Классификация топологий на 4-элементном множестве по виду 2-КНФ задающих их булевых функций

**П. Г. Стеганцева[1], Н. П. Башова[2], А. В. Скрябина[1]**

[1]Запорожский национальный университет, [1]Запорожский национальный технический университет

*steg_pol@mail.ru, bashovanp82@gmail.com, anna_29_95@mail.ru*

Пусть задано $n$ - элементное упорядоченное множество $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Каждому из подмножеств данного множества поставим во взаимнооднозначное соответствие булев вектор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ , в котором $x_i = 1$, если $i$-тый элемент множества $X$ принадлежит этому подмножеству, и $x_i = 0$ , если не принадлежит. Рассмотрим всевозможные наборы подмножеств множества $X$. Каждому из них поставим в соответствие булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, область истинности которой задает все подмножества, принадлежащие выбранному набору. Соответствие между множеством всех булевых функций от $n$-мерных булевых векторов и множеством всех наборов подмножеств $n$-элементного множества $X$ биективно.

Будем рассматривать только такие наборы, которые задают топологии на множестве $X$. Булевы функции, соответствующие таким наборам, являются биюнктивными слабо положительными и слабо отрицательными функциями [1]. Они представимы в виде 2-КНФ, каждая дизъюнкция которых имеет вид $x_i \vee \bar{x}_j, i, j = \overline{1, n}$ [2].

**Теорема 1.** *Если булева функция задает топологию и в её 2-КНФ присутствует хотя бы одна пара дизъюнкций вида $x_i \vee \bar{x}_j$ и $\bar{x}_i \vee x_j$, то эта топология не является $T_0$-топологией. Обратное тоже верно.*

**Определение 1.** Будем называть 2-КНФ булевой функции, задающей топологию, *максимальной*, если с любой парой дизъюнкций $x_i \vee \bar{x}_j$ и $x_j \vee \bar{x}_k$ в неё входит и дизъюнкция $x_i \vee \bar{x}_k$.

Очевидно, каждой топологии на конечном множестве соответствует единственная максимальная 2-КНФ задающей её булевой функции.

**Теорема 2.** *Булева функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задает $T_0$-топологию на 4-элементном множестве $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, если её максимальная 2-КНФ имеет вид (с точностью до обозначения переменных):*

*5-класс:*

$(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$;

*6-класс:*

$(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)$;

$(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$;

$(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$;

*7-класс:*

$(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)$;

$(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$;

$(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)$;

*8-класс:*

$(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_3)$;

$(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$;
*9-класс:*
$(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)$;
$(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$;
$(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_4)$;
*10-класс:*
$(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_4)$;
$(x_1 \vee \bar{x}_4)(x_2 \vee \bar{x}_4)$;
*12-класс:*
$(x_1 \vee \bar{x}_4)$;
*16-класс:*
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 1$.

Для топологий на 4-элементном множестве, не являющихся $T_0$-топологиями, также получены соответствующие 2-КНФ. Эти 17 негомеоморфных топологий относятся к $m$-классам, где $m = 2, 3, 4, 5, 6, 8$.


[1] Башова Н.П., Стеганцев Е.В. *2-КНФ булевых функций, задающих топологии на конечном множестве.* Вестник ХНТУ. — 2015. — № 3 (54). — С. 16–20.

[2] Тарасов А.В *О свойствах функций, представимых в виде 2-КНФ.* Дискретная математика. — 2001. — Т. 13, Вып. 4 — С. 99–115.

# Властивості лінійно опуклих та спряжених функцій в гіперкомплексному просторі

**М. В. Стефанчук**
Інститут математики НАН України
*stefanmv43@gmail.com*

Дана робота присвячена узагальненню деяких результатів щодо багатозначних функцій в комплексному просторі на гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, що є прямим добутком $n$-копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$ ($\mathbb{H}^1 := \mathbb{H}$).

**Означення 1.** Функція $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ називається *багатозначною*, якщо образом точки $x \in \mathbb{H}^n$ є множина $f(x) \in \mathbb{H}$. Область визначення такої функції будемо позначати через $E_f := \{x \in \mathbb{H}^n : \text{ існує } y \in \mathbb{H},\, y = f(x)\}$.

**Означення 2.** Багатозначна функція $f\colon E_f \longrightarrow \mathbb{H}$ називається *лінійно опуклою*, якщо для довільної пари точок $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$ існує афінна функція $l$, така, що $y_0 = l(x_0)$ і $l(x) \bigcap f(x) = \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$, де через $\Gamma(f)$ позначено графік функції $f$.

**Означення 3.** *Багатозначною афінною функцією* назвемо функцію лінійно опуклу і лінійно угнуту одночасно, для якої знайдеться принаймні одна точка $x \in \mathbb{H}^n$, в якій кожна з множин $(f(x) \bigcap \mathbb{H})$, $(\mathbb{H} \setminus f(x))$ є непорожньою.

**Означення 4.** Лінійно опуклу функцію назвемо *власною*, якщо хоча б для одного $x$ виконується співвідношення: $f(x) \bigcap \mathbb{H} \neq \emptyset$ і для всіх $x$ має місце нерівність: $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$.

**Означення 5.** Функція

$$W_E(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_{x \in E} \langle x, y \rangle$$

називається *опорною функцією* множини $E \subset \mathbb{H}^n$.

**Означення 6.** Якщо $E \subset \mathbb{H}^n$ – лінійно опукла множина, то функція

$$\delta(x|E) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in E, \\ \infty, & \text{якщо } x \notin E, \end{cases}$$

називається її *індикаторною функцією.*

**Теорема 1.** *Якщо $f_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A}$, є сім'єю лінійно опуклих функцій (A — довільна множина індексів), то функція $f = \bigcap\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ є лінійно опуклою.*

**Означення 7.** Скажемо, що функція $g = \mathtt{int} f$, якщо її графік можна подати у вигляді $\Gamma(g) = \mathtt{int}\,(\Gamma(f))$, де $\mathtt{int}(\cdot)$ позначає внутрішність відповідної множини.

**Теорема 2.** *Якщо $f$ — лінійно опукла функція і $E_f = E_{\mathrm{int}(f)}$, то $\mathrm{int} f$ — лінійно опукла функція.*

**Означення 8.** Функцією, *спряженою* з $f$, назвемо функцію, що задається рівністю

$$f^*(y) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_x (\langle x, y \rangle - f(x)). \tag{1}$$

Знайдемо функцію, спряжену до функції $f^*(x)$.

$$f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_y (\langle x, y\rangle - f^*(y)).$$

**Теорема 3.** *Для кожної функції* $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ *справедливе включення* $f \subset f^{**}$.

**Означення 9.** Багатозначна функція $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ називається *відкритою (відповідно, замкненою чи компактною)*, коли її графік є відкритою (відповідно, замкненою чи компактною) множиною в $\mathbb{H}^{n+1}$.

**Теорема 4.** *Функція, спряжена до відкритої функції, буде замкненою та лінійно опуклою.*

**Теорема 5.** *Нехай* $f$ *— власна лінійно опукла функція. Тоді* $f^*$ *— власна функція.*

**Теорема 6.** *Задано відображення* $\Lambda\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$, *яке є гіперкомплексно лінійним гомеоморфізмом, і функцію* $g\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$. *Нехай*

$$f(x) = \lambda g(\Lambda x + w_0) + \langle x, y_0\rangle + \gamma_0,$$

*де* $w_0 \in \mathbb{H}^n, y_0 \in \mathbb{H}^{n*}$, $\gamma_0 \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{H}\setminus\{0\}$. *Тоді*

$$f^*(y) = \lambda g^*(\lambda^{-1}\Lambda^{-1*}(y - y_0)) - \langle \Lambda^{-1}w_0, y - y_0\rangle - \gamma_0.$$

**Теорема 7.** *Нехай багатозначна функція* $f\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}$ *така, що* $\mathbb{H}\setminus f(x) \neq \emptyset$ *для всіх* $x \in \mathbb{H}^n$. *Тоді* $f^{**} = f$ *тоді і тільки тоді, коли* $f$ *є лінійно опуклою.*

**Означення 10.** Функція $f$ називається *однорідною*, якщо $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всіх скалярів $\lambda \in \mathbb{H}\setminus 0$.

**Теорема 8.** *Нехай* $f\colon \mathbb{H}^n\setminus\Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ *є власною лінійною опуклою однорідною функцією і* $f(\Theta) = \mathbb{H}\setminus 0$. *Тоді* $f$ *є опорною функцією деякої множини.*

**Наслідок 1.** *Якщо однорідна лінійно опукла функція* $f\colon \mathbb{H}^n\setminus\Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ *є відмінною від афінної, то*

$$f^*(y) = \delta(y|E_{f^*}).$$

**Теорема 9.** *Якщо* $f\colon \mathbb{H}^n\setminus\Theta \longrightarrow \mathbb{H}$ *— однорідна лінійно опукла функція, відмінна від афінної, то*

$$f(x) = \overset{o}{\mathbb{H}} \setminus \bigcup_{y\in E_{f^*}} \langle x, y\rangle.$$

**Означення 11.** Нехай $f_\alpha\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}, \alpha \in A$, є багатозначними функціями. Функцію $(\bigcup_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcup_\alpha f_\alpha(x)$ назвемо *об'єднанням функцій* $f_\alpha$, а $(\bigcap_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcap_\alpha f_\alpha(x)$ — їх *перетином.*

**Теорема 10.** *Нехай* $f_\alpha\colon \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}, \alpha \in \mathrm{A}$, *є багатозначними функціями. Тоді виконується рівність*

$$\left(\bigcup_\alpha f_\alpha\right)^* = \bigcap_\alpha f_\alpha^*.$$


[1] Стефанчук М. В. *Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі* / М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук // Збірник праць Інституту математики НАНУ. — 2015. — Т. 12, № 3. — С. 225—235.

# Метадосконалі групи і їх властивості

**Р. В. Скуратовський**
НПУ, Киев, Украина
ruslcomp@mail.ru

У даній роботі досліджується введений автором [1] новий клас груп – метадосконалі групи, вони є узагальненям введених у статті [2,3] метазнакозмінних груп, бо знакозмінна група є досконалою при $n \geq 5$, також зроблено оцінку для кількості твірних комутанта вінцевого добутка груп. Нагадаємо, що раніше для вужчого класу груп – нескінченно ітерованих вінцевих добутків $A_{n_1} \wr A_{n_2} \wr \ldots$, де $n_i \geq 5$ у [4] неконструктивними методами була доведена двопородженість з додатньою ймовірністю. Під досконалою групою ми розуміємо таку, що $G = [G, G]$.

**Означення 1.** *Метадосконалою групою* $D(\overline{k})$, рангу $m$, метастепеня $\overline{k} = (k_1, ..., k_m)$ називається вінцевий добуток $(D_1, X_{k_1}) \wr (D_2, X_{k_2}) \wr ... \wr (D_m, X_{k_m})$ досконалих груп підстановок $(D_1, X_{k_1})$, ... ,$(D, X_{k_m})$. *Нескінченною метадосконалою* групою називатимемо таку метадосконалу групу рангу $m$ яка містить хоч одну нескінченну підгрупу $(D_i, X_i)$, що діє на нескінченній множині $X_i$.

