УДК 517.5

1. Пространства S_φ^p

Пусть $\mathscr{X}$ – произвольное комплексное векторное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}$, $k \in N = \{1, 2, \ldots\}$ – фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathscr{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит к φ, определено скалярное произведение (x, y), удовлетворяющее известным условиям

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ – произвольные числа;

3) $$(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases} \tag{1}$$

Каждому элементу $f \in \mathscr{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k)$ посредством равенств

$$\hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k), \quad k \in N \tag{2}$$

и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S_\varphi^p = S_\varphi^p(\mathscr{X}) = \{f \in \mathscr{X} : \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_\varphi(k)|^p < \infty\}. \tag{3}$$

При этом элементы $x, y \in S_\varphi^p$ отождествляются, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$. Таким образом, множество S_φ^p порождается пространством $\mathscr{X}$, системой φ и числом p.

Для векторов $f \in S^p_\varphi$ при $p \in [1, \infty)$ определим норму посредством равенства

$$\|f\|_p = \|f\|_{\varphi,p} = \|\hat{f}_\varphi\|_{l_p} = (\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_\varphi(k)|^p)^{1/p}. \tag{4}$$

Сразу же заметим, что если система $\varphi' = \{\varphi'_k\} = \{\varphi_{k_s}\}$, $s = 1, 2, \dots$, получена из системы φ путем любой перестановки ее членов, то, в силу (3) и (4), справедливы равенства

$$S^p_\varphi = S^p_{\varphi'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{\varphi,p} = \|f\|_{\varphi',p} \quad \forall f \in S^p_\varphi. \tag{5}$$

Множество S^p_φ – линейное пространство: операции сложения векторов и умножения их на числа, определенные во всем $\mathscr{X}$ остаются пригодными и для любой пары $x, y \in S^p_\varphi$ и для любых чисел λ и μ

$$\lambda x + \mu y = z \in S^p_\varphi.$$

Действительно, так как $z \in \mathscr{X}$, то $\hat{z}(k) = \lambda\hat{x}(k) + \mu\hat{y}(k)$ и в силу неравенства Минковского

$$(\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{z}(k)|^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda\hat{x}(k) + \mu\hat{y}(k)|^p)^{1/p} \le \lambda\|x\|_p + \mu\|y\|_p. \tag{6}$$

Ясно также, что норма, введенная равенством (4), удовлетворяет всем необходимым аксиомам, поэтому S^p_φ – линейное нормированное пространство, содержащее ортонормированную систему φ.

Отметим еще одно из важнейших свойств пространств S^p_φ. Пусть

$$S[f] = S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \tag{7}$$

– ряд Фурье элемента $f \in S^p_\varphi$ по системе φ и

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \;\; n \in N, \tag{8}$$

– частные суммы этого ряда. Справедливо следующее

Предложение 1. *Среди всех сумм вида*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \tag{9}$$

при данном $n \in N$ *наименее уклоняется от* $f \in S^p_\varphi$ *частичная сумма* $S_n(f)$. *При этом*

$$\|f - S_n(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p. \tag{10}$$

Действительно, согласно (4) имеем

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_\varphi(k) - \alpha_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\hat{f}_\varphi(k)|^p,$$

откуда и следует нужное утверждение.

При $n \to \infty$ правая часть в (10) стремится к нулю. Отсюда следует, что *для любого элемента* f *из* S^p_φ *его ряд Фурье (7) сходится к* f, т.е. система φ полна в S^p_φ и S^p_φ сепарабельно.

Приведем важную для дальнейшего конкретизацию этих построений.

Пусть R^m – m-мерное, $m \geq 1$, евклидово пространство, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ – его элементы, Z^m – целочисленная решетка в R^m – множестве векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ с целочисленными координатами, $\boldsymbol{xy} = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m$, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{xx})}$ и, в частности, $\boldsymbol{kx} = k_1 x_1 + \cdots + k_m x_m$, $|\boldsymbol{k}| = \sqrt{k_1^2 + \cdots + k_m^2}$.

Пусть, далее, $L = L(R^m)$ – множество всех 2π - периодических по каждой из переменных функций $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q^m,

$$Q^m = \{\boldsymbol{x} : \ \boldsymbol{x} \in R^m, \ \ -\pi \leq x_k \leq \pi, \ \ k = 1, \ldots, m\}.$$

Если $f \in L$, то через $S[f]$ обозначается ряд Фурье функции f по тригонометрической системе

$$(2\pi)^{-m/2} e^{i\boldsymbol{kx}}, \quad \boldsymbol{k} \in Z^m, \tag{11}$$

т.е.

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} \hat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{kx}},$$

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(\boldsymbol{t}) e^{-i\boldsymbol{kt}} d\boldsymbol{t}. \tag{12}$$

Если считать неразличимыми функции, эквивалентные относительно меры Лебега, то в качестве $\mathscr{X}$ можно взять пространство $L(R^m)$, а в качестве системы φ – тригонометрическую систему $\tau = \{\tau_s\}$, $s \in N$, где

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} e^{i\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{x}}, \;\; \boldsymbol{k}_s \in Z^m, \;\; s = 1, 2, \dots \,, \tag{13}$$

полученную из системы (11) путем произвольной фиксированной нумерации ее элементов; скалярное произведение в таком случае задается известным образом:

$$(f, \tau_s) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(\boldsymbol{t}) e^{-i\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{t}} d\boldsymbol{t} = \hat{f}(\boldsymbol{k}_s) = \hat{f}_\tau(\boldsymbol{k}_s). \tag{14}$$

Получающиеся при этом множества S_τ^p согласно (5) не зависят от нумерации системы (11) и в дальнейшем обозначаются через S^p.

Пусть теперь $\psi = \{\psi_n\}$, $n \in N$, – произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathscr{X}$ существует элемент $F \in \mathscr{X}$, для которого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}_\varphi(k) \varphi_k, \tag{15}$$

т.е.

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}_\varphi(k), \;\; k \in N, \tag{16}$$

то F будем называть ψ -интегралом вектора f и писать $F = \mathcal{J}^{\psi} f$. В этом случае иногда удобно f называть ψ -производной элемента F и писать $f = F^{\psi}$.

