Lista 7

Transformações Lineares

1. Quais das transformações abaixo são lineares?

   a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(x) = |x|.$
   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x, 3^y, 3^z).$
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (3x, 2, 5z).$
   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (3x, 0, 5z).$
   e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + y, x - y).$
   f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad T(x, y) = xy.$
   g) $T : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}), \quad T(p(t)) = p(t + 1)$ para todo polinômio $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$.
   h) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad T(A) =$ traço(A) para toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   i) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad T(A) = \det(A)$ para toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.

2. Determine a transformação linear $T : V \to W$ conhecendo os valores de T em uma base de V.

   a) Ache $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que
   $$T(2, 1) = (1, 0), \qquad T(0, 1) = (1, -1).$$
   b) Ache $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que
   $$T(-1, 1) = (3, 2, 1), \qquad T(0, 1) = (1, 1, 0).$$
   Encontre $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) = (-2, 1, -3)$.
   c) Ache $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que
   $$T(1, -1, 0) = (1, 1), \qquad T(0, 1, 1) = (2, 2), \qquad T(0, 0, 1) = (3, 3).$$
   Encontre $T(1, 0, 0)$ e $T(0, 1, 0)$.
   d) Ache $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que
   $$T(1) = x, \qquad T(x) = 1 - x^2, \qquad T(x^2) = x + 2x^2.$$

Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

3. Para cada uma das transformações lineares $T : V \to W$, determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (3x - y, -3x + y).$
   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x + y, 2x + y, 3x + y).$
   c) $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \quad T(at + b) = (a, 2a, a - b).$
   d) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \quad T(p(t)) = p'(t) + p''(t).$

4. Responda:

   a) Ache uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}(T) = [\ (2,1,1),\ (1,-1,2)\ ]$.

   b) Ache uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = [\ (1,0,-1)\ ]$.

5. Seja a transformação linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1,0), \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = (2,1),$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (0,1), \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1,1).$$

   Encontre a imagem e o núcleo de T e exiba uma base de cada um desses subespaços.

Espaços Vetoriais Isomorfos

6. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(-2,3) = (-1,0,1), \qquad T(1,-2) = (0,-1,0).$$

   a) Ache $T(x,y)$.

   b) Ache $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

   c) T é injetora? E sobrejetora?

7. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T((1,0,0)) = (2,3,1), \quad T((1,1,0)) = (5,2,7), \quad T((1,1,1)) = (-2,0,7).$$

   a) Ache $T(x,y,z)$.

   b) T é injetora? E sobrejetora? E bijetora?

8. Mostre que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x-2y, z, x+y)$ é um isomorfismo e determine uma regra para T^{-1}.

9. Para cada uma das transformações lineares $T : V \to W$, mostre que T é um isomorfismo e ache T^{-1}.

   a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad T(x) = 2x$.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x) = (x+2y, 2x-y)$.

   c) $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \quad T(at+b) = (b-a) - at$.

10. Verifique se os espaços vetoriais U e V são isomorfos. Caso eles sejam, encontre um isomorfismo entre eles.

    a) $U = \mathbb{R}^3, \quad V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

    b) $U = \mathbb{R}^4, \quad V = M_2(\mathbb{R})$.

    c) $U = \mathbb{R}^2, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

    d) $U = M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad V = P_4(\mathbb{R})$.

    e) $U = \mathbb{R}^3, \quad V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$.

11. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Determine se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

   a) Se $\dim(V) = 4$ e $\dim(W) = 3$, então T é injetora.
   b) Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma base de V e $T(v_2) = T(v_4) = 0$, então $\dim \text{Im}(T) \leq 2$.
   c) Se T for injetora, então $\dim(V) \leq \dim(W)$.
   d) Se $\dim(V) \geq \dim(W)$, então T é sobrejetora.

Respostas

1. a), b), c) e f) não são — é possível mostrar um contraexemplo nesses casos (em alguns deles, pode-se mostrar que $T(0) \neq 0$). Os outros itens são transformações lineares: demonstre as duas propriedades que definem um transformação linear.

2. a) $T(x, y) = (y, \frac{x}{2} - y)$.
   b) $T(x, y) = (-2x + y, -x + y, -x)$ e $u = (3, 4)$.
   c) $T(x, y, z) = (-y + 3z, -y + 3z)$ e $T(1, 0, 0) = (0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (-1, -1)$.
   d) $T(a + bx + cx^2) = b + (a + c)x + (-b + 2c)x^2$.

3. a) $\text{Ker}(T) = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, base= $\{(1, 3)\}$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$;
   $\text{Im}(T) = [(1, -1)]$, base= $\{(1, -1)\}$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 1$.
   b) $\text{Ker}(T) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, base= $\{(0, 0, 1)\}$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$;
   $\text{Im}(T) = [(1, 2, 3), (1, 1, 1)]$, base= $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.
   c) $\text{Ker}(T) = \{(0, 0, 0)\}$ base= $\varnothing$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$;
   $\text{Im}(T) = [(1, 2, 1), (0, 0, -1)]$, base= $\{(1, 2, 1), (0, 0, -1)\}$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.
   d) $\text{Ker}(T) = \{a \mid a \in \mathbb{R}\} = [1]$, base= $\{1\}$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$;
   $\text{Im}(T) = [1, t]$, base= $\{1, t\}$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.
   e) $\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, base= $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$;
   $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, base= $\{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.