**Теорема 1.** *Нехай $W = D \wr G$ метадосконала група і $D = \langle t_D, s_D \rangle$. Тоді якщо $G = \langle t_0, s_0 \rangle$ транзитивно діє на $X$ так, що існують орбіти $\mathcal{O}(x) = x^{\langle t_0 \rangle} = \{x^{\langle t \rangle} \mid t \in \langle t_0 \rangle\}$, де $x$ – координата, де розташовано твірні $t_D, s_D$ в базах таблиць, що є твірними для $W$, $\mathcal{O}'(x) = x^{\langle s_0 \rangle} = \{x^{\langle s \rangle} \mid s \in \langle s_0 \rangle\}$:*

$$\begin{cases} (ord(t_0)/|\mathcal{O}(x)|, ord(t_D)) \;=\; 1\,, \\ (ord(s_0)/|\mathcal{O}'(x)|, ord(s_D)) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

*і група $G$ є 2 – допустимою [1] та $D$ має скінченну ширину по комутанту [5], тоді $G \wr D$ – двопороджена.*

При дії $G \wr D$ маємо гратку систем імпримітивності з блоками $X_i$ і якщо $H$ – найменша надгрупа для $St_{x_o}(G)$ у $G$, то $\left|{}^{H}/_{St_{x_o}(H)}\right| = \left|O\left(x_0^{\langle H \rangle}\right)\right| = |X_i|$. Нехай $\mathfrak{Q}(x_0) = \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}'(x)$.

Нехай $\Im$ – найменша гратка блоків імпримітивносі метадосконалої групи групи $D_{k-1}$ з $D_1 \wr D_2 \wr ... \wr D_k$, що утворена дією класів суміжності групи $D_{k-1}$ за найменшою надгрупою $H$ стабілізатора $St_{x_0}(G)$ з $D_{k-1}$ на множині $X_{k-1}$.

**Теорема 2.** *Якщо $|\mathfrak{Q}(x_0)| \neq |X_i|$, тобто перетин орбіт не є рівнопотужним з блоком імпримітивності гратки $\Im$, тоді $D_{k-1} > H > St_{x_0}(G)$, де $D_i$, $i \leq k$ – досконала, то має місце 2-допустимість [1].*

**Зауваження 1.** Умова $|\mathfrak{Q}(x_0)| \neq |H|$ буде виконуватися, якщо $(|\mathfrak{Q}(x_0)|, |H|) = 1$. Отже, ця умова є достатньою для наявності 2-допустимості.

**Твердження 1.** *Метадосконала група $D$, яка є обмеженим вінцевим добутком груп є досконалою.*

**Твердження 2.** *В класі нескінченних метадосконалих груп існує підклас $W_\infty$ таких груп, які є необмеженим вінцевим добутком транзитивних досконалих груп але не є досконалими, якщо хоч одна пасивна група має нескінченну ширину по комутанту [5].*

**Доведення.** Використаємо нескінченну знакозмінну групу

$$A = \cup_{i=5}^{\infty} Alt(i). \tag{2}$$

Для доведення наведемо типову констуркцію яка легко узагальнюється на прикладі необмеженного вінцевого дообутку досконалих груп, що не є досконалою групою. Розглянемо вінцевий добуток $W = B \wr A$ (тут $A$ активна) двох досконалих груп $A$ та $B$ і покажемо, що він не є досконалою групою.

Група $A$ діє на множині натуральних чисел. Група $A$ досконала, бо всі $Alt(i)$ досконалі для $i \geq 5$ і $Alt(i+1) > Alt(i)$. $B$ – деяка досконала група з нескінченною шириною по комутанту.

Припустимо $W = B \wr A$ досконала. Тобто кожен елемент $w$ з $W$ можна подати як добуток обмеженої кількості комутаторів:

$$w = [x_1, y_1] \dots [x_n, y_n] = (w_1, w_2, \dots)\pi \tag{3}$$

В $(w_1, w_2, \dots)\pi$ використано нескінченну послідовність елементів $w_i$ з , бо згідно з (3) $A$ діє на $\mathbb{N}$ а в силу необмеженості її ширини по комутанту можна ці елементи вибрати так, що $w_i$– це добуток з $i$ комутаторів. Випишемо вінцеві рекурсії для $x_i$ та $y_i$, де $\sigma_i$ стабілізує всі точки починаючи з $n+1$-го місця а $\sigma_i'$ – починаючи з $k$-го місця:

$$x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots)\sigma_i, \;\; y_i = (y_{i,1}, y_{i,2}, \dots)\sigma_i' \tag{4}$$

З одного боку ми поклали, що довільний $w = [x_1, y_1] \dots [x_n, y_n]$. А з іншого боку, оскільки $B$ має нескінченну ширину по комутанту, то ми можемо покласти, що кожен $w_i$ у представленні $(w_1, w_2, \dots)\pi$ з (3) є добутком не менш $i$ комутаторів. Виберемо найменше таке $k$, що всі точки $l \geq k$, є нерухомими для всіх підстановок $\sigma_i$ та $\sigma_i'$. Тоді всі $w_l$ для $l \geq k$ є добутками комутаторів $w_l = [x_{1,l}, y_{1,l}] \cdot [x_{2,l}, y_{2,l}] \cdot \ldots \cdot [x_{n,l}, y_{n,l}]$. При цьому нехай елемент $w_l$ : $l = max\{n+1, k\}$, в результаті ми не зможемо подати побудований елемент $w$ як добуток не більше ніж з $n$ комутаторів. Справді він містить $w_l$, який має представлення (3), на $w_l$ як на елемент пасивної групи вершинні перестановки $\sigma_i, \sigma_i'$ з $A$ діють тривіально, бо $l \geq k, l \geq n+1$. Як наслідок $w_l$ містить добуток не менш ніж $l$ комутаторів $\prod_{j=1}^{l} [b_{l,j}, b_{l,j}^{'}]$, де $b_{l,j}, b_{l,j}^{'} \in B$ а отже ми знайшли $w$, який не є добутком $n$ комутаторів і він не єдиний. $\square$


[1] Р. В. Скуратовський, *Мінімальні системи твірних і властивості вінцевих добутків досконалих груп*, // Наукові вісті НТУУ "КПІ". 4, 2014, с. 94-101.

[2] М. В. Заводя, В. С. Сікора, В. І. Сущанський.*Системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу*, Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Чернівці Рута - 2006. -V.314-315. - С. 64-72.

[3] М. В. Заводя, В. С. Сікора, В. І. Сущанський. *Двухелементні системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу*, // Мат. Студії. – 2010. – Т.34, С.3–12.

[4] Bhattacharjee M. *The probability of generating certain profinite groups by two elements*, // // Israel J. Math. 86, 1994. — P. 311–329.

[5] Alexey Muranov. *Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width.* arXiv:math/0608688v4 [math.GR] 12 Sep 2009.

# Минимальные системы образующих для венечноциклических групп, групп автоморфизмов графов Риба и фундаментальных групп орбит некоторых функций Морса

**Р. В. Скуратовский**

НПУ, Киев, Украина

*ruslcomp@mail.ru*

Рассмотрим класс венечноциклических групп $\Im$ (пусть $G \in \Im$) построенных по формуле:

$$G = (\prod_{i_1=1}^{k_1} \mathbb{C}_{n_{i_1}}) \wr (\prod_{i_2=1}^{k_2} \mathbb{C}_{n_{i_2}}) \wr ... \wr (\prod_{i_m=1}^{k_m} \mathbb{C}_{n_{i_m}}),\ 1 \leq k_i \leq \infty.$$

Где под операцией сплетения понимают сплетение групп как груп подстановок, владеющее свойством ассоциативности. Из определения следует, что все произведения конечны.

**Теорема 1.** *Группа являющаяся сплетением циклических групп как групп подстановок действующих регулярно:* $\mathbb{C}_{n_1} \wr \mathbb{C}_{n_2} \ldots \wr \mathbb{C}_{n_m}$, *где* $(n_i, n_j) = 1$ *при* $i \neq j$, *имеет ранг 2 (он обозначается* $d(G)$ *[1]) т.е. есть 2-порожденной.*

Обозначим $G_j = \prod_{i_j=1}^{k_j} C_{i_j}$. Пусть $rk_1 = d(G_1)$, $rk_2 = d(\prod_{j=2}^{m} G_j)$ – ранги указанных групп.

**Теорема 2.** *Пусть* $G \in \Im$, *тогда* $d(G) = rk_1 + rk_2$.

Оказывается [2] подклас групп из класса $\Im$ изоморфен группам автоморфизмов графа Риба некоторых функций Морса на компактных поверхностях.

**Замечание 1.** Если произведение $\prod_{i_j=1}^{k_j} C_{i_j}$ из $G$ вместо циклических групп содержало бы $H^n$, где $H = A \times B$, а $A$ – прямое произведение абелевых простых групп, $B$ – прямое произведение неабелевых простых групп, то в $d(G)$ вместо количества образующих для $\prod_{i_j=1}^{k_j} C_{i_j}$ появится количество образующих $\max\{\beta n, d(B^n)\}$, где $\beta = d\left({}^{A}/_{A'}\right)$ [4].

Найдена минимальная система образующих из двух элементов для группы $H = (\mathbb{Z})^n \ltimes \mathbb{Z}$, имеющей приложения в топологии [3], найден гомоморфизм из группы $\mathbb{Z}$ как подгруппы $H$ в $Aut(\mathbb{Z})^n < H$, заданный на образующих группы $(\mathbb{Z})^n$.

[1] О. В. Богопольский, *Введение в теорию групп*, М., Наука, (2002), 148 с.

[2] S. I. Maksymenko, *Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms,* (2013) arXiv:math/1311.3347v2.

[3] S. I. Maksymenko, *Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces,*// Annals of Global Analysis and Geometry, vol. 29, no. 3 (2006), P. 241-285.

[4] J. Wiegold, *Growth sequences of finite groups 3,* // J. Austral. Math. Soc. 20, (Series A). (1975), P. 225-229.

# Twisted Edwards curve and its group of points over finite field $F_p$

**R. V. Skuratovskii, U. V. Skruncovich**
NPU, Kiev, Ukraine
*ruslcomp@mail.ru, julian.skrunkovich@gmail.com*

We consider the conditions of supersingularity of Edwards curve [1–3]. A normalization of this curve was constructed by us in projective form, genus of twisted Edwards curve was count by us and it equals to 1. We denote twisted Edwards curve having coefficients $a$ and $d$ as $E_{a,d}$. It was found the mistake in conditions of supersingularity for this curve in theorem 3 of article [4]. More particularly if $p \equiv -3(\text{mod}8)$ there is no degenerated twisted pair of curves as it states in [4]. Also if condition $p \equiv \pm 7(\text{mod}8)$ holds then the orders of correspondent curves are such $N_{E_2} = N_{E_{2^{-1}}} = p - 3$ that are not equal $p + 1$ as it states in [4]. For instance theorem 3 from [4] is also rejected by the following data if $p = 31$ then $N_{E_2} = N_{E_{2^{-1}}} = 28 = 8 \cdot 3 + 7 - 3$. The main result of this paper is the theorem.

**Theorem 1.** *If $p \equiv 3 \ (mod\ 4)$ and $p$ is prime, then numbers of points on $x^2+y^2 = 1+2x^2y^2$ and on $x^2 + y^2 = 1 + 2^{-1}x^2y^2$ over $F_p$ are equal $N_{E_{1,2}} = N_{E_{1,2^{-1}}} = p + 1$ when $p \equiv 3(\text{mod}8)$ and $N_{E_2} = N_{E_{2^{-1}}} = p - 3$ when $p \equiv 7(\text{mod}8)$.*

There are two fundamental points [5] $((0, \pm 1), (\pm\sqrt{a}, 0))$ on $E_{a,d}$. The interesting relations between points of $E_{a,d}$ were found.