Пусть, далее,

$$U_{\varphi}^{p} = \{f \in S_{\varphi}^{p} : \ \|f\|_{\varphi,p} \leq 1\} \tag{17}$$

– единичный шар в пространстве S_{φ}^{p}. Тогда через $H_{\varphi,p}^{\psi}$ обозначим множество ψ -интегралов всех векторов $f \in U_{\varphi}^{p}$:

$$H_{\varphi,p}^{\psi} = \{f \in \mathscr{X} : \ f^{\psi} \in U_{\varphi}^{p}\}. \tag{18}$$

В дальнейшем предполагаем, что система ψ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n| = 0. \tag{19}$$

Понятно, что это условие заведомо обеспечивает включение $\mathcal{J}^{\psi} f \subset S_{\varphi}^{p}$ для любого элемента $f \in U_{\varphi}^{p}$ (ясно, что для такого включения необходимым и достаточным условием есть ограниченность чисел $|\psi_n|$, $n \in N$). Поэтому в рассматриваемом случае

$$H_{\varphi,p}^{\psi} \subset S_{\varphi}^{p}. \tag{20}$$

В настоящей работе предлагается способ построения приближающих агрегатов для векторов из $H_{\varphi,p}^{\psi}$, приспособленный к данному множеству, и показана его состоятельность в смысле колмогоровских поперечников. Точнее, при минимальных естественных ограничениях на системы ψ – требование (19) и условие

$$\psi_k \neq 0 \ \ \forall k \in N, \tag{21}$$

находятся точные значения поперечников по Колмогорову

$$d_n(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in H_{\varphi,p}^{\psi}} \inf_{u \in F_n} \|f-u\|_p, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

$$d_0(H_{\varphi,p}^{\psi}) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in H_{\varphi,p}^{\psi}} \|f\|_p, \tag{22}$$

где G_n – множество всех n-мерных подпространств в S^p_φ. Показывается, что при этом экстремальными подпространствами, реализующими нижнюю грань в (22), являются именно построенные здесь подпространства. Из доказанной ниже теоремы 2, в частности следует, что график величины $d_n(H^\psi_{\varphi,p})$ как функции переменной n в общем случае имеет ступенчатый вид, причем высота и ширина ступени полностью и явно определяются системой ψ.

Здесь также находятся точные значения величин $e_n(H^\psi_{\varphi,p})$ наилучших приближений классов $H^\psi_{\varphi,p}$ при помощи n-членных полиномов по системе φ. Эти значения также явно определяются последовательностью ψ.

Во второй части работы из доказанных утверждений выводятся следствия, дающие точные значения колмогоровских поперечников классов периодических функций многих переменных, определяющихся мультипликаторами в пространстве S^p. Полученные результаты распространяют на более общие классы функций известные утверждения А.Н. Колмогорова , К.И. Бабенко и В.М. Тихомирова, которые в рассматриваемой тематике являются основополагающими. Найдены также значения наилучших n - членных приближений (по Стечкину) таких классов.

2. Колмогоровские поперечники классов $H^\psi_{\varphi,p}$

Пусть $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ – произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (19). Обозначим через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ множество значений величин $|\psi_k|$, упорядоченное по их убыванию, и через $g^{(\psi)} = g_1, g_2, \cdots$ – систему множеств

$$g_n = g^\psi_n = \{k \in N : \ |\psi_k| \geq \varepsilon_n\}. \tag{23}$$

Пусть еще $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \cdots,$ где $\delta_n = |g_n|$ – количество чисел $k \in N,$ принадлежащих множеству g_n. Учитывая условие (19), последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ можно определить посредством следующих рекуррентных соотношений:

$$\varepsilon_1 = \sup_{k\in N} |\psi_k|, \;\; g_1 = \{k \in N: \;\; |\psi_k| = \varepsilon_1\},$$
$$\varepsilon_n = \sup_{k\in N\setminus g_{n-1}} |\psi(k)|, \tag{24}$$
$$g_n = g_{n-1} \cup \gamma_n, \;\; \gamma_n = \{k \in N: \;\; |\psi(k)| = \varepsilon_n\}.$$

Последовательности $\varepsilon(\psi), g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ в дальнейшем играют важную роль, поэтому будем называть их характеристическими для данной последовательности ψ.

Заметим, что в случае, когда множество $\varepsilon(\psi)$ значений $|\psi(k)|$ состоит из конечного числа n_0 элементов, то $\varepsilon_{n_0} = 0$ и при $n < n_0$ множества g_n имеют также конечное число δ_n элементов, а $\delta_{n_0} = \infty$. При этом

$$\delta_{n-1} < \delta_n. \tag{25}$$

Если же множество $\varepsilon(\psi)$ бесконечно, то всегда $\delta_n < \infty$ и выполняется неравенство (25). В обоих случаях

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \infty. \tag{26}$$

В дальнейшем ради удобства через g_0^ψ обозначается пустое множество и считается, что $\delta_0 = 0$.

В качестве приближающих агрегатов для элементов $f \in H^\psi_{\varphi,p}$ будем рассматривать полиномы

$$S_n(f)_\varphi = S_{g_n^\psi}(f)_\varphi = \sum_{k\in g_n^\psi} c_k\varphi_k, \;\; n = 1, 2, \ldots, \quad S_0(f)_\varphi = \theta, \tag{27}$$

где g_n^ψ – элементы последовательности $g(\psi)$, а θ – нулевой элемент пространства S^p_φ.

Положим

$$\mathscr{E}_n^\psi(f)_\varphi = \|f - S_{n-1}(f)_\varphi\|_{\varphi,p} \tag{28}$$

и

$$\mathscr{E}_n(H^\psi_{\varphi,p}) = \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} \mathscr{E}_n^\psi(f)_\varphi, \;\; n = 1, 2, \ldots\,. \tag{29}$$

Пусть еще

$$E_n^{\psi}(f)_{\varphi} = \inf_{a_k} \|f - \sum_{k\in g_{n-1}^{\psi}} a_k\varphi_k\|_{\varphi,p} \tag{30}$$

и

$$E_n(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \sup_{f\in H_{\varphi,p}^{\psi}} E_n^{\psi}(f)_{\varphi}. \tag{31}$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, *– система чисел, для которой выполняются условия (19) и (21). Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *справедливо равенство*

$$E_n(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \mathscr{E}_n(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \varepsilon_n, \tag{32}$$

где ε_n *–* n*-й член характеристической последовательности* $\varepsilon(\psi)$.

Доказательство. В силу равенства (4) и (16), с учетом определения чисел ε_n и множеств g_n, для любого элемента $f \in H_{\varphi,p}^{\psi}$, полагая $\|\cdot\|_{\varphi,p} = \|\cdot\|$, имеем

$$\mathscr{E}_n^{\psi}(f)_{\varphi} = \|\sum_{k\in\bar{g}_{n-1}} \hat{f}_{\varphi}(k)\varphi_k\| = \|\sum_{k\in\bar{g}_{n-1}} \psi_k\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(k)\varphi_k\| =$$

$$= (\sum_{k\in\bar{g}_{n-1}} |\psi_k|^p|\hat{f}_{\varphi}^{\psi}(k)|^p)^{1/p} \le \varepsilon_n\|f^{\psi}\| = \varepsilon_n, \;\; \bar{g}_{n-1} = N\setminus g_{n-1}.$$

Таким образом, всегда

$$\mathscr{E}_n^{\psi}(f)_{\varphi} \le \varepsilon_n \quad \forall f \in H_{\varphi,p}^{\psi}. \tag{33}$$

Пусть теперь k' – любая точка из $\gamma_n = g_n^{\psi}\setminus g_{n-1}^{\psi}$ и $f_* = \psi_{k'}\varphi_{k'}$, так что $\|f_*\| = |\psi_{k'}| = \varepsilon_n$. Так как $f_*^{\psi} = \varphi_{k'}$, то $\|f_*^{\psi}\| = 1$ и, следовательно, $f_* \in H_{\varphi,p}^{\psi}$. Ясно, что

$$E_n^{\psi}(f_*)_{\varphi} = \|f_*\| = \varepsilon_n. \tag{34}$$

Поэтому, объединяя соотношения (33) и (34) и учитывая, что всегда $E_n(H^{\psi}_{\varphi,p}) \le \mathscr{E}_n(H^{\psi}_{\varphi,p})$, получаем равенство (32).

