Lista 3

Sistemas Lineares

1. Resolva, se possível, os sistemas pelo método da matriz inversa:

$$a)\begin{cases}2x+y=4,\\5x-2y=1;\end{cases}\qquad b)\begin{cases}x+y+z=5,\\x+y-4z=10,\\-4x+y+z=0.\end{cases}$$

2. Resolva, se possível, os sistemas pela regra de Cramer:

$$a)\begin{cases}7x_1-3x_2=3,\\3x_1+x_2=5;\end{cases}\qquad b)\begin{cases}5x_1+7x_2=3,\\2x_1+4x_2=1;\end{cases}\qquad c)\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=4,\\2x_1-x_2=-2,\\4x_1-3x_2=0.\end{cases}$$

3. Determine os valores do parâmetro a para que o sistema tenha única solução e ache esta solução:

$$a)\begin{cases}6ax_1+4x_2=5,\\9x_1+2ax_2=2;\end{cases}\qquad b)\begin{cases}3ax_1-5x_2=3,\\9x_1+5ax_2=2.\end{cases}$$

4. Usando escalonamento (método de Gauss), resolva os seguintes sistemas de equações lineares:

$$a)\begin{cases}x+2y=1,\\x+3y=0;\end{cases}\qquad b)\begin{cases}2x+3y=1,\\4x+6y=2;\end{cases}\qquad c)\begin{cases}4x+5y=1,\\12x+15y=0;\end{cases}$$

$$d)\begin{cases}x+y=1,\\3x-y=2,\\x-y=0;\end{cases}\qquad e)\begin{cases}2x+2y+3z=1,\\x+2y+z=0,\\x-y+z=0;\end{cases}\qquad f)\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3+x_4=-3,\\2x_1-x_2+3x_3-x_4=0;\end{cases}$$

$$g)\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+3x_4-x_5=1,\\-3x_1+6x_2-4x_3-9x_4+3x_5=-1,\\-x_1+2x_2-2x_3-4x_4-3x_5=3,\\x_1-2x_2+2x_3+2x_4-5x_5=1.\end{cases}$$

5. De acordo com os valores de k e m, classifique os sistemas lineares quanto ao numero de soluções possíveis:

$$a)\begin{cases}x+4y=1,\\3x+12y=k;\end{cases}\qquad b)\begin{cases}kx_1+x_2=-1,\\2x_1+x_2=m;\end{cases}\qquad c)\begin{cases}x+2y+z=2,\\2x-2y+3z=1,\\x+2y+(k^2-3)z=k.\end{cases}$$

6. Mostre que o sistema $\begin{cases}ax+3y=a,\\3x+ay=-a,\end{cases}$ não tem solução, se e somente se, $a=3$.

7. Determine os valores de m para os quais o sistema possui uma única solução

$$a)\begin{cases}-4x+3y=2,\\5x-4y=0,\\2x-y=m;\end{cases}\qquad b)\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\2x_1+3x_2+2x_3=7,\\x_2+mx_3=8,\\x_1+2x_2+z=6.\end{cases}$$

8. Considere a matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{3x3}$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j, & \text{se} \quad i<j, \\ 2i-j, & \text{se} \quad i=j, \\ j-i, & \text{se} \quad i>j. \end{cases}$$

Determine X na equação $AX = B$, onde $B = (-2, -2-2)^T$.

9. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determine todos os valores de λ para os quais o sistema linear homogêneo $(A - \lambda I_3)X = 0$ tem solução não trivial.

Respostas

1. $a)$ $x = 1,\ y = 2;$

   $b)$ $x = 1,\ y = 5,\ z = -1.$

2. $a)$ $x_1 = 9/8,\ x_2 = 13/8;$

   $b)$ $x_1 = 5/6,\ x_2 = -1/6;$

   $c)$ $x_1 = -30/11,\ x_2 = -38/11,\ x_3 = -40/11.$

3. $a)$ $a \neq \pm\sqrt{3}$; $x_1 = \dfrac{5a-4}{6(a^2-3)}$, $x_2 = \dfrac{-4a-15}{4(a^2-3)}$;

   $b)$ $\forall a \in \mathbb{R}$; $x_1 = \dfrac{3a+2}{3(a^2+3)}$, $x_2 = \dfrac{2a-9}{5(a^2+3)}$,

4. $a)$ $S = \{(3,-1)\}$ — sistema possível e determinado;

   $b)$ $S = \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t, t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ — sistema indeterminado com uma incógnita livre;

   $c)$ $S = \varnothing$ — sistema impossível;

   $d)$ $S = \varnothing$ — sistema impossível;

   $e)$ $S = \{(-1,0,1)\}$ — sistema possível e determinado;

   $f)$ $S = \left\{(1-t+s, 2+t+s, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\right\}$ — sistema indeterminado com duas incógnitas livres.

   $g)$ $S = \left\{(2t+13s+9, t, -2, -4s-2, s) \mid s, t \in \mathbb{R}\right\}$ sistema indeterminado com duas incógnitas livres.

5. $a)$ $k \neq 3$: nenhuma solução; $k = 3$: infinitas soluções.

   $b)$ $k = 2$ e $m \neq -1$: nenhuma solução; $k = 2$ e $m = -1$: infinitas soluções; $k \neq 2$: única solução.

   $c)$ $k = -2$: nenhuma solução; $k = 2$: infinitas soluções; $k \neq \pm 2$: uma única solução.

6.

7. $a)$ $m = -6$;

   $b)$ O sistema sempre tem infinitas soluções.

8. $X = (-1, 1, -1)^T$.

9. $\lambda \in \{2, 3\}$.