**Theorem 2.** *For every no fundamental point $(x, y)$ of $E_{a,d}$ holds the condition $\left(\frac{1- \ ax^2}{p}\right)\left(\frac{1-y^2}{p}\right) = \left(\frac{a-d}{p}\right)$.*

If $a$ is a quadratic residue over $F_p$ then it exists the isomorphism between Edwards curve $E_{1,d}$ and twisted Edwards curve $E_{a,d}$, which is given by the mapping $X \mapsto \sqrt{a}x, Y \mapsto y$. This fact and the theorem 1 lead us to a condition of supersingularity of $E_{a,d}$.

**Remark 1.** Point of order 8 exists on $E_{a,d}$ if and only if point of order 4 exists on $E_{a,d}$ and following conditions holds $(\frac{\frac{1}{d}(1\pm\sqrt{1-\frac{d}{a}})}{p}) = 1$, $(\frac{\frac{a}{d}(1\pm\sqrt{1-\frac{d}{a}})}{p}) = 1$, $(\frac{a}{p}) = 1$, $(\frac{1-\frac{d}{a}}{p}) = 1$.

The normalization of this curve was founded due to following regular substitutions $x : z = u : w = t : v,\ y : z = t : u = v : w$. As a result we get normalized curve in projective form:

$$\begin{cases} au^2 + v^2 = w^2 + dt^2 \\ uv = wt. \end{cases}$$

[1] *Alekseev E. K., Oshkin I.V., Popov V.O., Smishliev S.V.* "About perspectives of using twisted Edwsrds curves in Gost R 34.10-2012" proceedings of the XVI conference "RusCrypto 2014".

[2] *Bernstein Daniel J., Birkner Peter, Joye Marc, Lange Tanja, Peters Christiane.* Twisted Edwards Curves. IST Programme under Contract IST-2002-507932 ECRYPT, 2008. PP. 1-17.

[3] *Hisil Huseyin, Koon-Ho Wong Kenneth, Carter Gary.* Twisted Edwards Curves Revisited. ASIACRYPT 2008, LNCS 5350, PP. 326-343.

[4] *Bessalov A. V., Tsygankova O.V. Correlation of big order points sets of the Edwards curves over prime field.* // Information protection. Vol. 17, no. 1 (2015), P. 73-79.

[5] *W. Fulton* Algebraic curves. An Introduction to Algebraic Geometry. Third Preface, January, 2008. P. 121.

# Групи гомеотопій несингулярних шарувань кореневоподіних смугастих поверхонь

**Ю. Ю. Сорока**

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

*sorokayulya15@gmail.com*

**Означення 1.** *Спеціальною модельною смугою* назвемо відкриту підмножину $S \subset \mathbb{R} \times [0;1]$, яка задовольняє умовам:

1) $\mathbb{R} \times (0;1) \subset S$;
2) $\partial_- S_\lambda = S \cap \mathbb{R} \times \{0\} \cong (0,1)$;
3) $\partial_+ S = S \cap \mathbb{R} \times \{1\}$ є незв'язним об'єднанням інтервалів, замикання яких в $\mathbb{R} \times [0;1]$ попарно не перетинається і утворюють локально скінченну множину.

Якщо дано дві модельні смуги $S_1$ та $S_2$, то *стандартною приклейкою* $S_2$ до $S_1$ назвемо приклеювання за допомогою зберігаючого орієнтацію афінного гомеоморфізма нижньої межі $\partial_- S_2$ до деякого інтервалу межі $\partial_+ S_1$.

Кожну модельну смугу $S$ будемо також називати *смугастою поверхнею діаметра 0*, а граничні інтервали з $\partial_+ S$ назвемо *граничними інтервалами рівня 1*. За індукцією, якщо визначена смугаста поверхня діаметра $i$, $i \geq 0$ та множина граничних інтервалів рівня $i+1$, то *смугастою поверхнею діаметра* $i+1$ назвемо поверхню утворену стандартною приклейкою модельних смуг $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ до деяких граничних інтервалів рівня $i+1$. Граничні інтервали з $\bigsqcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \partial_+ S_\lambda$ називатимемо *граничними інтервалами рівня* $i+2$. Клас смугастих поверхонь скінченного діаметру позначимо через $\mathfrak{F}$.

Кожна модельна смуга має канонічне орієнтоване шарування на горизонтальні прямі $\mathbb{R} \times t$, $t \in (0,1)$ і компоненти межі. Так як гомеоморфізми приклейки ототожнюють шари таких шарувань, то кожна смугаста поверхня також несе на собі шарування $F$, що складається з шарів шарувань на модельних смугах. Це шарування також є орієнтованим. Називатимемо його *канонічним*.

Позначимо через $G(F) = \Sigma / F$ – простір шарів, і нехай $\pi : \Sigma \to G(F)$ – фактор-відображення. Наділимо $G(F)$ фактор-топологією, тобто множину $U$ в $G(F)$ вважатимемо відкритою тоді і тільки тоді, коли її прообраз $\pi^{-1}(U)$ є відкритим в $\Sigma$. В загальному випадку $G(F)$ є нехаусдорфовим топологічним простором. При цьому образ внутрішності кожної модельної смуги $S_\lambda$ в $G(F)$ є відкритою множиною гомеоморфною відкритому інтервалу. Позначатимемо його через $e_\lambda$ і називатимемо ребром. Таким чином, $G(F)$ можна розглядати як «нехаусдорфовий» граф, у якого «розщеплені» вершини. Ці вершини відповідають граничним інтервалам модельних смуг. Нехай $V$ — множина вершин графа, $E = \{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ - множина ребер графа $G(F)$. Покладемо $\partial_+ e_\lambda = \pi(S_\lambda \cap \mathbb{R} \times \{1\})$ і $\partial_- e_\lambda = \pi(S_\lambda \cap \mathbb{R} \times \{0\})$.

Нехай $\Sigma$ — смугаста поверхня класу $\mathfrak{F}$ і $G(F)$ — її простір шарів. Позначимо через $H^+(F)$ групу всіх гомеоморфізмів $h : \Sigma \to \Sigma$, які задовольняють таким умовам:

1) для довільного шару $\omega \in F$ його образ $h(\omega)$ є також шаром $F$ і при цьому обмеження $h|_\omega \colon \omega \to h(\omega)$ зберігає орієнтацію;
2) $h(\partial_- S) = \partial_- S$ і $h(\partial_+ S) = \partial_+ S$.

Нехай також $\pi_0 H^+(F) = H^+(F) \diagup H_0^+(F)$ — група гомеотопій шарування $F$, де $H_0^+(F)$ — підмножина $H^+(F)$, що складається з гомеоморфізмів, які ізотопні тотожному в $H^+(F)$.

Визначимо через $H(G)$ — групу гомеоморфізмів графа $G(F)$. Легко перевірити, що кожен гомеоморфізм смугастої поверхні $h : \Sigma \to \Sigma$ з $H^+(F)$ індукує гомеоморфізм графа $\rho(h) : G(F) \to G(F)$, причому відповідність $h \mapsto \rho(h)$ є гомоморфізмом $\rho : H^+(F) \to H(G)$.

Нехай $K = \rho(H^+(F))$ і $K_0$ — група гомеоморфізмів графа $G(F)$ з $K$, що ізотопні тотожному відображенню, тоді справедлива така характеризація групи $K$.

**Лема 1.** *Гомеоморфізм $g$ з $H(G)$ належить групі $K$ тоді і лише тоді, коли $g$ зберігає лінійний порядок вершин на межі $\partial_+ e$ для кожного ребра $e$ графа $G(F)$.*

Зв'язок груп гомеотопій графа та смугастих поверхонь класу $\mathfrak{F}$ показує наступна теорема.

**Теорема 1.** *Нехай $\Sigma \in \mathfrak{F}$ і $F$ - канонічне шарування. Тоді $\rho$ індукує ізоморфізм груп $\pi_0 H^+(F)$ та $\pi_0 K$.*

[1] Sergiy Maksymenko and Eugene Polulyakh, *Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces* Methods of Functional Analysis and Topology **3**, (2016) arXiv:1606.00045

[2] Sergiy Maksymenko and Eugene Polulyakh, *Foliations with non-compact leaves on surfaces*, Proceedings of Geometric Center **8** (2015), no. 3–4, 17–30.

[3] Yu. Yu. Soroka, *Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations on the plane*, to appear in Methods of Functional Analysis and Topology **3**, (2016)

# Variety of semisymmetry-like medial quasigroups

**O. O. Tarkovska**
Khmelnitskiy National University, Khmelnitskiy, Ukraine
*tark.olena@gmail.com*

A groupoid $(Q;\cdot)$ is called a *quasigroup* [1], if for all $a,\ b \in Q$ each of $x \cdot a = b$ and $a \cdot y = b$ has a unique solution. For every permutation $\sigma$ from the symmetry group $S_3$, a *$\sigma$-parastrophe* $(\overset{\sigma}{\cdot})$ of an arbitrary quasigroup operation $(\cdot)$ is defined by:

$$x_{1\sigma} \overset{\sigma}{\cdot} x_{2\sigma} = x_{3\sigma} \ :\Longleftrightarrow\ x_1 \cdot x_2 = x_3.$$

A class of quasigroups ${}^{\sigma}\mathfrak{A}$ consisting of all $\sigma$-parastrophes of quasigroups from $\mathfrak{A}$ is called a *$\sigma$-parastrophe* of $\mathfrak{A}$. It is shown [2] that an arbitrary assertion is satisfied in a class of quasigroups if and only if its $\sigma$-parastrophic assertion holds in $\sigma$-parastrophe of this class. $\sigma$-parastrophic assertion is defined as an assertion being obtained from the given one by replacing operation $(\cdot)$ with its $\sigma^{-1}$-parastrophe.

A set of all pairwise parastrophic classes is called a *truss*. A truss of varieties is uniquely defined by one of its varieties. If an identity determines a given variety, then all parastrophes of the identity determine all varieties of this truss.

Quasigroups $(Q;\cdot)$ and $(Q;\circ)$ are *isotopic* iff there exists a triple of bijections $(\alpha,\beta,\gamma)$ such that $x \cdot y = \gamma^{-1}(\alpha x \circ \beta y)$ holds for all $x,\ y \in Q$. A quasigroup $(Q;\cdot)$ is called a *group isotope* [3], if it is isotopic to a group. Let $(Q;\cdot)$ be a group isotope and 0 be an arbitrary element from $Q$. The right part of

$$x \cdot y = \alpha x + a + \beta y$$

is called a 0-*canonical decomposition*, if $(Q;+)$ is a group, 0 is its neutral element and $\alpha 0 = \beta 0 = 0$.

**Definition 1.** Conditions for components of a canonical decomposition are called *canonical conditions of an identity*, if they hold exclusively for those group isotopes, which are satisfied the identity.

The identity $xy \cdot uv = xu \cdot yv$ is called *medial*. It defines the variety of medial quasigroups.

**Lemma 1.** *The identities*

$$x \cdot (yu \cdot v) = y \cdot (xu \cdot v), \quad (1) \qquad (x \cdot yu) \cdot v = (x \cdot yv) \cdot u, \quad (2) \qquad ((xy \cdot u) \overset{\ell}{\cdot} v) \cdot x = vy \cdot u, \quad (3)$$

$$(x \overset{r}{\cdot} yu) \cdot yv = u \cdot xv, \quad (4) \qquad x \cdot (y \overset{r}{\cdot} (u \cdot vx)) = u \cdot vy, \quad (5) \qquad xy \cdot (uy \overset{\ell}{\cdot} v) = xv \cdot u \quad (6)$$

*are pairwise parastrophic.*

The identity (1) will be called *semisymmetry-like identity*. The variety defined by this identity will be called by the *variety of semisymmetry-like quasigroups*. They are close to semisymmetric group isotopes.