Следующее утверждение касается величин поперечников $d_n(H^{\psi}_{\varphi,p})$.

Теорема 2. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ *– система чисел, удовлетворяющая условиям (19) и (21). Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *справедливы равенства*

$$d_{\delta_{n-1}}(H^{\psi}_{\varphi,p}) = d_{\delta_{n-1}+1}(H^{\psi}_{\varphi,p}) = \cdots =$$

$$= d_{\delta_n - 1}(H^{\psi}_{\varphi,p}) = E^{\psi}_n(H^{\psi}_{\varphi,p})_{\varphi} = \varepsilon_n, \tag{35}$$

в которых δ_s *и* ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ *– элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi)$ *и* $\varepsilon(\psi)$ *системы* ψ, *а* $\delta_0 = 0$.

Доказательство. Пусть сначала $n > 1$. Подпространство $\Phi^{(\psi)}_{n-1}$ полиномов

$$\Phi_{n-1} = \sum_{k \in g^{\psi}_{n-1}} a_k \varphi_k \tag{36}$$

имеет размерность δ_{n-1}. Поэтому, с учетом (32), находим

$$\varepsilon_n = E_n(H^{\psi}_{\varphi,p}) \ge d_{\delta_{n-1}}(H^{\psi}_{\varphi,p}) \ge d_{\delta_{n-1}+1}(H^{\psi}_{\varphi,p}) \ge \cdots \ge d_{\delta_n - 1}(H^{\psi}_{\varphi,p}).$$

Следовательно, для доказательства равенства (35) остается показать, что

$$d_{\delta_n - 1}(H^{\psi}_{\varphi,p}) \ge \varepsilon_n, \ \ n = 1, 2, \ldots . \tag{37}$$

Для этого воспользуемся известной теоремой о поперечнике шара (см. напр. [1, §10.2]), согласно которой, если множество $\mathfrak{M}$ линейного нормированного пространства $\mathscr{X}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ содержит шар $\gamma U_{\nu+1}$ радиуса γ некоторого $(\nu+1)$ -мерного подпространства $M_{\nu+1}$ из $\mathscr{X}$, т.е. если

$$\mathfrak{M} \supset \gamma U_{\nu+1} = \{y : \ y \in M_{\nu+1}, \ \|y\|_{\mathscr{X}} \le \gamma\},$$

то

$$d_\nu(\mathfrak{M})_{\mathscr{X}} = \inf_{F_\nu \subset G_\nu} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_\nu} \|f - u\|_{\mathscr{X}} \geq \gamma,$$

где G_ν - множество всех ν - мерных подпространств в $\mathscr{X}$.

Пусть $\varepsilon_n U^\psi_{n,\Phi}$ – пересечение шара радиуса ε_n в S^p_φ с пространством Φ^ψ_n (размерности δ_n) полиномов вида (36):

$$\varepsilon_n U^\psi_{n,\Phi} = \{\Phi_n \in \Phi^{(\psi)}_n : \ \|\Phi_n\| \leq \varepsilon_n\}. \tag{38}$$

Для ψ -производной Φ^ψ_n любого элемента $\Phi_n \in \varepsilon_n U^\psi_{n,\Phi}$, с учетом (38), имеем

$$\|\Phi^\psi_n\| = \|\sum_{k \in g^\psi_n} \frac{a_k}{\psi_k}\varphi_k\| = (\sum_{k \in g^\psi_n} \frac{|a_k|^p}{|\psi_k|^p})^{1/p} \leq \frac{1}{\varepsilon_n}(\sum_{k \in g^\psi_n} |a_k|^p)^{1/p} \leq 1.$$

Следовательно, $\Phi_n \in H^\psi_{\varphi,p}$. Таким образом, шар $\varepsilon_n U^\psi_{n,\Phi}$ δ_n -мерного подпространства $\Phi_n(\psi)$ из S^p_φ находится в классе $H^\psi_{\varphi,p}$, что в силу упомянутой теоремы и влечет соотношение (37). В случае $n > 1$ теорема доказана. При $n = 1$ ее доказательство остается без изменений, если принять, что $\Phi_0(\psi)$ состоит из нулевого элемента θ и размерность его равна нулю.

Отметим, что доказательство теоремы 2 по существу скопировано из рассуждений В.М. Тихомирова в [1, §4.4], где находятся поперечники эллипсоидов в гильбертовом пространстве, т.е. множеств, совпадающих в принятых здесь обозначениях с замыканием множеств $H^\psi_{\varphi,2}$.

3. Наилучшие n -членные приближения классов $H^\psi_{\varphi,p}$

Пусть, как и раньше, $S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathscr{X})$ – множество, порожденное произвольным линейным пространством $\mathscr{X}$, ортонормированной системой $\varphi = \{\varphi_n\}$, $n \in N$, и числом $p \in [1, \infty)$. Следуя С.Б. Стечнику [2], дадим такое определение

Определение 1. *Пусть* n *– фиксированное натуральное число,* Γ_n *– произвольный набор из* n *натуральных чисел и*

$$P_{\Gamma_n} = \sum_{k\in\Gamma_n} a_k\varphi_k, \tag{39}$$

где a_k *– некоторые комплексные числа.*

Величина

$$e_n(f)_\varphi = e_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{a_k,\Gamma_n} \|f - P_{\Gamma_n}\|_{\varphi,p} \tag{40}$$

называется наилучшим n *-членным приближением элемента* $f \in S^p_\varphi$ *в пространстве* S^p_φ*.*

Согласно (4) $\forall f \in S^p_\varphi$

$$\|f - P_{\Gamma_n}\|^p_{\varphi,p} = \sum_{k\bar{\in}\Gamma_n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p + \sum_{k\in\Gamma_n} |\hat{f}_\varphi(k) - a_k|^p \geq \sum_{k\bar{\in}\Gamma_n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p =$$

$$= \|f\|^p_{\varphi,p} - \sum_{k\in\Gamma_n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p. \tag{41}$$

Отсюда видим, что

$$e^p_n(f)_\varphi = \|f\|^p_{\varphi,p} - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p. \tag{42}$$

При $k \to \infty$ величины $\hat{f}_\varphi(k)$ стремятся к нулю. Поэтому значение верхней грани в (42) всегда достигается для некоторого набора Γ^*_n (не обязательно единственного), так что

$$e^p_n(f)_\varphi = \|f\|^p_{\varphi,p} - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p = \|f\|^p_{\varphi,p} - \sum_{k\in\Gamma^*_n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p. \tag{43}$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *– система чисел, удовлетворяющая условиям (19) и (21). Тогда при любом* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$e^p_n(H^\psi_{\varphi,p}) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} e^p_n(f)_\varphi =$$

$$= \sup_{q>n} (q-n) / \sum_{k=1}^{q} \bar{\psi}_k^{-p} = (q_n^* - n) / \sum_{k=1}^{q_n^*} \bar{\psi}_k^{-p}, \tag{44}$$

