Lista 6

Espaços com produto interno

1. Sejam $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1)$ no $\mathbb{R}^2$. Considerando neste espaço o produto interno usual, determine os vetores $w \in \mathbb{R}^2$ tais que $\langle u, w\rangle = -1$ e $\langle u, w\rangle = -1$.

2. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano tais que $\|v\| = \|u\| = 1$ e $\|u - v\| = 2$. Ache $\langle u, v\rangle$.

3. Seja V um espaço euclidiano e a norma $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Mostre que $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow \langle u+v, u-v\rangle = 0$.

4. Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\langle u, v\rangle = 4u_1v_1 + 3u_2v_2$ define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$. Calcule a norma de $u = (1, 2)$ em relação ao produto interno definido nesse exercício.

5. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Para que valores de $t \in \mathbb{R}$ a função $\langle u, v\rangle = x_1y_1 + tx_2y_2$ é um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

6. Mostre que $\langle A, B\rangle = tr(B^TA)$ define um produto interno sobre $M_2(\mathbb{R})$. Calcule $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$ se
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Obs. Para $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, o traço de A é definido por $tr(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

7. Encontre a distância de u e v nos seguintes casos:

   a) $V = \mathbb{R}^4$ com o produto interno usual, $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (0, 0, 1, 1)$.

   b) $V = P_2(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle p(t), g(t)\rangle = \int_0^1 p(t)g(t)dt$,
$$u = 1 - t, \quad v = t^2 - t.$$

   c) $V = M_2(\mathbb{R})$ com produto interno $\langle A, B\rangle = tr(A^TB)$,
$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Obs.: A *distância* entre dois vetores $u, v \in V$ é dada pela formula
$$d(u, v) := \|u - v\|.$$

8. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz no $\mathbb{R}^3$ (produto interno usual) para mostrar que, dados números reais positivos a_1, a_2, a_3, temos
$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

9.* Sejam a, b, c números reais positivos satisfazendo $a + b + c = 1$, mostre que
$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8.$$

10.* Sejam a, b, c números reais positivos, mostre que

$$2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

11. Dado o produto interno $\langle u, v\rangle$ no espaço vetorial V, prove que

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

para quaisquer $u, v \in V$.

Ortogonalidade

12. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ com produto interno usual e

$$v_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \quad v_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), \quad v_3 = (0,0,1).$$

Mostre que o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é ortonormal. Depois, obtenha as coordenadas de u em relação a base S nos seguintes casos:

a) $u = (1, -1, 2)$.

b) $u = (3, -7, 4)$.

c) $u = (1/7, -3/7, 5/7)$.

13. Seja $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determinar um vetor $u \in V = \mathbb{R}^3$ ortogonal aos vetores $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (5, 1, 3)$ e $v_3 = (2, -2, -3)$.

14. Em cada um dos casos abaixo determine os valores de m para os quais u e v são ortogonais em V:

a) $u = (1, m-2, m)$, $v = (m-2, m, m+1)$ em $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno usual.

b) $u(t) = mt^2 - 1$, $v(t) = t$ em $V = P_2(\mathbb{R})$, com o produto interno em 7) b).

15. Sejam u, v vetores de um espaço euclidiano. Sendo $\|u\| = 3$ e $\|v\| = 5$, determine $m \in \mathbb{R}$ tal que $\langle u + mv, u - mv\rangle = 0$.

16. Sejam u, v vetores de um espaço euclidiano. Então u e v são ortogonais se e somente se

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \qquad \text{(Teorema de Pitágoras).}$$

Processo de Gram-Schmidt. Projeção ortogonal

17. Consideremos as seguintes bases de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$:

a) $B = \{(3, 4), (1, 2)\}$.

b) $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2)\}$.

c) $B = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$.

Ortonormalizar essas bases pelo processo de Gram-Schmidt, segundo o produto interno usual de cada espaço.