**Theorem 1.** *The variety of semisymmetry-like quasigroups is a subvariety of the variety of all medial quasigroups and is described by the following canonical conditions: commutativity of canonical decomposition group and compositions of its coefficients are identical.*

**Theorem 2.** *Each of identities* (1)–(6) *defines the same truss of varieties. Namely, if variety* $\mathfrak{S}$ *is defined by identity* (1)*, then* (2) *also defines* $\mathfrak{S}$*, identities* (3) *and* (6) *define variety* ${}^{\ell}\mathfrak{S}$*, identities* (4) *and* (5) *define variety* ${}^{r}\mathfrak{S}$.

[1] V.D. Belousov, *Foundations of the theory of quasigroups and loops*, Nauka, Moskow, 1967, 222. (Russian)

[2] F.M. Sokhatsky, *Symmetry in quasigroup and loop theory*, 3rd Mile High Conference on Nonassociative Mathematics, Denver, Colorado, USA, August 11-17, 2013. http://web.cs.du.edu/ petr/milehigh/2013/Sokhatsky.pdf.

[3] F.M. Sokhatsky, *About group isotopes II*, Ukrainian Math. Journal, 1995, 47 (12). (Ukrainian)

# Fundamental groups of orbits of smooth functions on 2-torus

**B. Feshchenko**

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine

*fb@imath.kiev.ua*

**1. Stabilizers and orbits of smooth functions**. Let $M$ be a smooth closed surface, $X$ be a closed (possibly empty) subset of $M$, and $\mathcal{D}(M, X)$ be the group of diffeomorphisms of $M$, which are fixed on $X$. The group $\mathcal{D}(M, X)$ acts on the space $C^\infty(M)$ of smooth functions on $M$ by the following rule:

$$\gamma : C^\infty(M) \times \mathcal{D}(M, X) \to C^\infty(M), \qquad \gamma(f, h) = f \circ h.$$

Under the action $\gamma$ we will define the stabilizer

$$\mathcal{S}(f, X) = \{h \in \mathcal{D}(M, X) \,|\, f \circ h = f\},$$

and the orbit

$$\mathcal{O}(f, X) = \{f \circ h \,|\, h \in \mathcal{D}(M, X)\}$$

of $f \in C^\infty(M)$.

Endow on $\mathcal{D}(M, X)$ and $C^\infty(M)$ the corresponding Whitney topologies. These topologies induces certain topologies on $\mathcal{S}(f, X)$ and $\mathcal{O}(f, X)$. Let also $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$ be a connected component of $\mathcal{D}(M, X)$, which contains $\mathrm{id}_M$ and $\mathcal{O}_f(f, X)$ be the corresponding connected component of $\mathcal{O}(f, X)$, which contains $f$. In addition we set $\mathcal{S}'(f, X) := \mathcal{S}(f, X) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$.

If $X = \varnothing$ we omit $X$ from our notations, i.e., we put $\mathcal{O}(f, \varnothing) = \mathcal{O}(f)$, $\mathcal{D}(M, \varnothing) = \mathcal{D}(M)$, and so on.

**2. Wreath products**. Let $G$ be the group with the unit 1. Now we give definitions of wreath products of $G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2$ and $G \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}$, $n, m \geq 1$. Let $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ be the set of all maps from $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ to $G$ with pointwise multiplication, i.e., let $\alpha, \beta \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$; then

$$(\alpha \cdot \beta)(i, j) = \alpha(i, j) \cdot \beta(i, j), \qquad (i, j) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m.$$

The group $\mathbb{Z}^2$ acts on $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ by the rule: if $\alpha \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ and $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, then the result $\alpha^{k,l}$ of this action is given by the formula

$$\alpha^{k,l}(i, j) = \alpha(i + k \bmod n, j + l \bmod m), \qquad (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

The semi-direct product $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \rtimes \mathbb{Z}^2$, which corresponds to this action, we will denote by

$$G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2 = \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \rtimes \mathbb{Z}^2,$$

and will call it a *wreath product of $G$ and $\mathbb{Z}^2$ under $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.*

Similarly to the above we define a wreath product of $G \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}$. Let $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n, G)$ be the set of all maps from $\mathbb{Z}_n$ to $G$. The group $\mathbb{Z}$ acts on the set $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n, G)$ by the rule:

$$\alpha^k(i) = \alpha(i + k \bmod n), \qquad i \in \mathbb{Z}_n.$$

The semi-direct product $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n, G) \rtimes \mathbb{Z}$, which corresponds to this action we will denote by $G \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z}$, and will call it a *wreath product of $G$ and $\mathbb{Z}$ under $\mathbb{Z}_n$.*

**3. Class of smooth functions $\mathcal{F}(M)$**. Let $\mathcal{F}(M) \subset C^\infty(M)$ be the set of smooth functions satisfying the following two conditions:

(B) the function $f$ takes a constant value at each connected component of $\partial M$, and all critical points of $f$ belong to the interior of $M$;

(P) for each critical point $x$ of $f$ the germ $(f, x)$ of $f$ at $x$ is smoothly equivalent to some homogeneous polynomial $f_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ without multiple linear factors.

**4. Main result**. The following theorem gives the description of fundamental groups of functions from the class $\mathcal{F}(T^2)$ on 2-torus $T^2$.

**Theorem 1.** *Let $f$ be a function on 2-torus $T^2$ from the class $\mathcal{F}(T^2)$ and $\Gamma_f$ be its Kronrod-Reeb graph. Then we have on of the following two cases: if*

- $\Gamma_f$ *is a tree, then there exist the set of 2-disks $\{D_i\}_{i=0}^r \subset T^2$ for some $r \in \mathbb{N}$ and $n, m \in \mathbb{N}$ such that*

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \prod_{i=0}^{r} \pi_0 \mathcal{S}'(f|_{D_i}, \partial D_i) \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2.$$

  *In particular, $\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f) \times \mathbb{Z}^2$, whenever $n = m = 1$.*

- $\Gamma_f$ *has a cycle, then there are the cylinder $Q$ and $n \in \mathbb{N}$ such that*

$$\pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_1 \mathcal{O}_f(f|_Q, \partial Q) \wr_{\mathbb{Z}_n} \mathbb{Z},$$

  *see* [1]– [5]


[1] Sergiy Maksymenko, Bogdan Feshchenko, *Homotopy properties of spaces of smooth functions on 2–torus*, Ukrainian Mathematical Journal, vol. 66, no. 9 (2014) 1205-1212 http://arxiv.org/abs/1401.2296arXiv:1401.2296

[2] Sergiy Maksymenko, Bogdan Feshchenko, *Orbits of smooth functions on 2–torus and their homotopy types*, Matematychni Studii, vol. 44, no. 1 (2015) 67-83 http://arxiv.org/abs/1409.0502arXiv:1409.0502 (submited to Mat. Studii), 2014.

[3] Sergiy Maksymenko, Bohdan Feshchenko, *Functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graph contains a cycle*, Methods of Functional Analysis and Topology, no. 1 (2015) 22-40, http://arxiv.org/abs/1411.6863arXiv:1411.6863.

[4] Bohdan Feshchenko, *Deformations of smooth functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graps is a tree*, Proceedings of Intsitute of Mathematics of Ukrainian NAS, vol. 12, no. 6 (2015)

[5] Bohdan Feshchenko, *Actions of finite groups and smooth functions on surfaces*, 11 pages, submitted to Methods of Functional analysis and Topology, 2016

# Constructing $n$-ary quasigroups

**I. Fryz**
Khmelnitskiy National University, Khmelnitsky, Ukraine
*iryna.fryz@ukr.net*

An operation $f$ on a set $Q$ is called *$i$-invertible* if for arbitrary $a_1,\ldots,\, a_{i-1},\, b,\, a_{i-1},\ldots,\, a_n$ of $Q$ there exists a unique element $x \in Q$ such that

$$f(a_1,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_n) = b.$$

If $f$ is called an *invertible* or a *quasigroup* operation, if it is $i$-invertible for all $i \in \overline{1,n} := \{1,\ldots,n\}$. The $i$-th division ${}^{(i)}f$ of an $i$-invertible operation $f$ is defined by

$${}^{(i)}f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) = y :\Leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_n) = x_i$$

for all $x_1,\ldots,x_n,y \in Q$.

For every permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$, a *principal $\sigma$-parastrophe* of operation $f$ is defined by

$${}^{\sigma}\!f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{1\sigma^{-1}},\ldots,x_{n\sigma^{-1}}).$$

Binary operations $g$ and $h$ defined on $Q$ are called *orthogonal*, if for all $a,b \in Q$ the system of equations $\{g(x,y) = a,\ h(x,y) = b$ has a unique solution.

**Definition 1.** Let $\{i_1,\ldots,i_k\}$, $\{j_1,\ldots,j_s\} \subseteq \overline{1,n}$ and

$$f(x_1,\ldots,x_n) {:=} g(x_{i_1},\ldots,x_{i_{m-1}},h(x_{j_1},\ldots,x_{j_s}),x_{i_{m+1}},\ldots,x_{i_k}).$$

Then $f$ is

- a *repetition decomposition*, if $\{i_1,\ldots,i_k\} \cap \{j_1,\ldots,j_s\} \neq \varnothing$;
- a *repetition-free decomposition*, if $\{i_1,\ldots,i_k\} \cap \{j_1,\ldots,j_s\} = \varnothing$.

**Definition 2.** A quasigroup is called *permutably reducible*, if it has a repetition-free decomposition.

**Definition 3.** [1] Let $\tau$ and $\upsilon$ be arbitrary partial injective transformations of the set $\overline{1,n}$ and $\overline{1,n} = \operatorname{Im}\tau \cup \operatorname{Im}\upsilon$. Then a pair of binary operations will be called *$(\tau,\upsilon)$-respective $\{m;p\}$-retracts* of $g$ and $h$ if they are defined by terms that are obtained from

$$g(x_{1\tau},\ldots,x_{n\tau}), \qquad h(x_{1\upsilon},\ldots,x_{n\upsilon})$$

in the following way: all the variables of the terms are replaced with some elements from $Q$, except $x_m$ and $x_p$, where $p \neq m$; in addition, if a variable appears in both terms, then it is replaced with the same element.

**Definition 4.** [1] Let $\tau$ and $\upsilon$ be arbitrary partial injective transformations of the set $\overline{1,n}$ and $\overline{1,n} = \operatorname{Im}\tau \cup \operatorname{Im}\upsilon$ and $m \in (\operatorname{Im}\upsilon \cap \operatorname{Im}\tau)$. Operations $g$ and $h$ will be called *perpendicular of the type* $(\tau,\upsilon;m)$ if for all $p \in (\operatorname{Im}\upsilon \cap \operatorname{Im}\tau)\backslash\{m\}$ every pair of $(\tau,\upsilon)$-respective $\{m;p\}$-retracts is orthogonal.

Perpendicularity concept is one of generalizations of orthogonality of binary operations and is defined by certain orthogonal binary retracts.

**Theorem 1.** *[1] Let $\tau$, $\upsilon$ be arbitrary partial injective transformations of $\overline{1,n}$; $g$, $h$ be invertible operations;*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g(x_{1\tau},\ldots,x_{((m)\tau^{-1}-1)\tau}, h(x_{1\upsilon},\ldots,x_{n\upsilon}), x_{((m)\tau^{-1}+1)\tau},\ldots,x_{n\tau}) \tag{1}$$

*be fulfilled. Then the invertibility of operation $f$ is equivalent to the perpendicularity of the type $(\tau,\upsilon;m)$ of $g$ and ${}^{(J_\upsilon(m))}h$, where $J_\upsilon(m) := |\{1\upsilon,\ldots,m\upsilon\}|$.*

The following statement gives a method for constructing $n$-ary quasigroup which have repetition composition by two quasigroups.