где $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$ *– последовательность, определяющаяся соотношениями*

$$\bar{\psi}_k = \varepsilon_n, \;\; \delta_{n-1} < k \leq \delta_n, \;\; n = 1, 2, \ldots \;, \tag{45}$$

и q_n^* *– некоторое натуральное число.*

Доказательство. Если $f \in H^{\psi}_{\varphi,p}$, то согласно (43) и (16)

$$e_n^p(f)_\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i|^p |\hat{f}^{\psi}_{\varphi}(i)|^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{i \in \Gamma_n} |\psi_i|^p |\hat{f}^{\psi}_{\varphi}(i)|^p. \tag{46}$$

Пусть $i_k, \;\; k = 1, 2, \ldots,$ – натуральные числа такие, что

$$\psi_{i_k} = \bar{\psi}_k, \;\; k = 1, 2, \ldots \;. \tag{47}$$

Тогда в силу (46)

$$e_n^p(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\psi}_k^p |\hat{f}^{\psi}_{\varphi}(i_k)|^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k \in \Gamma_n} \bar{\psi}_k^p |\hat{f}^{\psi}_{\varphi}(i_k)|^p \tag{48}$$

и, следовательно,

$$e_n^p(H^{\psi}_{\varphi,p}) = \sup_{f \in H^{\psi}_{\varphi,p}} (\sum_{k=1}^{\infty} \bar{\psi}_k^p |\hat{f}^{\psi}_{\varphi}(i_k)|^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k \in \Gamma_n} \bar{\psi}_k^p |\hat{f}^{\psi}_{\varphi}(i_k)|^p). \tag{49}$$

Для нахождения значений правой части этого соотношения воспользуемся следующей леммой для числовых рядов.

Лемма. *Пусть* $\alpha = \{\alpha_k\}, \;\; k = 1, 2, \ldots,$ *– невозрастающая последовательность положительных чисел,* $\alpha_k > 0 \;\;\; \forall k \in N,$ *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{k \to 0} \alpha_k = 0, \tag{50}$$

и $m = \{m_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ – *последовательность неотрицательных чисел,* $m_k \geq 0 \ \ \forall k \in N$, *для которой*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \ \leq 1. \tag{51}$$

Пусть, далее,

$$S(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_m m_k, \ \ S_{\Gamma_n}(m) = \sum_{k \in \Gamma_n} \alpha_k m_k, \tag{52}$$

где Γ_n – *произвольный набор из* n *натуральных чисел,*

$$\mathscr{E}_n(m) = \mathscr{E}_n^{(\alpha)}(m) = S_{(m)} - \sup_{\Gamma_n} S_{\Gamma_n}(m)$$

и

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_n^{(\alpha)} = \sup_{|m| \leq 1} \mathscr{E}_n(m). \tag{53}$$

Тогда для любого натурального n *существует число* $q^* = q_n^* \in N$, $q_n^* > n$, *такое, что*

$$\mathscr{E}_n = (q^* - n) / \sum_{k=1}^{q^*} \alpha_k^{-1}. \tag{54}$$

Число q_n^* *определяется равенством*

$$\sup_{q > n} (q - n) / \sum_{k=1}^{q} \alpha_k^{-1} = (q^* - n) / \sum_{k=1}^{q^*} \alpha_k^{-1} \tag{55}$$

и верхняя грань в (53) реализуется для последовательности $m' = \{m'_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *у которой*

$$m'_k = \begin{cases} (\alpha_k \sum_{i=1}^{q^*} \dfrac{1}{\alpha_k})^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, q^*, \\ 0, & k > q^*. \end{cases} \tag{56}$$

Предположим, что лемма доказана. Тогда полагая $\bar{\psi}_k^p = \alpha_k$, $k \in N$, видим, что в силу (19) и (45), числа α_k удовлетворяют требованиям леммы и так как $\forall f \in H^{\psi}_{\varphi,p}$ $\|\hat{f}^{\psi}_{\varphi}\|_{l_p} \le 1$, то

$$e_n^p(H^{\psi}_{\varphi,p}) \le \sup_{|m|\le 1} (\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} \alpha_k m_k) =$$

$$= (q^* - n)/\sum_{k=1}^{q^*} \alpha_k^{-1}, \qquad (57)$$

и для завершения доказательства теоремы остается показать, что в классе $H^{\psi}_{\varphi,p}$ существует элемент f_*, для которого

$$e_n^p(f_*) = (q_n^* - n)/\sum_{k=1}^{q^*} \bar{\psi}_k^{-p}. \qquad (58)$$

С этой целью положим

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} \varphi_{i_k}, \qquad (59)$$

где числа i_k выбраны согласно (47) и

$$c_{i_k}^p = \begin{cases} (\bar{\psi}_k^p \sum_{j=1}^{q^*} \frac{1}{\bar{\psi}_j^p})^{-1}, & k = 1, 2, \dots, q^*, \\ 0, & k > q^*. \end{cases} \qquad (60)$$

Элемент h является линейной комбинацией конечного числа элементов φ_j, поэтому он принадлежит к S^p_{φ}, а так как

$$\|h\|^p_{\varphi,p} = \sum_{k=1}^{q^*} c_{i_k}^p = (\sum_{j=1}^{q^*} \frac{1}{\bar{\psi}_j^p})^{-1} \sum_{k=1}^{q^*} \frac{1}{\bar{\psi}_k^p} = 1,$$

то $h \in U^{\varphi}_p$. Поэтому полагая $f_* = \mathcal{J}^{\psi} h$, заключаем, что $f_* \in H^{\psi}_{\varphi,p}$ и $f_*^{\psi} = h$.

В силу (48), (59) и (60)

$$e_n^p(f_*)_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \bar\psi_k^p c_{i_k}^p - \sup_{\Gamma_n} \sum_{k\in\Gamma_n} \bar\psi_k^p c_{i_k}^p = (q^*-n)/\sum_{k=1}^{q^*} \bar\psi_k^{-p}.$$

Таким образом, соотношение (58), а с ним и теорема 3 доказаны.

