Lista 2

Determinantes

1. Calcule o determinante das matrizes abaixo:

$a)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad b)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad c)\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$,

$d)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad e)\begin{pmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{pmatrix}$, $\quad f)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$.

2. Mostre que

$a)\ \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 2, \qquad b)\ \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & \pi & 7 \end{pmatrix} = 2.$

3. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n e $\det(A) = 2$ e $\det(B) = 3$, encontre $\det(A^2B^{-1})$.

4. Para cada uma das matrizes abaixo calcule sua adjunta e utilize estes cálculos para calcular a matriz inversa

$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Seja A uma matriz de ordem n tal que $A + A^T = 0$. Provar que $\det(A) = (-1)^n \det(A)$.

6. O que pode ser dito sobre o valor de $\det A$, onde A é uma matriz $n \times n$ tal que

$$\begin{array}{llllll} a) & A^2 = I_n, & b) & A^3 = I_n, & c) & A^2 = 3A, \\ d) & A^2 + I_n = 0, & e) & A^3 = A. & & \end{array}$$

7. Mostre que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 3 \end{pmatrix}$$

possui uma inversa para qualquer números a, b e c.

8. Encontre os valores do numero c tal que A possui a inversa e encontre A^{-1} para tais valores de c:

$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 0 & c \\ c & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -c & c \\ 1 & 1 & -1 \\ c & -c & 1 \end{pmatrix}$.

9. Se A é $n \times n$ invertível, mostre que

$$\det[\mathrm{adj}(A)] = [\det(A)]^{n-1}.$$

10. Calcule os determinantes de Vandermonde:

$$a)\ \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}.$$

11. Resolva as equações:

$$a)\ \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & x \\ 2 & x & -3 \end{pmatrix} = 2, \qquad b)\ \det\begin{pmatrix} x+1 & 3 & x \\ 3 & x & 1 \\ x & 2 & x-1 \end{pmatrix} = 0.$$

Respostas

Q1. a) 10; b) 49; c) -6; d) 48; e) a^2+b^2; f) abc.

Q2.

Q3. $4/3$.

Q4. $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = -\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$

$\operatorname{adj}(B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$

$\operatorname{adj}(C) = C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Q5. *Dica:* Utilize a formula geral para o determinante da matriz $A = (a_{ij})$, observando que neste caso $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos i, j.

Q6. $a)$ $\det(A) = \pm 1$, $b)$ $\det(A) = 1$, $c)$ $\det(A) = \{0, 3\}$,
$d)$ não é possivel, $e)$ $\det(A) = \{-1, 0, 1\}$.

Q7. $\det(A) = 3a^2 + b^2 + c^2 > 0$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$, assim a matriz A é invertível.

Q8. $a)$ $c \neq 0, \pm 1, \quad A^{-1} = \dfrac{1}{c(c^2-1)}\begin{pmatrix} c & -c & c^2 \\ c^2-2 & 1 & -c \\ -2 & 1+c^2 & -2c \end{pmatrix};$

$b)$ $c \neq \pm 1, \quad A^{-1} = \dfrac{1}{c^2-1}\begin{pmatrix} 1-c & c-c^2 & 0 \\ -1-c & 1-c & -1+c \\ -2c & c-c^2 & 1+c \end{pmatrix}.$

Q9. *Dica:* Utilize $\operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}$.

Q10. $a)$ $(b-a)(c-a)(c-b)$, $b)$ $(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$.

Q11. $a)$ $x \in \{1, 2\}$, $b)$ $x = 7/3$.