**Corollary 1.** *Let $\tau$, $\upsilon$ be arbitrary partial injective transformations of $\overline{1,n}$, where $\operatorname{Im}\tau \cap \operatorname{Im}\upsilon \neq \varnothing$; $g$ and ${}^{(k)}h$ be perpendicular quasigroups of the type $(\tau,\upsilon;m)$. Then operation $f$ which is defined by (1) is a quasigroup.*

**An algorithm for constructing $n$-ary quasigroups.** $f_1$ and $f_2$ are orthogonal binary quasigroups, $f$ is $(k-1)$-ary, $w_1$ is $(s+1)$-ary, $w_2$ is $(\ell+1)$-ary quasigroups, $\sigma \in \mathrm{S}_n$.

1. Construction of operations $g_1$, $g_2$ by

$$\begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_k) := f_1(x_1, f(x_2,\ldots,x_k)), \\ g_2(x_1,\ldots,x_k) := f_2(x_1, f(x_2,\ldots,x_k)). \end{cases}$$

2. Construction of operations $h_1$, $h_2$ by

$$h_1(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+s}) := w_1(g_1(x_1,\ldots,x_k),x_{k+1},\ldots,x_{k+s}),$$
$$h_2(x_1,\ldots,x_k,x_{k+s+1},\ldots,x_n) := w_2(g_2(x_1,\ldots,x_k),x_{k+s+1},\ldots,x_n).$$

3. Construction of operation $p$ by

$$p(x_1,\ldots,x_n) := h_1\big({}^{(1)}h_2(x_1,\ldots,x_k,x_{k+s+1},\ldots,x_n),x_2,\ldots,x_{k+s}\big).$$

4. Finding $\sigma$-parastrophe ${}^\sigma p$ of the operation $p$.

**Theorem 2.** *Let $m \in \overline{1,n}$. If $m\sigma = 1$, then*

*1) operations $h_1$ and $h_2$ which are constructed by items 1)-2) are perpendicular quasigroups of the type $(\tau,\upsilon;1)$, where $\tau$ and $\upsilon$ are partial injective monotonically ascendant transformations of the set $\overline{1,n}$ and satisfy the conditions*

$$\operatorname{Im}\tau \cap \operatorname{Im}\upsilon = \overline{1,k}, \qquad \{(k+1)\tau,\ldots,(k+s)\tau\} = \varnothing, \qquad \{(k+s+1)\upsilon,\ldots,n\upsilon\} = \varnothing;$$

*2) operation ${}^\sigma p$ which is constructed by items 1)-4) is a quasigroup with a repetition decomposition.*

This algorithm constructs permutably reducible quasigroups which have repetition decomposition by two quasigroups.

[1] F.M. Sokhatsky, I.V. Fryz, *Invertibility criterion of composition of two multiary quasigroups*, Comment. Math. Univ. Carolin., **53, 3** (2012), 429 − 445.

# Стаціонарні гармонійні та $\delta$-субгармонійні функції на однорідних просторах

**В. Хорощак**

Львівський національний університет імені Івана Франка

*v.khoroshchak@gmail.com*

У роботі [1] вивчаються стаціонарні гармонійні функції на однорідному просторі $(\overrightarrow{\mathbb{R}}^3, G)$, де $\overrightarrow{\mathbb{R}}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) = x : x_1^2 + x_2^2 > 0\}$ - пронизаний евклідів простір, $G$ - група композицій з гомотетій та обертань навколо осі $x_3$. Зафіксуємо $q$, $0 < q < 1$. Розглянемо підгрупу $H$ групи $G$, яка складається з композицій гомотетій з коефіцієнтом $\{q^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, та обертань навколо осі $x_3$, які задаються матрицею $A$. Тоді гармонійну в $\overrightarrow{\mathbb{R}}^3$ функцію $h$ назвемо *стаціонарною відносно* $H$, якщо вона задовольняє наступну умову

$$\forall x \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^3 \qquad h(q^n A x) = h(x).$$

Позначимо через $\mathcal{H}_H$ клас таких гармонійних функцій. Ми довели, що клас $\mathcal{H}_H$ є нетривіальним, тобто містить відмінні від сталих гармонійні функції. Окрім цього показали існування у прошарку подвійно періодичних гармонійних функцій трьох змінних.

Наступний етап дослідження полягає у вивченні стаціонарних $\delta$-субгармонійних функцій на однорідному просторі $\left(\mathring{\mathbb{R}}^3, \mathcal{G}\right)$, де $\mathring{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $\mathcal{G}$ - група композицій елементів з групи обертань $SO(3)$ та гомотетій.

Зафіксуємо $\tau = q \circ \rho \in \mathcal{G}$, де $0 < q < 1,\ \rho \in SO(3)$. Нехай $\mathcal{H}$ циклічна підгрупа групи $\mathcal{G}$, породжена елементом $\tau$.

**Означення 1.** $\delta-$Субгармонійну в $\mathring{\mathbb{R}}^3$ функцію $u$ назвемо **стаціонарною відносно** $\mathcal{H}$, якщо вона задовольняє умову

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathring{\mathbb{R}}^3 \qquad u(\tau^n x) = u(x).$$

Множину стаціонарних $\delta-$субгармонійних в $\mathring{\mathbb{R}}^3$ функцій відносно $\mathcal{H}$ позначатимемо через $\delta SH_{\mathcal{H}}(\mathring{\mathbb{R}}^3)$.

Через $\nu(t)$ позначимо функцію розподілу деякої міри $\mu$ в $\mathring{\mathbb{R}}^3$ (див. [2]). Через $\mathcal{B}$ будемо позначати клас обмежених борелевих множин в $\mathring{\mathbb{R}}^3$, замикання яких містяться в $\mathring{\mathbb{R}}^3$. Для $B \in \mathcal{B}$ покладемо $\tau B = \{\tau x : x \in B\}, \quad \tau \in \mathcal{G}$.

Ми доводимо наступні теореми.

**Теорема 1.** *Міра $\mu$ в $\mathring{\mathbb{R}}^3$ є мірою Ріса функції з класу $\delta SH_{\mathcal{H}}(\mathring{\mathbb{R}}^3)$ тоді і лише тоді, коли виконуються обидві умови*

*(i)$\mu(\tau B) = q\mu(B)$ для кожної $B \in \mathcal{B}, \quad \tau = q \circ \rho$;*

*(ii)$\int\limits_{qr}^{r} \frac{d\nu(t)}{t} = 0$ для всіх $r > 0$, де $\nu(t)$ функція розподілу міри $\mu$.*

**Теорема 2.** *Кожна функція $u \in \delta SH_{\mathcal{H}}(\mathring{\mathbb{R}}^3)$ зображається у такому вигляді*

$$u(x) = C + \int\limits_{q<|a|\leq 1} K_\tau(x, a) d\mu_u(a),$$

*де*

$$K_\tau(x,a)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{|a|}-\frac{1}{|\tau^n x-a|}\right)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|\tau^{-n}x-a|},$$

$q<|a|\le 1,\ C$ - *деяка стала.*


[1] V. S. Khoroshchak, A. A. Kondratyuk. Stationary harmonic functions on homogeneous spaces, *Ufimsk. Mat. Zh.,* 2015, Volume 7, Issue 4, 155-159.

[2] V. S. Khoroshchak, A. A. Kondratyuk. *The Riesz measures and a representation of multiplicatively periodic $\delta$-subharmonic functions in a punctured Euclidean space*, Mat. Stud., 43 (2015), 61–65. doi:10.15330/ms.43.1.61-65

# On some identities of ternary quasigroups

**Dina Ceban**
Moldova State University
*cebandina@mail.ru*

Let $Q$ be a nonempty set and let $n$ be a positive integer. An $n$-ary groupoid $(Q, A)$ is called an $n$-ary quasigroup if in the equality $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{n+1}$ any element of the set $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ is uniquely determined by the remaining $n$ elements. If $(Q, A)$ is an $n$-ary quasigroup and $\sigma \in S_n$, then the operation ${}^{\sigma}A$ defined by the equivalence: ${}^{\sigma}A(x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, \ldots, x_{\sigma n}) = x_{\sigma(n+1)} \Leftrightarrow A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_{n+1}$, for every $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in Q$, is called a $\sigma$-parastrophe (or, simply, a parastrophe) of $(Q, A)$. We will denote the transposition $(i, n+1)$, where $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, by $\pi_i$, so ${}^{(i,n+1)}A = {}^{\pi_i} A$. A $\sigma$-parastrophe of an $n$-ary quasigroup $(Q, A)$ is called a principal parastrophe if $\sigma(n+1) = n+1$. The $n$-ary operations $A_1, A_2, \ldots, A_n$, defined on $Q$, are called orthogonal if, for every $a_1, a_2, \ldots, a_n \in Q$, the system of equations $\{A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ has a unique solution. A system of $n$-ary operations $A_1, A_2, \ldots, A_s$, defined on a set $Q$, where $s \geq n$, is called orthogonal if every $n$ operations of this system are orthogonal. For every mapping $\theta : Q^n \to Q^n$ there exist, and are unique, $n$ $n$-ary operations $A_1, A_2, \ldots, A_n$, defined on $Q$, such that $\theta((x_1^n)) = (A_1(x_1^n), A_2(x_1^n), \ldots, A_n(x_1^n))$, for every $(x_1^n) \in Q^n$. Moreover, the mapping $\theta$ is a bijection if and only if the operations $A_1, A_2, \ldots, A_n$ are orthogonal [1, 4]. The operations $E_1, E_2, \ldots, E_n$, defined on $Q$, where $E_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$, for every $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Q$, are called the $n$-ary selectors on $Q$. An $n$-ary operation $A$ is a quasigroup operation if and only if the system $\{A, E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ is orthogonal. $n$-Ary quasigroups, for which there exist $n$ orthogonal parastrophes (principal parastrophes) are called parastrophic-orthogonal (self-orthogonal). Quasigroups with minimal identities are parastrophic orthogonal [2, 5]. T. Evans proved in [3] that if a ternary quasigroup $(Q, A)$ satisfies the identity $A(x, A(x, y, z), A(z, x, y)) = A(y, z, x)$, then it is self-orthogonal.

If $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, E_1, E_2, \ldots E_n\}$ is an orthogonal system, then we will denote the system $\{A_1\theta, A_2\theta, \ldots, A_n\theta, E_1\theta, E_2\theta, \ldots, E_n\theta\}$ by $\Sigma\theta$. A bijection $\theta : Q^n \to Q^n$ is called a paratopy of the system $\Sigma$ if $\Sigma\theta = \Sigma$.

Let $A_1, A_2, A_3$ be ternary quasigroups defined on a nonempty set $Q$ and let $E_1, E_2, E_3$ be the ternary selectors: $E_i(x_1, x_2, x_3) = x_i, \forall x_1, x_2, x_3 \in Q, i = \overline{1,3}$. We consider the orthogonal system $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ and denote the set $\{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1\theta, E_2\theta, E_3\theta\}$ by $\Sigma\theta$. Let $\theta : Q^3 \to Q^3$, $\theta = (B_1, B_2, B_3)$, be a mapping, where $B_1, B_2, B_3$ are ternary operations on $Q$ and $\theta(x_1^3) = (B_1(x_1^3), B_2(x_1^3), B_3(x_1^3))$, for every $(x_1^3) \in Q^3$. If $\theta$ is a paratopy of $\Sigma$, then $\Sigma = \Sigma\theta = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, E_1\theta, E_2\theta, E_3\theta\} = \{A_1\theta, A_2\theta, A_3\theta, B_1, B_2, B_3\}$, so $\{B_1, B_2, B_3\} \subset \Sigma$, i.e. all paratopies of $\Sigma$ are triples of operations from $\Sigma$.