4. a) Escolha uma base de $\mathbb{R}^3$ e pense qual deve ser a imagem de cada um dos vetores dessa base. Depois disso, construa a transformação linear. Existem infinitas possibilidades, por exemplo,
   $$T(x, y, z) = (2x + y, x - y, x + 2y).$$
   b) Escolha uma base de $\mathbb{R}^3$ que contem o vetor $(1, 0, -1)$ e pense qual deve ser a imagem de cada um dos vetores dessa base. Depois disso, construa a transformação linear. Existem infinitas possibilidades, por exemplo,
   $$T(x, y, z) = (x + z, y).$$

5. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a + 6c - 2d, -c + d)$.
   $\text{Ker}(T) = \left[\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, base= $\left\{ \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;
   $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, base= $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

6. a) $T(x,y) = (2x+y, 3x+2y, -2x{-}y)$.
   b) $\mathrm{Ker}(T) = \{(0,0)\}$ e $\mathrm{Im}(T) = [(2,3,-2),(1,2,-1)]$.
   c) T é injetora, mas não sobrejetora, pois $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3$.

7. Usando linearidade de T, obtemos

$$T(0,1,0) = (5,2,7) - (2,3,1) = (3,-1,6), \qquad T(0,0,1) = (-2,0,7) - (5,2,7) = (-7,-2,0).$$

   Então

   a) $T(x,y,z) = x(2,3,1) + y(3,-1,6) + z(-7,-2,0) = (2x+3y-7z, 3x-y-2z, x+6y)$.
   b) $\mathrm{Ker}(T) = \{(0,0,0)\}$, assim T é injetora. Como $V = W = \mathbb{R}^3$, assim T também é sobrejetora e, portanto, T é bijetora.

8. É fácil ver que $\mathrm{Ker}(T) = \{(0,0,0)\}$, assim T é injetora. Como $V = W = \mathbb{R}^3$, assim T também é sobrejetora e, portanto, T é isomorfismo. Assim, dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ existe um único $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x,y,z) = (a,b,c) \quad \Leftrightarrow \quad T^{-1}(a,b,c) = (x,y,z).$$

   Logo,

$$(a,b,c) = (x-2y, z, x+y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y = a \\ z = b \\ x + y = c \end{cases}.$$

   Assim,

$$x = \frac{a+2c}{3}, \quad y = \frac{c-a}{3}, \quad z = b.$$

   Portanto,

$$T^{-1}(a,b,c) = \Big(\frac{a+2c}{3}, \frac{c-a}{3}, b\Big).$$

9. a) $T^{-1}(x) = x/2$.
   b) $T^{-1}(x,y) = (\frac{x+2y}{5}, \frac{2x-y}{5})$.
   c) Temos que

$$p(t) = at + b \in \mathrm{Ker}(T) \;\Leftrightarrow\; T(p(t)) = (b-a) - at = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b = 0.$$

   Logo, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ e T é injetora. Como $V = W = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, assim T também é sobrejetora e, portanto, T é isomorfismo. Assim

$$T(xt+y) = at + b \quad \Leftrightarrow \quad T^{-1}(at+b) = xt + y.$$

   Logo, como $T(xt+y) = -xt + (y-x)$ temos

$$at + b = -xt + (y-x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x = a \\ y - x = b \end{cases}.$$

   Assim, $x = -a$ e $y = b - a$. Logo $T^{-1}(at+b) = -at + (b-a)$.

10. a) $U = \mathbb{R}^3$ e $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ são isomorfos, pois $\dim(U) = \dim(V) = 3$. Um possível isomorfismo é $T(a,b,c) = at^2 + bt + c$.

b) $U = \mathbb{R}^4$ e $V = M_2(\mathbb{R})$ são isomorfos, pois $\dim(U) = \dim(V) = 4$. Um possível isomorfismo é $T(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$.

c) $U = \mathbb{R}^3$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ são isomorfos, pois $\dim(U) = \dim(V) = 2$. Um possível isomorfismo é $T(x, y) = (x, y, 0)$.

d) $U = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $V = P_4(\mathbb{R})$ não são isomorfos, pois $\dim(U) = 6 \neq 5 = \dim(V)$.

e) $U = \mathbb{R}^3, \quad V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$. são isomorfos, pois $\dim(U) = \dim(V) = 3$. Um possível isomorfismo é $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$.

11. a) Não, pois $\dim \mathrm{Ker}(T) \geq 1$ e, portanto, $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$. De fato, pelo Teorema do núcleo e da imagem, temos que $\dim(V) = \dim \mathrm{Im}(T) + \dim \mathrm{Ker}(T)$. Assim, como $\dim(V) = 4$ e $\dim \mathrm{Im}(T) \leq \dim(W) = 3$ temos que $\dim \mathrm{Ker}(T) \geq 1$.

b) Sim, pois $\dim \mathrm{Ker}(T) \geq 2$, assim $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim(V) - \dim \mathrm{Ker}(T) = 4 - \dim \mathrm{Ker}(T) \leq 2$.

c) Sim. Pois $\{0\} = \dim \mathrm{Ker}(T) = \dim(V) - \dim \mathrm{Im}(T) \geq \dim(V) - \dim(W)$.

d) Não. Por exemplo, a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y) = 0$ não é sobrejetora.