Доказательство леммы. Пусть последовательности α и m удовлетворяют условиям леммы $(\alpha \in \mathcal{A}, \quad m \in \mathcal{M})$ и $\Gamma_n^* = \Gamma_n^*(m)$ – набор из n натуральных чисел, для которого

$$\sup_{\Gamma_n} S_{\Gamma_n}(m) = S_{\Gamma_n^*}(m). \tag{61}$$

В силу (50) и (51) ряд в (52) сходится, значит $\alpha_k m_k \to 0$ при $k \to \infty$ и, следовательно, всегда найдется по крайней мере одно множество Γ_n^*, удовлетворяющее условию (61). Пусть еще

$$\mu = \mu_n(m) = \min_{k\in\Gamma_n^*} \alpha_k m_k.$$

Справедливо

Предложение 2. *Если* $\alpha \in \mathcal{A}$, *то для любой последовательности* $m \in \mathcal{M}$ *можно указать последовательность* $m^* \in \mathcal{M}$, *для которой* $|m^*| = |m|$ *и число* $q > n$ *такое, что*

$$\alpha_k m_k^* = \begin{cases} \mu, & k = 1,2,\dots,q, \\ \lambda\mu, & k = q+1, \\ 0, & k > q+1, \end{cases} \tag{62}$$

где $\lambda \in [0,1)$ *и при этом будет выполняться неравенство*

$$\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(m^*). \tag{63}$$

Идея доказательства этого утверждения основана на том, что если при некотором k значение m_k представить в виде $m_k = m_k' + m_k''$, $m_k', m_k'' \ge 0$, то в силу монотонного убывания последовательности α будет

$$\alpha_l(m_l + m_k') + \alpha_k m_k'' \ge \alpha_l m_l + \alpha_k m_k \ \ \forall l \in [1,k). \tag{64}$$

Последовательность m^* можно построить ,например, таким образом. Первый шаг состоит в следующем.

Если $\alpha_1 m_1 < \mu,$ то через s_1 обозначим наименьшее из натуральных чисел (больших, чем 1), для которого будет

$$\alpha_1 \sum_{i=1}^{s_1} m_i \geq \mu.$$

Значение m_{s_1} представим в виде $m_{s_1} = \bar{m}_{s_1} + \bar{\bar{m}}_{s_1},$ где $\bar{m}_{s_1}$ подобрано так, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha_1 (\sum_{i=1}^{s_1-1} m_i + \bar{m}_{s_1}) = \mu,$$

и положим $m^{(1)} = \{m_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty},$ где

$$m_k^{(1)} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{s_1-1} m_i + \bar{m}_{s_1}, & k = 1, \\ 0, & 1 < k < s_1, \\ \bar{m}_{s_1}, & k = s_1, \\ m_k, & k > s_1. \end{cases} \tag{65}$$

Если же $\alpha_1 m_1 \geq \mu,$ то положим $m^{(1)} = m.$ В силу соотношения (64) в обоих случаях будем иметь

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1)}). \tag{66}$$

Сделаем второй шаг. Если значение $m_2^{(1)}$ таково, что $\alpha_2 m_2^{(1)} < \mu,$ то через s_2 обозначим наименьшее из натуральных чисел, больших, чем 2, для которого

$$\alpha_2 \sum_{i=2}^{s_2} m_i^{(1)} \geq \mu,$$

значение $m_{s_2}^{(1)}$ представим в виде $m_{s_2}^{(1)} = \bar{m}_{s_2}^{(1)} + \bar{\bar{m}}_{s_2}^{(1)},$ где $\bar{m}_{s_2}^{(1)}$ подобрано по условию

$$\alpha_2 (\sum_{i=2}^{s_2-1} m_i^{(1)} + \bar{m}_{s_2}^{(1)}) = \mu$$

и положим $m^{(2)} = \{m_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(2)} = \begin{cases} m_1^{(1)}, & k = 1, \\ \sum_{i=2}^{s_2-1} m_i^{(1)} + \bar{m}_{s_2}^{(1)}, & k = 2, \\ 0, & 2 < k < s_2, \\ \bar{\bar{m}}_{s_2}^{(1)}, & k = s_2, \\ m_k, & k > s_2. \end{cases} \tag{65'}$$

Если же окажется, что $\alpha_2 m_2^{(1)} \geq \mu$, то положим $m^{(2)} = m^{(1)}$. Ясно, что и в этом случае будет выполняться аналог (66):

$$\mathscr{E}_n(m^{(1)}) \leq \mathscr{E}_n(m^{(2)}). \tag{66'}$$

Продолжая эту процедуру, на некотором шаге (пусть его номер будет j) построим последовательность $m^{(j)} = \{m_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(j)} = \begin{cases} m_k^{(j-1)}, & k = 1, 2, \ldots, j-1, \\ \sum_{i=j}^{s_j-1} m_i^{(j-1)} + \bar{m}_{s_j}^{(j-1)}, & k = j, \\ 0, & j < k < s_j, \\ \bar{\bar{m}}_{s_j}^{(j-1)}, & k = s_j, \\ m_k, & k > s_j. \end{cases}$$

Для этой последовательности будем иметь

$$\mathscr{E}_n(m) \leq \mathscr{E}_n(m^{(1)}) \leq \cdots \leq \mathscr{E}_n(m^{(j)}) \tag{67}$$

и, кроме того,

$$\alpha_j \sum_{k \geq j} m_k^{(j)} = \alpha_j (\bar{\bar{m}}_{s_j}^{(j)} + \sum_{k > j} m_k) < \mu. \tag{68}$$

На следующем шаге положим $m^{(j+1)} = \{m_k^{(j+1)}\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^{(j+1)} = \begin{cases} m_k^{(j)}, & k = 1, 2, \ldots, j, \\ \sum_{k > j} m_k^{(j)}, & k = j+1, \\ 0, & k > j+1. \end{cases}$$

Принимая во внимание соотношения (62)–(68), видим, что

$$\mathscr{E}_n(m) \le \mathscr{E}_n(m^{(j+1)}) \tag{69}$$

и, кроме того,

$$m_k^{(j+1)} = m_k^{(j)} \ge \mu, \;\; k = 1, 2, \dots, j; \quad m_{j+1}^{(j+1)} < \mu. \tag{70}$$

Ясно также, что число j удовлетворяет условию

$$j \ge n.$$

Теперь величину

$$\beta = \sum_{i=1}^{j} (m_k^{(j+1)} - \mu) + m_{j+1}^{(j+1)}$$

представим в виде

$$\beta = \beta_{j+1} + \beta_{j+2} + \dots + \beta_{j+l}, \;\; \beta_{j+i} \ge 0, \;\; i = \overline{1, l},$$

где числа β_ν и l подобраны так, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_{j+i}\beta_{j+i} = \mu, \quad i = \overline{1, l-1},$$

$$\alpha_{j+l}\beta_{j+l} < \mu,$$

и положим $m^* = \{m_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$m_k^* = \begin{cases} \mu/\alpha_k, & k = 1, 2, \dots, j + l - 1, \\ \beta_{j+l}, & k = j + l, \\ 0, & k > j + l. \end{cases} \tag{71}$$

Понятно, что последовательность m^* будет искомой: для этого достаточно положить $p = j + l - 1$ и $\lambda = \alpha_{j+l}\beta_{j+l}/\mu$.

Предложение 2 доказано. Продолжим доказательство леммы. При данном натуральном n обозначим через $\mathcal{M}_n$ подмножество последовательностей m из $\mathcal{M}$, для которых при некотором натуральном q, $q > n$, справедливо представление

$$\alpha_k m_k = \begin{cases} \mu, & k = 1, 2, \dots, q, \\ \lambda\mu, & k = q + 1, \; \lambda \in [0, 1), \\ 0, & k > q + 1, \end{cases} \tag{72}$$

где μ – некоторое положительное число.