We proved that, a triple of operations of $\Sigma$ defines a paratopy of $\Sigma$ if and only if the quasigroup operations of $\Sigma$ are expressed each by other (using parastrophy and/or superposition) and, in most of cases, the corresponding quasigroup satisfies an identity. Moreover, some of the obtained identities involve the self-orthogonality of the corresponding ternary quasigroup or of its binary retracts. We showed in [6, 7] that there exist 153 orthogonal systems consisting of three ternary quasigroup operations and three ternary selectors, which admit at least one non trivial paratopy.

Let $\Sigma = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3\}$ be an ortogonal system, where $A_1, A_2, A_3$ are ternary quasigroup operations, defined on a set $Q$, and $E_1, E_2, E_3$ are the ternary selectors on $Q$. We show [6, 7] that the existence of nontrivial paratopies of $\Sigma$ implies the folowing 67 identities, where $A \in \{A_1, A_2, A_3\}$:

1. $A(A,^{(132)}A,^{(123)}A) = E_2;$
2. $A(A,^{(132)}A,^{(123)}A) = E_3;$
3. $A(E_1, A,^{(23)}A) = E_3;$
4. $A(E_1, E_3,^{\pi_2}A(E_1, E_2, A)) = {}^{\pi_3}A(E_1, A, E_3);$
5. $A(E_1,^{\pi_3}A(E_1, A, E_3), E_2) = {}^{\pi_2}A(E_1, E_2, A);$
6. $A(^{\pi_2}A(E_3, A, E_2), E_1,^{\pi_1}A(A, E_3, E_1)) = A;$
7. $A(^{\pi_2}A(E_2, E_1, A),^{\pi_3}A(A_1, E_1, E_3), E_1) = E_2;$
8. $A(^{\pi_3}A(A, E_3,^{\pi_3}A(E_2, A, E_3)), E_1, A) = E_2;$
9. $A(^{\pi_2}A(E_2, E_3, A),^{\pi_1}A(E_3, E_1, A), E_3) = A;$
10. $A(^{\pi_3}A(E_2, E_3, A),^{\pi_1}A(A, E_1, E_2), E_1) = A;$
11. $A(E_3, A,^{\pi_2}A(E_2,^{\pi_2}A(A, E_2, E_1), A)) = E_1;$
12. $A(^{\pi_3}A(E_3, A, E_2), E_2,^{\pi_1}A(E_2, A, E_1)) = A;$
13. $A(A,^{\pi_1}A(E_3, A, E_1), E_2) =^{\pi_2} A(E_3, E_2, A);$
14. $A(E_2,^{\pi_1}A(A, E_3, E_1),^{\pi_2}A(E_3, A, E_2)) = A;$
15. $A(^{\pi_3}A(E_2, A, E_3),^{\pi_1}A(E_2, E_1, A), E_2) = E_1;$
16. $A(E_2,^{\pi_3}A(E_3, A,^{\pi_3}A(A, E_1, E_3)), A) = E_1;$
17. $A(^{\pi_2}A(E_2, E_3, A),^{\pi_1}A(E_3, E_1, A), E_3) = A;$
18. $A(^{\pi_3}A(A, E_2, E_3), E_2, E_1) =^{\pi_1} A(E_1, E_2, A);$
19. $A(E_3, E_2,^{\pi_1}A(E_1, E_2, A) =^{\pi_3} A(A, E_2, E_3);$
20. $A(E_1,^{\pi_3}A(A, E_3, E_1),^{\pi_2}A(A, E_1, E_2)) = A;$
21. $A(A, E_3,^{\pi_1}A(^{\pi_1}A(E_1, A, E_2), E_1, A))) = E_2;$
22. $A(^{\pi_2}A(E_2, A, E_1),^{\pi_3}A(E_3, E_1, A), E_2) = A;$
23. $A(^{\pi_2}A(A, E_3, E_2), A, E_1) =^{\pi_1} A(E_1, E_3, A);$
24. $A(E_3,^{\pi_3}A(E_2, E_3, A),^{\pi_1}A(A, E_1, E_2)) = A;$
25. $A(^{\pi_2}A(E_3, E_2, A), E_3,^{\pi_1}A(E_3, A, E_1)) = E_1;$
26. $A(E_2,^{\pi_3}A(E_3, A, E_1), A) =^{\pi_2} A(A, E_2, E_1);$
27. $A(^{\pi_3}A(E_3, A, E_2), E_2,^{\pi_1}A(E_2, A, E_1)) = A;$
28. $A(E_1,^{\pi_3}A(A, E_3, E_1),^{\pi_2}A(A, E_1, E_2)) = A;$
29. $A(^{\pi_3}A(E_3, E_1, A), E_3,^{\pi_2}A(E_2, A, E_1)) = A;$
30. $A(^{\pi_3}A(A, E_3, E_2), E_1, A) =^{\pi_1} A(E_1, A, E_2);$
31. $A(E_3,^{\pi_1}A(E_1, E_3, A),^{\pi_2}A(A, E_3, E_2)) = E_2;$
32. $A(A,^{(12)}A, E_3) = E_2;$
33. $A(^{\pi_2}A(A, E_2, E_3), E_1, E_3) =^{\pi_1} A(E_1, A, E_3);$
34. $A(E_2,^{\pi_1}A(E_1, A, E_3), E_3) =^{\pi_2} A(A, E_2, E_3);$
35. $A(E_1, E_2, A(E_1, E_2, A)) = {}^{\pi_3}A;$
36. $A(E_1, E_2, A(E_1, E_2, A)) = {}^{\pi_3}A;$
37. $A(E_1, E_2, A(E_2, E_1, A)) = {}^{(123)\pi_3}A;$
38. $A(E_1,^{(23)\pi_3}A, A(E_1, A, E_2)) = E_3;$
39. $A(E_1,^{\pi_3}A(E_1, E_3, A),^{\pi_2}A(E_1, A, E_2)) = A;$
40. ${}^{(132)\pi_2}A(E_2,^{(132)\pi_2}A, E_1) = A(E_3, E_1, A);$
41. ${}^{\pi_2}A(^{\pi_3}A(E_3, E_1, A), A,^{\pi_2}A(E_2, A, E_1)) = E_3;$
42. $A(A, E_3, A(E_3, E_1, A)) = {}^{(132)\pi_2}A;$
43. $A(E_3,^{(132)\pi_1}A, A(A, E_1, E_2)) = E_2;$
44. $A(E_3,^{\pi_3}A(E_2, E_3, A),^{\pi_1}A(A, E_1, E_2)) = A;$
45. $A(^{\pi_3}A(E_3, E_2, A), E_2,^{\pi_1}A(A, E_2, E_1)) = A;$
46. $A(^{(13)\pi_3}A, E_2, A(A, E_2, E_1)) = E_3;$
47. $A(E_1, A(E_1, E_3, A),^{(23)\pi_2}A) = E_2;$
48. $A(E_1, {}^{\pi_3}A(E_1, E_3, A), {}^{\pi_2}A(E_1, A, E_2)) = A;$
49. $A(A, A(E_2, A, E_1), E_2) =^{(123)\pi_3} A;$
50. $A(^{\pi_2}A(E_2, A, E_1),^{\pi_3}A(E_3, E_1, A), E_2) = A;$

51. $A(E_1, A(E_1, A, E_3), E_3) = {}^{\pi_2}A;$
52. $A(E_1, A(E_3, A, E_1), E_3) = {}^{(13)\pi_2}A;$
53. $A({}^{(12)\pi_2}A, A(A, E_1, E_3), E_3) = E_2;$
54. $A({}^{\pi_2}A(E_2, A, E_3), {}^{\pi_1}A(A, E_1, E_3), E_3) = A;$
55. $A(E_2, A(A, E_3, E_1), {}^{(123)\pi_2}A) = E_3;$
56. $A(E_2, {}^{\pi_1}A(A, E_3, E_1), {}^{\pi_2}A(E_3, A, E_2)) = A;$
57. $A(A(E_2, E_3, A), {}^{(123)\pi_1}A, E_1) = E_2;$
58. $A({}^{\pi_3}A(E_2, E_3, A), {}^{\pi_1}A(A, E_1, E_2), E_1) = A;$
59. $A(A(E_3, E_2, A), E_2, {}^{(123)\pi_1}A) = E_1;$
60. $A({}^{\pi_3}A(E_3, E_2, A), E_2, {}^{\pi_1}A(A, E_2, E_1)) = A;$
61. $A(A(A, E_2, E_1), E_2, A) = {}^{(123)\pi_3}A;$
62. $A(A(E_2, A, E_3), {}^{(12)\pi_1}A, E_3) = E_1;$
63. $A({}^{\pi_2}A(E_2, A, E_3), {}^{\pi_1}A(A, E_1, E_3), E_3) = A;$
64. $A(A(E_3, A, E_2), E_1, {}^{(132)\pi_1}A) = E_3;$
65. $A({}^{\pi_2}A(E_3, A, E_2), E_1, {}^{\pi_1}A(A, E_3, E_1)) = A;$
66. $A(A(A, E_2, E_3), E_2, E_3) = {}^{\pi_1}A;$
67. $A(A(A, E_3, E_2), E_2, E_3) = {}^{(23)\pi_1}A.$

**Theorem 1.** *Every of the given above 67 identities on ternary quasigroups is equivalent to one of the following four identities:*
*I.* ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, {}^{\gamma}A, {}^{\delta}A) = E_1,$
*II.* ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, {}^{\gamma}A, E_1) = E_2,$
*III.* ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, E_1, E_2) = {}^{\gamma}A({}^{\delta}A, E_1, E_3),$
*IV.* ${}^{\alpha}A({}^{\beta}A, E_1, E_2) = {}^{\gamma}A({}^{\delta}A, E_1, E_2),$
*where $A$ is a ternary quasigroup and $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S_4$.*


[1] Belousov V. *Systems of orthogonal operations.* Matem. Sbornik, 1968, 77 (119), 33-52 (in Russian).

[2] Belousov V. *Parastrofic-orthogonal quasigroups.* Quasigroups and Related Systems, 14 (2005), 3-51.

[3] Evans T. *Latin cubes orthogonal to their transposes - a ternary analogue of Stein quasigroups.* Aequationes Math. 9 (1973), 296-297.

[4] Syrbu P. *On orthogonal and self-orthogonal $n$-ary operations.* Matem. Issled., 66 (1987), 121-129 (in Russian).

[5] Syrbu P., Ceban D. *On $\pi$-quasigroups of type $T_1$.* Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica., 2014, no.2, 36-43.

[6] Syrbu P., Ceban D. *On paratopies of orthogonal systems of ternary quasigroups. I.* Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica (to appear).

[7] Syrbu P., Ceban D. *Paratopies of orthogonal systems of ternary quasigroups.* 12th International Scientific Seminar "Discrete Mathematics and its Applications", dedicated to the memory of academician O. B. Lupanov, State University "M. V. Lomonosov", Moscow, Russia (to appear).