18. Em relação ao produto interno usual, determinar uma base ortonormal dos seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

    a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\}$.

    b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

19. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$ com produto interno $\langle A, B\rangle = tr(B^T A)$. Determine uma base ortonormal para $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \,\middle|\, x + y - z = 0 \right\} \subset V$.

20. Seja $S = \{(x, y, z, -2x + 4y + 5z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ subespaço de $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja $A = \{(1, 2, -1, 1), (2, -1, 2, 2)\} \subset S$.

    a) Ortonormalizar o conjunto A.

    b) Completar o conjunto A de modo a transformá-lo numa base ortogonal de S.

21. Seja $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e $B = \{(1, 2, -3), (2, -4, 2)\}$. Determinar:

    a) O subespaço S gerado por B.

    b) O subespaço $S^{\perp}$.

22. Seja $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual. Dados os subespaços:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}, \quad S_2 = \{t(2, 1, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

    Determinar $S_1^{\perp}$ e $S_2^{\perp}$.

23. Determine a projeção ortogonal de $u = (1, 1)$ sobre o sub-espaço $V = [(1, 3)]$ do $\mathbb{R}^2$.

24. Determine a projeção ortogonal de $f(t) = 2t - 1 \in P_2(\mathbb{R})$ sobre o sub-espaço $U = [t]$, em relação ao produto interno em 7) b).

Respostas

Espaços com produto interno

1. $w = (1/3, -2/3)$.

2. $\langle u, v\rangle = -1$.

3. Observe que $\langle u + v, u - v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle - \langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle - \langle u, u\rangle$.

4. $\|u\| = 4$.

5. $t > 0$

6. $\langle A, B\rangle = 0$, $\|A\| = \sqrt{1}$, $\|B\| = 1$.

7. (a) $d(u, v) = \sqrt{2}$.

(b) $d(u,v) = \sqrt{8/15}$.

(c) $d(u,v) = 28$.

8. Aplique a desigualdade de Cauchy–Schwarz para os vetores

$$u = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}), \quad v = (\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \frac{1}{\sqrt{a_3}}).$$

9.

10. Aplique a desigualdade de Cauchy–Schwarz para os vetores

$$u = (\sqrt{a+b}, \sqrt{b+c}, \sqrt{c+a}), \quad v = (\frac{1}{\sqrt{a+b}}, \frac{1}{\sqrt{b+c}}, \frac{1}{\sqrt{c+a}}).$$

11.

Ortogonalidade

12. (a) $[u]_S = (-7/5, 1/5, 2)$.
    (b) $[u]_S = (-37/5, -9/5, 4)$.
    (c) $[u]_S = (-3/7, -1/7, 5/7)$.

13. $u = a(1, 7, -4),\ a \in \mathbb{R}$.

14. (a) $m = 1$ ou $m = -1$.
    (b) $m = 2$.

15. $m = 3/5$ ou $m = -3/5$.

16.

Processo de Gram-Schmidt. Projeção ortogonal

17. (a) $\{(3/5, 4/5), (-4/5, 3/5)\}$.
    (b) $\{(1,0,0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$.
    (c) $\{(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (0,1,0)\}$.

18. (a) $\{(1,0,0), (0, 2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}$.
    (b) $\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$.

19. A base ortonormal é $\{u_1, u_2, u_3\}$, onde

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

20. (a) $\{\frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1), \frac{1}{\sqrt{13}}(2,-1,2,2)\}$.

(b) Uma dela: $\{(1,2,-1,1),(2,-1,2,2),(44,4,5,-47)\}$.

21. (a) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$.
    (b) $S^{\perp}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$.

22. (a) $S_1^{\perp}=\{(x,-2x,3x) \mid x\in\mathbb{R}\}$.
    (b) $S_2^{\perp}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=0\}$.

23. $pr_V(u)=\dfrac{2}{5}(1,3)$.

24. $pr_U(f(t))=\dfrac{5}{2}t$.