Так как построенная выше последовательность m^* принадлежит к $\mathcal{M}_n$, то из (63) следует равенство

$$\mathscr{E}_n = \sup_{m\in\mathcal{M}} \mathscr{E}_n(m) = \sup_{m\in\mathcal{M}_n} \mathscr{E}_n(m), \tag{73}$$

означающее, что для нахождения величины $\mathscr{E}_n$ достаточно ограничиться последовательностями $m \in \mathcal{M}_n$.

Если $m \in \mathcal{M}_n$, то в силу (72)

$$\mathscr{E}_n(m) = (q-n)\mu + \lambda\mu = (q-n+\lambda)|m|/(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\alpha_k} + \frac{\lambda}{\alpha_{q+1}}). \tag{74}$$

При фиксированном n и натуральных $q > n$ рассмотрим функции

$$f(q) = (q-n)/\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\alpha_k}$$

и

$$f(q,\lambda) = (q-n+\lambda)/(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\alpha_k} + \frac{\lambda}{\alpha_{q+1}}),\ \ \lambda \in [0,1].$$

Видим, что

$$f(q,0) = f(q), \quad f(q,1) = f(q+1). \tag{75}$$

Поскольку

$$\frac{\partial f(q,\lambda)}{\partial\lambda} = (\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\alpha_k} - \frac{q-n}{\alpha_{q+1}})(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\alpha_k} + \frac{\lambda}{\alpha_{q+1}})^{-2},$$

то на промежутке $\lambda \in [0,1]$ эта производная сохраняет знак. Следовательно, на этом промежутке функция $f(q,\lambda)$ с ростом λ либо убывает, либо возрастает. В таком случае $\forall\lambda \in [0,1]$ будет либо $f(q,\lambda) \le f(q)$, либо $f(q,\lambda) \le f(q+1)$. Поэтому в силу (74) $\forall m \in \mathcal{M}_n$

$$\mathscr{E}_n(m) \le |m| \max(f(q),\ \ f(q+1)).$$

Значит, согласно (74)

$$\mathscr{E}_n \le \sup_{q>n} f(q) = \sup_{q>n} (q-n)/\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\alpha_k}. \tag{76}$$

Далее, при любом $q > n$ имеем

$$f(q+1)-f(q) = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k} + \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{\alpha_k} - \frac{q-n}{\alpha_{q+1}})(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\alpha_k} \sum_{k=1}^{q+1} \frac{1}{\alpha_k})^{-1}. \tag{77}$$

Величина

$$r_n(q) = \sum_{k=n+1}^{q} \frac{1}{\alpha_k} - \frac{q-n}{\alpha_{q+1}} = \sum_{k=n+1}^{q} (\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{q+1}})$$

отрицательна и в силу (50) ее абсолютная величина , не убывая, – стремится к бесконечности. Поэтому из (77) следует, что найдется такое значение q_0, начиная с которого функция $f(q)$ будет строго убывающей. Следовательно, на промежутке $(n, q_0]$ существует точка q^*, для которой

$$\sup_{q>n} f(q) = \max_{q\in(n,q_0]} f(q) = f(q^*) = (q^* - n)/\sum_{k=1}^{q^*} \frac{1}{\alpha_k}. \tag{78}$$

Таким образом, согласно (76) и (78),

$$\mathscr{E}_n \le (q^* - n)/\sum_{k=1}^{q^*} \frac{1}{\alpha_k}. \tag{79}$$

Остается показать, что строгого неравенства в этом соотношении быть не может. С этой целью рассмотрим последовательность $m' = \{m'_k\}$, у которой

$$m'_k = \begin{cases} (\alpha_k \sum_{i=1}^{q^*} \frac{1}{\alpha_i})^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, q^*, \\ 0, & k > q^*. \end{cases}$$

Ясно, что $m' \in \mathcal{M}_n$ и для нее согласно (74)

$$\mathscr{E}_n(m') = (q^* - n)/\sum_{k=1}^{q^*}\frac{1}{\alpha_k}.$$

Объединяя это соотношение и соотношение (79), заканчиваем доказательство всех утверждений леммы.

Замечание 1. Если система $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что при данном некотором $n \in N$ множество $g_n^{\psi} \backslash g_{n-1}^{\psi}$, определяемое формулой (23), содержит более одной точки, то в силу (35)

$$d_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \varepsilon_n \quad \forall \nu \in [\delta_{n-1}, \delta_n - 1].$$

Значения же $e_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi})$ с увеличением номера ν всегда строго убывают:

$$e_{\nu+1}^p(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \sup_{q>\nu+1}\frac{q-\nu-1}{\sum\limits_{k=1}^{q}\bar{\psi}_k^{-p}} < \sup_{q>\nu+1}\frac{q-\nu}{\sum\limits_{k=1}^{q}\bar{\psi}_k^{-p}} \le e_\nu^p(H_{\varphi,p}^{\psi}),$$

т.е. всегда $e_{\nu+1}(H_{\varphi,p}^{\psi}) < e_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi})$ и, к тому же, всегда $e_{\delta_{n-1}}(H_{\varphi,p}^{\psi}) < \varepsilon_n = d_{\delta_{n-1}}(H_{\varphi,p}^{\psi})$. Действительно, согласно (44)

$$e_{\delta_{n-1}}^p(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \sup_{q>\delta_{n-1}}\frac{q-\delta_{n-1}}{\sum\limits_{k=1}^{\delta_{n-1}}\bar{\psi}_k^{-p} + \sum\limits_{k=\delta_{n-1}+1}^{q}\bar{\psi}_k^{-p}} <$$

$$< \sup_{q>\delta_{n-1}}\frac{q-\delta_{n-1}}{\sum\limits_{k=\delta_{n-1}+1}^{q}\bar{\psi}_k^{-p}} \le \sup_{q>\delta_{n-1}}\frac{q-\delta_{n-1}}{(q-\delta_{n-1})\bar{\psi}_{\delta_{n-1}+1}^{-p}} = \bar{\psi}_{\delta_{n-1}+1}^{p} = \varepsilon_n^p.$$

Таким образом, всегда

$$e_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi}) \;<\; d_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi}). \tag{80}$$

4. Колмогоровские поперечники и наилучшие n-членные приближения периодических функций многих переменных в пространстве S^p

Пусть, как и раньше, $L = L(R^m)$ – множество всех 2π - периодических по каждой из переменных функций $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов Q^m и (12) – ряд Фурье функции $f \in L$ по системе (11). При этом эквивалентные функции считаются неразличимыми.