# Многовиди Калабі-Яу та голоморфоно-проективні перетворення.

**Е. В. Черевко, О. Є. Чепурна**
ОНЕУ, Одеса, Україна
*cherevko@usa.com, chepurna67@gmail.com*

Келерові многовиди використовуються вже досить довгий час для побудови суперсиметричних сігма-моделей, зокрема відомої моделі, Веса-Зуміно [6]. Метрика $g$ келерового многовиду фігурує у лагранжиані суперсиметричної взаємодії:

$$L = \frac{1}{2} g_{i\hat{j}} D\Phi^i \overline{D} \Phi^{\hat{j}},$$

де

$$\Phi^i(x,\theta) = \phi^i(x) + \overline{\theta}\psi^i(x) + \overline{\theta}\theta F^i(x)$$

– деяке суперполе. Також, у теорії струн використовуються компактні келерові многовиди, так звані *многовиди Калабі-Яу*. Найчастіше їх визначають, як компактні Келерові многовиди $\mathcal{K}^{2m}$, кривина Річі яких дорівнює нулю [1]:

$$R_{ij} = 0, \qquad i,j = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Тут ми вважаємо $n = 2m$ є дійсною розмірністю многовиду, а $m$ – комплексною. У цій роботі ми розглянемо можливість застосувати до многовидів Калабі-Яу голоморфно-проективні вдображення. Дамо деякі необхідні означення.

Нехай, $(M^{2m}, g, J)$ – довільний майже комплексний многовид. Причому, $g$ є римановою метрикою цього многовиду, а $J$ – його майже комплексною структурою. Крива $L$ простору $M^{2m}$ в якому існує напівсиметрична майже комплексна зв'язність, що є заданою параметричними рівняннями $x^i = x^i(t)$, та відповідає диференціальним рівнянням [5, с. 258]:

$$\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma^h_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \alpha(t)\frac{dx^h}{dt} + \beta(t)J^h_i\frac{dx^i}{dt}, \tag{2}$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – деякі функції, а $\Gamma^h_{jk}$ – коефіцієнти майже комплексної зв'язності, має назву *аналітично-планарної*, або, *голоморфно-планарної* кривої.

**Означення 1.** Дифеоморфізм $f : M^{2m} \longrightarrow \overline{M}^{2m}$ зветься *голоморфно-проективним відображенням*, якщо у результаті дії $f$ усі голоморфно-планарні криві $M^{2m}$ переходять у голоморфно-планарні криві $\overline{M}^{2m}$.

Фактично, голоморфно-проективне відображення – це співвідповідність двох напівсиметричних майже комплексних зв'язностей. Якщо вони є симетричними, то:

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \delta^k_i\psi_j + \delta^k_j\psi_i - \psi_t J^t_i J^k_j - \psi_t J^t_j J^k_i,$$

де $\psi_i$ – деякий, визначений на $M^{2m}$ ковектор. $\Gamma^k_{ij}$ та $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ – коефіцієнти зв'язностей відповідно многовидів $M^{2m}$ та $\overline{M}^{2m}$. Оскільки метрики на обох многовидах є келеровими, то ці зв'язності будемо вважати зв'язностями Леві-Чівіта. Тензори Річчі цих многовидів пов'язані таким чином:

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} + (2m+2)\psi_{ij}, \tag{3}$$

де

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i\psi_j + \psi_t J_i^t \psi_s J_j^s, \tag{4}$$

Комою $''{,}''$ або символом $''\nabla''$, в залежності від зручності ми позначатимемо коваріантну похідну у зв'язності Леві-Чівіта келерової метрики $g_{ij}$ многовиду $(M^{2m})$.

Тепер, нехай $f : \mathcal{CY}^{2m} \longrightarrow \overline{\mathcal{CY}}^{2m}$ є голоморфно-проєктивним відображенням многовидів Калабі-Яу $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ та $(\overline{\mathcal{CY}}^{2m}, \overline{g}, J)$. Тоді, внаслідок (1) є та (3) з (4) маємо, що

$$\psi_{i,j} - \psi_i\psi_j + \psi_t J_i^t \psi_s J_j^s = 0. \tag{5}$$

Тепер, згорнемо (5) з $J_k^i J_l^j$. враховуючи властивості афінора $J$, маємо

$$\psi_{i,j} J_k^i J_l^j - \psi_i\psi_j J_k^i J_l^j + \psi_k\psi_l = 0.$$

або

$$\psi_{t,s} J_i^t J_j^s - \psi_t\psi_s J_i^t J_j^s + \psi_i\psi_j = 0. \tag{6}$$

Якщо додати (5) та (6), отримаємо:

$$\psi_{t,s} J_i^t J_j^s + \psi_{i,j} = 0. \tag{7}$$

Згорнемо (7) з тензором $g^{ij}$, що є матрицею зворотньою до матриці $g^{ij}$ метричного тензору многовиду $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$. Внаслідок того, що ця метрика є ермітовою, тобто

$$g^{ij} = g^{ts} J_i^t J_j^s,$$

маємо, що

$$g^{ij}\psi_{i,j} = 0. \tag{8}$$

З іншого боку, обидві зв'язності, як $\Gamma_{ij}^k$ так і $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ є зв'язностями Леві-Чівіта, отже тензори Річчі $R_{ij}$, $\overline{R}_{ij}$. Отже з (3) та (4) випливатиме, що

$$\psi_{i,j} - \psi_{i,j} = 0. \tag{9}$$

Ковектор $\psi_i$ задовільняє (8) та (9), отже, він є гармонічним [5, с. 28]. В силу компактності $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ та (1) можна зробити висновок, що вектор $\psi_i$ є коваріантно сталим( [5, с. 29]):

$$\psi_{i,j} = 0.$$

Отже, звідси випливає, що (5) можна записати у вигляді:

$$-\psi_i\psi_j + \psi_t J_i^t \psi_s J_j^s = 0. \tag{10}$$

Згорнемо (10) з контраваріантним вектором $\psi^i = \psi_k g^{ik}$. Внаслідок того, що

$$\psi^k \psi_t J_k^t = 0,$$

отримуємо

$$-||\psi||^2\psi_j = 0, \tag{11}$$

де $||\psi||^2 = \psi_k g^{ik} \psi_i$. Оскільки метрика на многовиді $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ є рімановою, (11) означатиме, що вектор $\psi_i$ є нульовим. Отже, ми отримали теорему.

**Теорема 1.** *Між двома многовидами Калабі-Яу* $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ *та* $(\overline{\mathcal{CY}}^{2m}, \overline{g}, J)$ *неможливо навіть локально встановити нетривіальне голоморфно проективне відображення.*

Нехай на майже комплексному многовиді $M^n$, на якому задано напівсиметричну $J$-зв'язність, існує векторне поле $\xi$, таке, що перетворення

$$\overline{x}^h = x^h + \epsilon\xi^h(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{12}$$

для малих значень $\epsilon$ відображує будь-яку аналітично-планарну криву у аналітично-планарну криву. Тоді, перетворення (12) матиме назву *інфінітезимального голоморфно-проективного перетворення.* Враховуючи (2), маємо [5, с. 267]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi\Big(\frac{d^2x^h}{dt^2} + \Gamma^h_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} - \alpha(t)\frac{dx^h}{dt} - \beta(t)J^h_i\frac{dx^i}{dt}\Big)&\\ = \gamma(t)\frac{dx^h}{dt} + \delta(t)J^h_i\frac{dx^i}{dt}&\end{aligned} \tag{13}$$

уздовж будь-якої аналітично-планарної кривої, де $\gamma(t)$ та $\delta(t)$ – деякі функції параметру $t$. Символом $\mathfrak{L}_\xi$ ми позначаємо похідну Лі(Lie derivative) геометричних об'єктів. Зокрема, похідна Лі тензора $\mathfrak{L}_\xi T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ типу $(p, q)$ уздовж векторного поля $\xi$ в координатах має вигляд [2, с. 196]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q,s}\xi^s + T^{i_1\ldots i_p}_{kj_2\ldots j_q}\xi^k{}_{,j_1} + \ldots + T^{i_1\ldots i_p}_{kj_k\ldots j_q}\xi^k{}_{,j_1} -&\\ -T^{li_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\xi^{i_1}{}_{,l} - T^{i_1i_2\ldots l}_{j_1\ldots j_q}\xi^{i_p}{}_{,l}.&\end{aligned} \tag{14}$$

Похідна Лі об'єкту зв'язності, матиме вигляд:

$$\mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{ij} = \rho_j\delta^h_i + \rho_i\delta^h_j - \rho_tJ^t_iJ^h_j - \rho_tJ^t_jJ^h_i + \theta_j\delta^h_i + \theta_tJ^t_iJ^h_j, \tag{15}$$

де $\rho$ та $\theta$ – є певними ковекторними полями. Вектор $\xi$ має назву *$H$-проективного вектору.* Якщо ж $J$-зв'язність є симетричною, то (15) прийме вигляд [4]:

$$\mathfrak{L}_\xi\Gamma^h_{ij} = \rho_j\delta^h_i + \rho_i\delta^h_j - \rho_tJ^t_iJ^h_j - \rho_tJ^t_jJ^h_i. \tag{16}$$

Кажуть, що ковектор $\rho$ є *асоційованим ковектором* до вектору $\xi$. Крім симетричності $J$-зв'язності, вимагатимемо збереження при перетвореннях майже комплексної структури, а саме

$$\mathfrak{L}_\xi J^i_j = \xi^k\partial_kJ^i_j - J^\alpha_j\partial_\alpha\xi^i + J^i_\alpha\partial_j\xi^\alpha = 0.$$

Оскільки ми розглядатемо лише симетричні $J$-зв'язності, частинні похідні можна замінити коваріантними у будь якій симетричній зв'язності:

$$\mathfrak{L}_\xi J^i_j = \xi^k\nabla_kJ^i_j - J^\alpha_j\nabla_\alpha\xi^i + J^i_\alpha\nabla_j\xi^\alpha = 0.$$

Для довільного келерового многовиду $(\mathcal{K}^{2m}, g, J)$ у зв'язності Леві-Чівіта келерової метрики, рівняння інфінітезимальних перетворень, що зберігатимуть комплексну структуру, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}&1)\xi_{i,j} = \xi_{ij};\\ &2)\rho_{,i} = \rho_i;\\ &3)\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \rho_jg_{ik} + \rho_kg_{ij} - \rho_tJ^t_jJ_{ik} - \rho_tJ^t_kJ_{ji};\\ &4)\rho_{i,j} = \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi R_{ij};\\ &5)\mathfrak{L}_\xi J^i_j = \xi^k\nabla_kJ^i_j - J^\alpha_j\nabla_\alpha\xi^i + J^i_\alpha\nabla_j\xi^\alpha = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Тепер, нехай досліджуваний многовид є многовидом Калабі-Яу $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$. Внаслідок компактності можна зробити висновок, що голоморфно-проективний вектор $\xi$ є контраваріантним аналітичним вектором, внаслідок теореми наведеної у [4], [5, с. 280]. Вектор $\xi$ має назву голоморфно-проективного, якщо він є розв'язком рівнянь ($17_1$-$17_4$). Вектор, для якого виконується ($17_5$) ми звемо контраваріантним аналітичним вектором. Враховуючи це, а також, беручі до уваги (1), отримуємо, що на многовиді Калабі-Яу $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$, система рівнянь інфінітезимальних перетворень, що зберігатимуть комплексну структуру (17) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &1)\xi_{i,j} = \xi_{ij};\\ &2)\rho_{,i} = \rho_i;\\ &3)\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J^t_j J_{ik} - \rho_t J^t_k J_{ji};\\ &4)\rho_{i,j} = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Отже, асоційований вектор $\rho_i$ є коварінтно сталим. Тепрер, якщо ми згорнемо ($17_3$) з $g^{jk}$, ми отримаємо, що

$$g^{jk}\nabla_j\nabla_k\xi_i = \xi_\alpha R^\alpha_i,$$

де $R^l_i = g^{lj}R_{ij}$. Вврахowуючи (1), маємо:

$$g^{jk}\nabla_j\nabla_k\xi_i = 0. \tag{19}$$

Для довільного компактного многовиду $M^n$ та довільного векторного поля $\xi^i$ на ньому, є справедливою формула ( [5, с. 26]):

$$\int\limits_{M^n} \big((g^{jk}\nabla_j\nabla_k\xi_i + \xi_\alpha R^\alpha_i)\xi^i + \frac{1}{2}(\nabla^i\xi^j - \nabla^j\xi^i)(\nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i) + (\nabla^i\xi_i)^2\big)d\sigma = 0. \tag{20}$$

