Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias

Lista de Exercícios 4 - Respostas

1.

(a) $y(t) = c_1 + c_2 e^{5t} + c_3 e^{-t}$

(b) $y(t) = c_1 e^t + e^{-t/2}(c_2 \cos(t\sqrt{3}/2) + c_3 \operatorname{sen}(t\sqrt{3}/2))$

(c) $y(t) = c_1 + c_2 t + e^{-t/2}(c_3 \cos(t\sqrt{3}/2) + c_4 \operatorname{sen}(t\sqrt{3}/2))$

(d) $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_2 t^2 e^t$

2.

(a) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - e^{2t}$

(b) $y(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) - \frac{3}{17}(4\cos 2t - \operatorname{sen} 2t)$

(c) $y(t) = c_1 + c_2 e^t + 3t$

(d) $y(t) = c_1 + c_2 e^{-2t} + \frac{3t}{2} - \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2t + \cos 2t)$

(e) $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \frac{t}{3}\cos 2t - \frac{5}{9}\operatorname{sen} 2t$

(f) $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - 1/2t^2 \cos t + 1/2t \operatorname{sen} t$

(g) $u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{1}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\cos \omega t$

(h) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} + \frac{3t^2}{8} e^{-t} + \frac{3t}{16} e^{-t}$

(i) $y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 t e^{5t} + \frac{3}{5}(2t + 1)$

3.

(a) $y(t) = \frac{7}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{19}{40}\cos 2t + \frac{t^2}{4} + \frac{3}{5}e^t - \frac{1}{8}$

(b) $y(t) = \frac{1}{32}e^{-t}(e^{4t}(4t - 3) + 20e^{2t} - 17)$

(c) $y(t) = 4te^t - 3e^t + \frac{t^3}{6}e^t + 4$

(d) $y(t) = 2\cos 2t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t - \frac{3t}{4}\cos 2t$

(e) $y(t) = \frac{1}{4}(e^{-2t} + 4e^t - 2t - 1)$

4.

(a) $y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + t/4$

(b) $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{1}{10}(\operatorname{sen} t + 3\cos t)$

(c) $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + e^{2t}$

(d) $y(t) = c_1 + c_2 e^t + te^t - e^t$

(e) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e2t - 2/3te^{-t}$

5. Dicas: Neste exercício temos um "bloco" de massa $4kg$ acoplado a uma mola de massa desprezível. Pela lei de Hooke a mola exerce uma força restauradora que é oposta a força de $24,3N$. Assim $k = 24,3/L$, onde L é a distensão.

$x(t) = -0,2\cos\frac{9t}{2}$.

6.

(a) Dicas: A energia cinética e potencial são dadas, respectivamente por $E_c = \frac{m(\dot{u})^2}{2}$, $E_p = \frac{ku^2}{2}$ (b) $u(t) = a\cos(\sqrt{k/m})t + b(\sqrt{m/k})\operatorname{sen}(\sqrt{k/m})t$

(c) Usando $u(t)$ encontrado no item (b), mostre que $\frac{ku^2}{2} + \frac{m(u')^2}{2} = (ka^2 + mb^2)/2$ para todo t.

7.

(a) Considere $g = 9,8\, m/s^2$ então temos $\ddot{x}+(9,8/0,32)x = 0$, assim $x(t) = -2/3\cos(\sqrt{(9,8/0,32)}t)+ 5\sqrt{\frac{0,32}{9,8}}\sin(\sqrt{(9,8/0,32)}t)$

(b) Amplitude $\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{8}{9,8}}$; Período $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{(9,8/0,32)}}$

8.

(a) $x(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t}$

(b) $x(t) = \frac{5}{3}e^{-8t} - \frac{2}{3}e^{-2t}$

9.

(a) $\ddot{x} + x = 3\cos\omega t; \quad x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$;

(b) $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \frac{3}{1-\omega^2}\cos\omega t$. Assim a solução do PVI é $x(t) = \frac{-3}{1-\omega^2}\cos t + \frac{3}{1-\omega^2}\cos\omega t$.

Para os itens (c) e (d) veja os gráficos em anexo

(c) Podemos escrever $x(t)$ (obtido no item (b)) como $x(t) = [\frac{6}{1-\omega^2}\operatorname{sen}(\frac{t(1-\omega)}{2})]\operatorname{sen}\frac{t(1+\omega)}{2})$. Se $|(1-\omega)|$ é pequeno a solução descreve um batimento (vide Boyce, pag 115-117) assim, não existe o limite de $x(t)$ quando t tende ao infinito.

(d) O comportamento de $x(t)$ quando ω é suficientemente próximo de 1 torna-se uma oscilação crescente (ilimitada) quando t tende ao infinito.

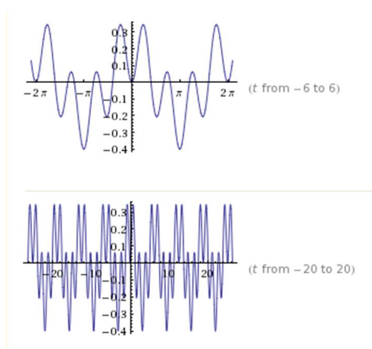
(e) $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + 3/2t \operatorname{sen} t$ Assim a solução do PVI é $x(t) = 3/2t\operatorname{sen} t$.

10.

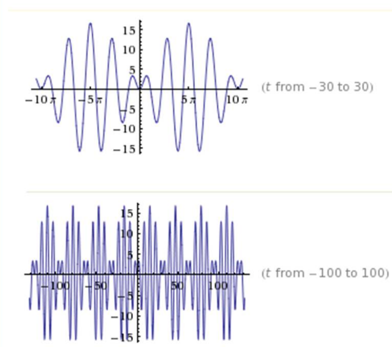
(a) $x(t) = e^{t/4}(c_1 \cos(\frac{t\sqrt{23}}{4}) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{t\sqrt{23}}{4})) - \frac{1}{6}\cos 3t + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 3t$

(b) $x_e(t) = -\frac{1}{6}\cos 3t + \frac{1}{6}\operatorname{sen} 3t$ *ou* $x_e(t) = \frac{\sqrt{2}}{6}\cos(3t - \frac{3\pi}{4})$

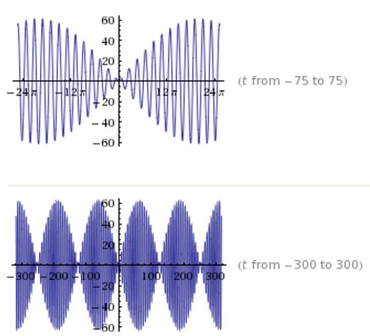
$\omega = 4$



$\omega = 0{,}8$



$\omega = 0{,}95$



$\omega = 0{,}999$