Пусть, далее, S^p – пространство, порожденное множеством L, системой (11) и некоторым числом $p \in [1, \infty)$ с нормой $\| \cdot \|_p = \| \cdot \|_{S^p}$, определяемой согласно (4), для которой в силу (5) справедливы равенства

$$\|f\|_p = \|f\|_{S^p} = (\sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} |\hat{f}(\boldsymbol{k})|^p)^{1/p}. \tag{81}$$

Пусть теперь $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k} \in Z^m}$ – произвольная система комплексных чисел – кратная последовательность. Для функций $f \in L$ наряду с (12) рассмотрим ряд

$$(2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} \psi(\boldsymbol{k}) \hat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}. \tag{82}$$

Если этот ряд данной функции f и системы ψ является рядом Фурье некоторой функции F из L, то F назовем ψ-интегралом функции f и будем писать $F(\boldsymbol{x}) = \mathcal{J}^\psi(f; \boldsymbol{x})$. При этом иногда удобно функцию f называть ψ-производной функции F и писать $f(\boldsymbol{x}) = D^\psi(F; \boldsymbol{x}) = F^\psi(\boldsymbol{x})$. Множество ψ-интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через L^ψ. Если $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество из L, то $L^\psi \mathfrak{N}$ будет обозначать множество ψ-интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$. Ясно, что если $f \in L^\psi$, то коэффициенты Фурье функций f и f^ψ связаны соотношением

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = \psi(\boldsymbol{k}) \hat{f}^\psi(\boldsymbol{k}), \ \ \boldsymbol{k} \in Z^m. \tag{83}$$

Будем рассматривать в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар U^p в пространстве S^p :

$$U^p = \{f: \ f \in S^p, \ \|f\|_p \leq 1\}. \tag{84}$$

В таком случае полагаем $L^\psi U^p = L^\psi_p = L^\psi_p(R^m)$. Относительно системы ψ предполагается, что

$$\lim_{|\boldsymbol{k}|\to\infty} \psi(\boldsymbol{k}) = 0. \tag{85}$$

Заметим, что если $f \in L^\psi S^p$ и $|\psi(\boldsymbol{k})| \leq C$, $\boldsymbol{k} \in Z^m$, $C = \mathrm{const}$, то $f \in S^p$, т.е. условие (85) всегда гарантирует включение $L^\psi_p \subset S^p$.

Определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ следующим образом:

$\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ – множество значений величин $|\psi(\boldsymbol{k})|$, $\boldsymbol{k} \in Z^m$, упорядоченное по их убыванию; $g(\psi) = \{g_n\}_{n=1}^\infty$, где

$$g_n = g^\psi_n = \{\boldsymbol{k} \in Z^m: \ |\psi(\boldsymbol{k})| \geq \varepsilon_n\}; \tag{86}$$

$\delta(\psi) = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty$, где $\delta_n = \delta^\psi_n = |g_n|$ – количество чисел $\boldsymbol{k} \in Z^m$, принадлежащих множеству g_n.

Ввиду условия (85), в рассматриваемом случае последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ определяются равенствами (24) с учетом того, что на этот раз $\boldsymbol{k} \in Z^m$. Как и раньше считается, что $g_0 = g^\psi_0$ есть пустое множество и что $\delta_0 = \delta^\psi_0 = 0$.

В качестве приближающих агрегатов для функций $f \in L^\psi$ рассмотрим тригонометрические полиномы

$$S_n(f;\boldsymbol{x}) = S_{g^\psi_n}(f;\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k}\in g^\psi_n} \hat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}},$$

$$n \in N, \ \ S_0(f;\boldsymbol{x}) = 0, \tag{27$'$}$$

где g^ψ_n – элементы последовательности $g(\psi)$.

Пусть

$$\mathscr{E}^\psi_n(f)_p = \|f(\boldsymbol{x}) - S_{n-1}(f;\boldsymbol{x})\|_{S^p}, \tag{28$'$}$$

$$\mathscr{E}_n(L^\psi_p)_p = \sup_{f\in L^\psi_p} \mathscr{E}^\psi_n(f)_p, \;\; n=1,2,\ldots\,. \tag{29$'$}$$

$$E^\psi_n(f)_p = \inf_{a_k} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k}\in g^\psi_{n-1}} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kx}}\|_{S^p} \tag{30$'$}$$

и

$$E_n(L^\psi_p)_p = \sup_{f\in L^\psi_p} E^\psi_n(f)_p, \;\; n=1,2,\ldots\,. \tag{31$'$}$$

Пусть, далее,

$$d_n(L^\psi_p)_p = \inf_{F_n\in G_n} \sup_{f\in L^\psi_p} \inf_{u\in F_n} \|f-u\|_{S^p}, \;\; n\in N, \;\; d_0(L^\psi_p)_p \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in L^\psi_p} \|f\|_{S^p},$$

где G_n – множество всех n -мерных подпространств в S^p – поперечники по Колмогорову классов L^ψ_p и

$$e_n(L^\psi_p)_p = \sup_{f\in L^\psi_p} \inf_{a_{\boldsymbol{k}},\Gamma_n} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k}\in\Gamma_n} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kx}}\|_{S^p},$$

где Γ_n – произвольный набор из n векторов $\boldsymbol{k}\in Z^m$, – величина наилучшего n -членного приближения класса L^ψ_p в пространстве S^p.

В принятых обозначениях справедливы следующие утверждения – аналоги, а по существу – частные случаи теорем 1–3.

Теорема $1'$**.** *Пусть* $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ *– система чисел, удовлетворяющая условию (85) и таких, что*

$$\psi(\boldsymbol{k}) \neq 0 \quad \forall \boldsymbol{k}\in Z^m. \tag{87}$$

Тогда при любых $p\in[1,\infty)$ *и* $n\in N$

$$E_n(L^\psi_p)_p = \mathscr{E}_n(L^\psi_p)_p = \varepsilon_n, \tag{32$'$}$$

где ε_n *–* n*-й член последовательности* $\varepsilon(\psi)$.

Теорема $2'$. *Пусть* $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ *– система чисел, удовлетворяющая условия (85) и (87). Тогда при любых* $p\in[1,\infty)$ *и* $n\in N$ *справедливы равенства*

$$d_{\delta_{n-1}}(L^\psi_p)_p = d_{\delta_{n-1}+1}(L^\psi_p)_p = \cdots =$$

$$= d_{\delta_n-1}(L^{\psi}_p)_p = E_n(L^{\psi}_p)_p = \varepsilon_n, \qquad (35')$$

в которых δ_s *и* ε_s, $s \in N$ *– элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi)$ *и* $\varepsilon(\psi)$ *системы* ψ, *а* $\delta_0 = 0$.

