Lista 8

Matriz de uma transformação linear

1. Para cada transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, encontre as matrizes de T na base canônica $C = \{(1,0),(0,1)\}$ e na base $B = \{(1,1),(1,0)\}$, isto é, encontre $[T] := [T]_C^C$ e $[T]_B := [T]_B^B$.

   a) $T(x,y) = (2x,y)$.

   b) $T(x,y) = (x, y+x)$.

   c) $T(x,y) = (2x+y, x-y)$.

   d) $T(x,y) = (0,0)$.

2. Sejam $B = \{(1,0),(1,1)\}$ e $C = \{(0,1,0),(1,1,1),(1,1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Encontre a matriz $[T]_C^B$ associada à transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y) = (2x+y, 3x-y, -y).$$

Autovalores, autovetores e diagonalização

3. Encontre os autovalores e autovetores das seguintes matrizes

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

   d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Verifique quais das matrizes da questão 4 são diagonalizáveis. Para o caso de matrizes diagonalizáveis, encontre uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

5. Encontre os autovalores e autovetores de transformação linear $T : V \to V$ se:

   a) $V = \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (-3x-5y, 2y)$.

   b) $V = \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (x+y, 4x+y)$.

   c) $V = \mathbb{R}^2, \quad T(1,0) = (4,2),\ T(1,1) = (3,3)$.

   d) $V = \mathbb{R}^3, \quad T(1,0,0) = (2,0,0),\ T(0,1,0) = (2,1,2),\ T(0,0,1) = (3,2,1)$.

6. Diagonalize as matrizes abaixo (i.e. encontre uma matriz P tal que$P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal) e calcule A^n ($n \in \mathbb{N}$).

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

7. Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Determine A^{-1}.

   b) Encontre os autovalores de A e de A^{-1}. Qual a relação entre eles?

   c) Seja B uma matriz inversível qualquer. Mostre que se $\lambda \neq 0$ é autovalor de B, então λ^{-1} é autovalor de B^{-1}.

8. Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   a) Calcule o polinômio caraterístico de A.

   b) Que condições $a,\ b,\ c$ e d devem satisfazer para que a matriz A seja diagonalizável?

Respostas

1. a) $[T] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   b) $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ [T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   c) $[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   d) $[T] = [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1; \quad v_1 = (1,0),\ v_2 = (1,-1)$.

   b) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0; \quad v_1 = (1,1),\ v_2 = (1,-1)$.

   c) $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -4; \quad v_1 = (3,1),\ v_2 = (1,-3)$.

   d) $\lambda = 1; \quad v = (1,0,0)$.

   e) $\lambda_1 = 4,\ \lambda_1 = -2; \quad v_1 = (1,1,0),\ v_1' = (-1,0,1),\ v_2 = (1,0,1)$.

4. 4a, 4b, 4c, 4e são diagonalizáveis pois possuem uma base de autovetores. Em cada caso, as colunas da matriz P são os autovetores (P é a matriz mudança de base da base de autovetores para a base canônica). A matriz diagonal $P^{-1}AP$ é a matriz que tem na diagonal principal os autovalores de A.

5. a) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3; \quad v_1 = (1,-1),\ v_2 = (1,0)$.

   b) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3; \quad v_1 = (1,-2),\ v_2 = (1,2)$.

c) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3; \quad v_1 = (1,2),\ v_2 = (1,1)$. Neste caso, $T(x,y) = (4x - y, 2x + y)$.

d) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1; \quad v_1 = (5,1,1),\ v_2 = (1,0,0),\ v_3 = (-1,-3,3)$.

6. a) $A^n = \begin{pmatrix} 9 \cdot 6^n + (-4)^n & 3 \cdot 6^n - 3 \cdot (-4)^n \\ 3 \cdot 6^n - 3 \cdot (-4)^n & 9 \cdot 6^n + (-4)^n \end{pmatrix}$.

   b) $A^n = \begin{pmatrix} 10^{n-1} & 3 \cdot 10^{n-1} \\ 3 \cdot 10^{n-1} & 9 \cdot 10^{n-1} \end{pmatrix}$.

7. a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) Autovalores de A: -1 e 2.
   Autovalores de A^{-1}: -1 e $1/2$ (são os inversos dos autovalores de A).

   c) Use a definição de autovalor/autovetor para fazer a demonstração.

8. a) Polinômio: $P_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$.

   b) Se $(a-d)^2 + 4bc > 0$ os autovalores são reais e distintos e, portanto, a matriz A é diagonalizável em $\mathbb{R}$. Se $a = d,\ b = c = 0$, os autovalores são iguais mas existe uma base de autovetores e, portanto, a matriz A é diagonalizável. Para todos os outros casos não é diagonalizável em $\mathbb{R}$.