Lista 8
Funções de Uma Variável

Técnicas de Integração

1 — Determine α e β de modo que:

$$\operatorname{sen}(6x)\cos(4x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha x) + \operatorname{sen}(\beta x)\right).$$

Dica: use que: $\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right)$

2 — Usando a técnica do exercício anterior calcule:

a) $\int \operatorname{sen}(6x)\cos(x)\,dx$

b) $\int \operatorname{sen}(x)\cos(6x)\,dx$

c) $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx$

d) $\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx$

3 — Usando que

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

calcule as seguintes integrais:

a) $\int \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)\,dx$

b) $\int \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(7x)\,dx$

c) $\int \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx$

4 — Usando que

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}((\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

calcule:

a) $\int \cos(x)\cos(5x)\,dx$

b) $\int_{\pi/4}^{\pi} \cos(x)\cos(7x)\,dx$

c) $\int \cos(nx)\cos(mx)\,dx$

5 — Dados α, β, m, n constantes, com $\alpha \neq \beta$ mostre que existem A e B tais que:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

6 — Usando o exercício anterior calcule as seguintes integrais:

a) $\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx$

b) $\int_7^9 \frac{x-1}{(x)(x-2)}\,dx$

c) $\int \frac{x-1}{x^2-4}\,dx$

d) $\int \frac{x-3}{x^2+3x+2}\,dx$

7 — Seja $\alpha \neq 0$. Mostre que:

$$\int \frac{1}{\alpha^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + k$$

Use esse fato para calcular as integrais:

a) $\int \frac{1}{5+x^2}\,dx$

b) $\int \frac{1}{3+4x^2}\,dx$

c) $\int_0^1 \frac{3x+1}{5+x^2}\,dx$

8 — Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \sqrt{1+x^2}dx$

b) $\int \sqrt{1-4x^2}dx$

c) $\int \sqrt{1-\cos(x)}dx$

d) $\int \sqrt{3+4x^2}dx$

e) $\int \sqrt{x^2+2x+2}dx$

9 — Calcule a área da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$.

10 — Prove que dados α, m, n constantes mostre que existem A e B tais que:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

11 — Calcule as seguintes integrais por frações parciais:

a) $\int \frac{1}{x^2-9}dx$

b) $\int \frac{x}{x^2-5x+6}dx$

c) $\int_3^4 \frac{x+3}{(x-1)^2}dx$

d) $\int \frac{x^3+x+1}{x^2-2x+1}dx$

e) $\int \frac{x^2+2}{x^2-4}dx$

f) $\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}dx$

g) $\int \frac{x^4+x+1}{x^3-x}dx$

Para calcular $\int \operatorname{sen}^n(x)\cos^m(x)dx$ faça as seguintes transformações:

- Se n for ímpar faça $u=\cos(x)$ observando que

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^{2k+1}(x)dx$$
$$= \int \operatorname{sen}^m(1-\operatorname{sen}^2(x))^k \cos(x)dx$$

Por fim faça a substituição $u=\operatorname{sen}(x)$

- Se m for ímpar faça $u=\operatorname{sen}(x)$

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1}(x)\cos^m(x)dx$$
$$= \int \cos^m(1-\cos^2(x))^k \operatorname{sen}(x)dx$$

Por fim faça a substituição $u=\cos(x)$

- Se n e m forem pares faça $\operatorname{sen}^2(x)=1-\cos^2(x)$ e use as fórmulas de recorrência.

12 — Calcule:

a) $\int \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(8x)dx$

b) $\int \operatorname{sen}^3(x)dx$

c) $\int \cos^2(4x)dx$

d) $\int \operatorname{sen}(x)\cos^4(5x)dx$

e) $\int \operatorname{sen}(2x)\cos^2(2x)dx$

f) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2(2x)\cos^2(2x)dx$

g) $\int_0^{\pi} \cos(x)\cos^2(4x)dx$

13 — Calcule as integrais usando substituição trigonométrica. Esboce o triângulo retângulo associado

a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}dx$

b) $\int x^3\sqrt{9-x^2}dx$

c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx$

d) $\int_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{4-9x^2}dx$

e) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

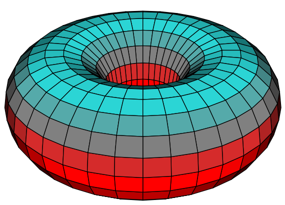
Dicas 8a) $x = \operatorname{tg}(v)$ 8b) $x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(u)$ 8c) $\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})$ 8d) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}(u)$
8e) Observe que $x^2+2x+2 = 1+(x+1)^2$

14 — Calcule o comprimento de arco da curva $y = \ln x$ sobre o intervalo $[1, 2]$.

15 — Um toro é obtido rotacionando ao redor do eixo y o círculo

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2.$$

Mostre que a área do toro é $4\pi ab$



16 — Uma estrada é construída ligando o ponto $(2, 1)$ ao ponto $(5, 3)$ seguindo a trajetória da parábola:

$$y = -1 + 2\sqrt{x-1}$$

Calcule o comprimento da estrada.

17 — Mostre que a área de um elipsoide de revolução obtido rotacionando a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em torno do eixo x é

$$A = 2\pi ab\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c}\operatorname{sen}^{-1}\frac{c}{a}\right)$$

18 — Mostre que

$$\int_0^1 \frac{16(x-1)}{x^4 - 2x^3 + 4x - 4}\,dx = \pi$$

19 — Mostre que

$$\int x^3 \operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{4}(x^4-1)\operatorname{tg}(x) - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x + C$$

20 — Calcule a integral

$$\int \operatorname{tg} x \sec^4 x\,dx$$

de duas maneiras diferentes. Prove que os dois resultados são equivalentes.