Тут $d\sigma$ є об'ємним елементом $d\sigma = \sqrt{|g|}dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^n$ многовиду $M^n$, причому $|g| = \det(g_{ij})$. Для многовиду Калабі-Яу $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ (20) прийме вигляд

$$\int\limits_{\mathcal{CY}^{2m}} \big(\xi^i g^{jk}\nabla_j\nabla_k\xi_i + \frac{1}{2}(\nabla^i\xi^j - \nabla^j\xi^i)(\nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i) + (\nabla^i\xi_i)^2\big)d\sigma = 0.$$

Враховуючи (19), отримуємо:

$$\int\limits_{\mathcal{CY}^{2m}} \big(\frac{1}{2}(\nabla^i\xi^j - \nabla^j\xi^i)(\nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i) + (\nabla^i\xi_i)^2\big)d\sigma = 0. \tag{21}$$

З (21) випливає, що у випадку додатньо визначеної метрики $g_{ij}$ вектор $\xi$ має бути гармонічним:

$$\nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i = 0, \qquad \nabla^i\xi_i = 0.$$

Існує теорема, згідно з якою ( [5, с. 29]) коваріантна похідна гармонічного вектору є тотожно рівною нулю:

$$\nabla_i\xi_j = 0. \tag{22}$$

З (22) випливає, що вектор $\xi$ є не тільки гармонічним, але і кілінговим:

$$\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i = 0. \tag{23}$$

Рівняння (23) означає, що вектор $\xi$ породжує однопараметричну групу ізометрії, отже ми отримали таку теорему:

**Теорема 2.** *Многовид Калабі-Яу* $(\mathcal{CY}^{2m}, g, J)$ *не дозволяє існування нетривіальних голоморфно-проективних перетворень.*

Отримані нами теореми носять характер "no-go".


[1] *Dine M.* Supersymmetry and String Theory. Beyond the Standard Model /*M. Dine* – Cambridge University Press – 2007, 515p.

[2] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения / *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко*- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 760 с.

[3] *Mikeš J., Vanžurovà A., Hinterleitner I.* Geodesic mappings and some generalizations. /*J. Mikeš* –Olomouc: Palacky University Press, 2009, 304p.

[4] *Tachibana S. Ishihara S.* On infinitesimal holomorphically projective transformations in kahlerian manifolds./*S. Tachibana S. Ishihara*- Tohoku Math. J. (2) 12 (1960), no. 1, 77–101.

[5] *Yano K.* Differential geometry on complex and almost complex spaces /*K. Yano*–New York: Pergamon Press Book – 1965, 326p.

[6] *Zumino B.* Supersymmetry and Kahler Manifolds, /*B. Zumino* //– Phys. Lett. 87B, 203-206 p.

# Регуляризация матричного уравнения Сильвестра

**С. М. Чуйко, М. В. Дзюба**

Донбасский государственный педагогический университет, г. Славянск

*chujko-slav@inbox.ru*

Матричные уравнения Сильвестра и, в частности, уравнения Ляпунова, широко используются в теории устойчивости движения, а также при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [1–5]. В статье [5] предложена формула построения решения уравнения Сильвестра. Предположим задачу о нахождении решений матричного уравнения Сильвестра

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i\ C\ R_i = B, \quad Q_i \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad R_i \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta} \tag{1}$$

некорректно поставленной [1], а именно: предположим, что уравнение Сильвестра (1) не имеет решений $C \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ для произвольной неоднородности $B \in \mathbb{R}^{\alpha\times\delta}$. Поставим следующую задачу: существуют ли матрицы $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$, для которых возмущенное матричное уравнение Сильвестра

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i\ C\ R_i + \varepsilon\,\mathcal{E} C \mathcal{F} = B, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{3}$$

разрешимо для произвольной матрицы $B$? Для фиксированной матрицы полного ранга $\mathcal{F}$ в случае $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta > 1$ нами получены достаточные условия, при которых возмущенное матричное уравнение Сильвестра (3) разрешимо для произвольной неоднородности $B$.

Предложенная в докладе техника регуляризации уравнения Сильвестра (1) упрощает соответствующую схему регуляризации [6], поскольку предусматривает нахождение значительно меньшего числа параметров, и может быть перенесена на обобщенные матричные уравнения Сильвестра [7].

[1] A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht, Boston, 2004.

[2] A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya *Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type*, Ukrainian Mathematical Journal, 1998. vol. 50, № 8.

[3] С. М. Чуйко *О решении матричных уравнений Ляпунова*, Вестник Харковского национального университета. Серия: Математика и механика, 2014. № 1120.

[4] R. E. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGraw-Hill, New York, 1960.

[5] С. М. Чуйко, *О решении матричного уравнения Сильвестра*, Вестник Одесского национального университета. Серия: математика и механика, 2014. Т. 19, Вып. 1 (21).

[6] S. M. Chuiko, E. V. Chuiko, A. V. Belushenko *On a regularization method for solving linear matrix equation*, Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math. 2014, T. 1.

[7] С. М. Чуйко, *О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра*, Чебышевский сборник, 2015, т. 16, вып. 1.

# О решении линейных матричных уравнений

**С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко**
Донбасский государственный педагогический университет, г. Славянск
*chujko-slav@inbox.ru*

Матричные уравнения Ляпунова, а также их обобщения — матричные уравнения Сильвестра [1] широко используются в механике, теории устойчивости движения, а также при решении матричных дифференциальных уравнений. В статье [1] предложены условия разрешимости, а также схема построения частного решения уравнения Ляпунова на основе псевдообращения [2] оператора $L$, соответствующего однородной части уравнения Ляпунова. Используя технику псевдообратных (по Муру-Пенроузу) матриц и проекторов, нами предложены оригинальные условия разрешимости, а также схема нахождения семейства линейно независимых решений неоднородного обобщенного матричного уравнения

$$\mathcal{L}X = \mathcal{A}. \tag{1}$$

Здесь $\mathcal{L}: \ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$ — линейный ограниченный матричный функционал, $X \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ — неизвестная матрица, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$ — заданная матрица. Полученные результаты обобщают условия разрешимости уравнений Ляпунова [1, 3, 4] и Сильвестра [5] на случай линейного матричного уравнения (1) общего вида и могут быть использованы в теории устойчивости движения [1], при решении дифференциальных уравнений Риккати и Бернулли [1], а также при решении линейных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений [6, 7]. Полученные результаты могут быть перенесены на обобщенные уравнения типа Сильвестра, содержащие неизвестные матрицы различных размерностей [8].

[1] A. A. Boichuk, S. A. Krivosheya *Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type*, Ukrainian Mathematical Journal, 1998. vol. 50, № 8.

[2] A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht, Boston, 2004.

[3] С. М. Чуйко *О решении матричных уравнений Ляпунова*, Вестник Харковского национального университета ім. В. Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика, 2014. № 1120.

[4] R. E. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGraw-Hill, New York, 1960.

[5] С. М. Чуйко, *О решении матричного уравнения Сильвестра*, Вестник Одесского национального университета. Серия: математика и механика, 2014. Т. 19, Вып. 1 (21).

[6] S. M. Chuiko *A generalized matrix differential-algebraic equation*, Journal of Mathematical Sciences (N.Y.), 2015, vol 210, № 1.

[7] S. M. Chuiko, *The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem*, Siberian Mathematical Journal, 2015, vol. 56, № 4.

[8] С. М. Чуйко, *О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра*, Чебышевский сборник, 2015, т. 16, вып. 1.

# Оцінки найкращих $M$–членних тригонометричних наближень класів $(\psi, \beta)$–диференційовних періодичних функцій багатьох змінних

**К. Швай**

Інститут математики НАН України, м. Київ

*kate.shvai@gmail.com*

Встановлено порядкові оцінки найкращих $M$–членних тригонометричних наближень класів періодичних функцій багатьох змінних $L^{\psi}_{\beta,1}$, які у одновимірному випадку були запроваджені О. І. Степанцем (див., наприклад, [1]).

Нехай $L_q\left(\pi_d\right),\ 1 \le q < \infty,$ — простір $2\pi$–періодичних за кожною змінною функцій $f$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q(\pi_d)} = \|f\|_q = \left((2\pi)^{-d}\int_{\pi_d} |f(x)|^q dx\right)^{1/q},$$

де $x = (x_1, \ldots, x_d)$ — елемент Евклідового простору $\mathbb{R}^d,\ d \ge 1$, а $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi, \pi]$. Вважатимемо, що для функцій $f \in L_q\left(\pi_d\right)$ виконується умова $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx_j = 0,\ j = \overline{1,d}$.

В якості апарату наближення будемо використовувати тригонометричні поліноми вигляду $P\left(\theta_M; x\right) = \sum_{k\in\theta_M} c_k e^{i(k,x)}$, де $\theta_M$ — довільний набір із $M$ різних векторів $k = (k_1, \ldots k_d)$, а $c_k \in \mathbb{C}$. Для $f \in L_q\left(\pi_d\right)$ величину

$$e_M(f)_q = \inf_{\theta_M} \inf_{P(\theta_M;\cdot)} \|f(\cdot) - P\left(\theta_M;\cdot\right)\|_q,$$

назвемо найкращим $M$–членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q\left(\pi_d\right)$.

Через $D$ будемо позначати множину таких функцій натурального аргументу $\psi(\cdot)$, що

1) $\psi(\cdot)$— додатні та незростаючі;

2) $\exists M > 0$ таке, що $\forall l \in \mathbb{N}\ \psi(l)/\psi(2l) \le M$.

Результати роботи будемо формулювати в термінах порядкових співвідношень. Отже, для величин $A$ та $B$ під записом $A \ll B$ будемо розуміти, що існує така додатна стала $C_1$, що $A \le C_1 B$. Запис $A \asymp B$ рівносильний тому, що виконуються умови $A \ll B$ і $B \ll A$. Усі сталі в порядкових співвідношеннях можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій здійснюється наближення, а також від розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Справедлива теорема.

**Теорема 1.** *Нехай $1 < q \le 2$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, і, крім того, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{1-1/q+\varepsilon}$ не зростають. Тоді для будь-яких натуральних $M$ і $n$, що задовольняють умову $M \asymp 2^n n^{d-1}$, має місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{1-1/q} (\log M)^{2(d-1)(1/q-1/2)} \ll e_M\left(L^{\psi}_{\beta,1}\right)_q \ll \Psi(n) M^{1-1/q} (\log M)^{2(d-1)(1/q-1/2)},$$

*де* $\Phi(n) = \min\limits_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right), \Psi(n) = \max\limits_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right)$.

[1] Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. — К.: Наук. думка, 1987. — 286 с.

*XI Літня школа*

*"Алгебра, Топологія, Аналіз"*

**1 – 14 серпня 2016 року**

**Одеса, Україна**

**Тези доповідей**

**Сайт школи** **План лекцій** **Програма школи**

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макета
С. Максименко, Є. Полулях, Б. Фещенко, Ю. Сорока

Ін-т математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3