Теорема $3'$. *Пусть* $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ *– система чисел, удовлетворяющая условиям (85) и (97). Тогда при любых* $p \in [1, \infty)$ *и* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$e^p_n(L^{\psi}_p)_p = \sup_{q>n}\,(q-n)/\sum_{s=1}^{q}\bar{\psi}_s^{-p} = (q^*-n)/\sum_{s=1}^{q^*}\bar{\psi}_s^{-p}, \qquad (44')$$

где $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_s\}$, $s \in N$ *– последовательность, определяющаяся соотношениями*

$$\bar{\psi}_s = \varepsilon_n, \quad \delta_{n-1} < s \le \delta_n, \ \ n = 1, 2, \dots\ ,$$

в которых ε_s *и* δ_s *– элементы последовательностей* $\varepsilon(\psi)$ *и* $\delta(\psi)$, *а* q^* *– некоторое натуральное число.*

Доказательство. Отправляясь от заданной системы ψ, фигурирующей в теоремах $1' - 3'$, перенумеруем все векторы $\boldsymbol{k} \in Z^m$ так, чтобы числами s при $s \in (\delta_{n-1}, \delta_n)$ были перенумерованы векторы $\boldsymbol{k}$ из множеств $g^{\psi}_k \setminus g^{\psi}_{n-1}$ в каком–нибудь фиксированном порядке. Затем определим последовательность $\psi' = \{\psi'_s\}_{s=1}^{\infty}$, положив

$$\psi'_s = \psi(\boldsymbol{k}_s), \quad s = 1, 2, \dots\ . \qquad (88)$$

Поскольку

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2}\sum_{\boldsymbol{k}\in Z^m}\hat{f}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} = (2\pi)^{-m/2}\sum_{s=1}^{\infty}\hat{f}(\boldsymbol{k}_s)e^{i\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{x}},$$

то из (88) заключаем, что

$$\mathcal{J}^{\psi'}(f;\boldsymbol{x}) = \mathcal{J}^{\psi}(f;\boldsymbol{x}) \quad \forall f \in L$$

и, следовательно,
$$L_p^{\psi'} \;=\; L_p^{\psi}.$$
Но
$$L_p^{\psi'} = H_{\varphi',p}^{\psi'},$$
где $H_{\varphi',p}^{\psi'}$ – множество определяется согласно равенству (18):
$$H_{\varphi',p}^{\psi'} = \{f \in L : \quad f^{\psi'} \in U_{\varphi'}^p\},$$
в котором $U_{\varphi'}^p = U^p$ и $\varphi' = \{(2\pi)^{-m/2}e^{i\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{x}}\}_{s=1}^{\infty}$. К тому же последовательности $\varepsilon(\psi')$ и $\varepsilon(\psi)$, а также $\delta(\psi')$ и $\delta(\psi)$ совпадают и справедливы равенства
$$S_{g_n^{\psi'}}(f)_{\varphi'} \;=\; S_{g_n^{\psi}}(f;x), \quad \mathscr{E}_n^{\psi'}(f)_{\varphi'} \;=\; \mathscr{E}_n^{\psi}(f)_p,$$
$$\mathscr{E}_n(H_{\varphi',p}^{\psi'}) = \mathscr{E}_n(L_p^{\psi})_p, \quad E_n^{\psi'}(f)_{\varphi'} \;=\; E_n^{\psi}(f)_p$$
и
$$E_n(H_{\varphi',p}^{\psi'}) \;=\; E_n(L_p^{\psi})_p,$$
в которых левые части определяются равенствами (27)–(31), а правые – соотношениями $(27')$ – $(31')$. Отсюда заключаем, что утверждения теорем $1'$ и $2'$ следуют из теорем 1 и 2. Ясно также, что и $e_n(L_p^{\psi})_p \;=\; e_n(H_{\varphi',p}^{\psi'})$ и что $\bar{\psi}' \;=\; \bar{\psi}$. Поэтому и теорема $3'$ вытекает из теоремы 3.

Замечание 2. Выражение (4) определяет норму только при $p \in [1,\infty)$ (при $p \in (0,1)$ не выполняется неравенство (6)), однако оно имеет смысл при всех $p > 0$. Поэтому если под знаком $\|\cdot\|_p$ понимать правую часть соотношения (4), то все утверждения , доказанные выше, остаются в силе, за исключением оценки снизу поперечников d_ν, поскольку применяемая здесь теорема о поперечнике шара предполагает, что $\mathscr{X}$ – нормированное пространство.

Замечание 3. Если последовательность ψ такова, что ряд
$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Z^m} \psi(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \tag{89}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\mathscr{D}_\psi(t)$, то необходимым и достаточным условием включения $f \in L^\psi \mathfrak{N}$ является возможность представления f сверткой вида

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{Q^m} \varphi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{t}) \mathscr{D}_\psi(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}, \tag{90}$$

в которой $\varphi \in \mathfrak{N}$ и почти всюду $\varphi(\boldsymbol{x}) = f^\psi(\boldsymbol{x})$. Таким образом, классы $L^\psi \mathfrak{N}$ охватывают классы функций, представимых свертками с фиксированными суммируемыми ядрами (см., например, [3, §1.9]).

Замечание 4. Пусть $L_p = L_p(R^m)$, $p \in [1, \infty)$, – пространство функций $f \in L$ с конечной нормой $\|\cdot\|_{L_p}$,

$$\|f\|_{L_p} = (\int\limits_{Q^m} |f(\boldsymbol{t})|^p d\boldsymbol{t})^{1/p}. \tag{91}$$

Связь между множествами L_p и S^p устанавливает известная теорема Хаусдорфа–Юнга (см. например [4, п. XII.2]), утверждающая, что

(I) Если $f \in L_p$, $p \in (1, 2]$, и $\hat{f}(\boldsymbol{k})$ – коэффициенты Фурье функции f, определяемые формулой

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(\boldsymbol{t}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{t}} d\boldsymbol{t}, \tag{92}$$

то

$$(\sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} |\hat{f}(\boldsymbol{k})|^{p'})^{1/p'} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|f\|_{L_p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

(II) Пусть $\{c_{\boldsymbol{k}}\}_{\boldsymbol{k} \in Z^m}$ – последовательность комплексных чисел, для которой

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} |c_{\boldsymbol{k}}|^p < \infty, \quad p \in (1, 2].$$

Тогда существует функция $f \in L_{p'}$, для которой $\hat{f}(\boldsymbol{k}) = c_{\boldsymbol{k}}$, и

$$\|f\|_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\sum_{\boldsymbol{k}\in Z^m} |c_{\boldsymbol{k}}|^p)^{1/p}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Из этой теоремы следует, что если $p \in (1,2]$, то

$$L_p \subset S^{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{S^{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L_p}, \tag{93}$$

$$S^p \subset L_{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{S^p}. \tag{93$'$}$$

В частности, при $p = p' = 2$ справедливы равенства

$$L_2 = S^2 \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_{L_2} = \|\cdot\|_{S^2}. \tag{94}$$

5. Следствия для пространств L_p

В силу соотношений (93) и (93$'$), теоремы $1' - 3'$, доказанные для пространств S^p, содержат информацию и для пространств L_p, которая является наиболее полной вследствие (94) в случае, когда $p = 2$.

Ввиду особой важности этого случая, приведем точные формулировки соответствующих утверждений.

Пусть, как и раньше, $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ – произвольная система комплексных чисел и $L^\psi\mathfrak{N}$ – множество ψ-интегралов всех функций $f \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ – некоторое подмножество из $L = L(R^m)$, $m \ge 1$. Возьмем в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар U_{L_2} в пространстве L_2 :

$$U_{L_2} = \{f : \ f \in L_2, \ \ \|f\|_{L_2} \le 1\}. \tag{95}$$

Здесь норма $\|\cdot\|_{L_2}$ определяется равенством (91) при $p = 2$. В таком случае положим $L^\psi U_{L_2} = U^\psi_{L_2}$.

Считая выполненным условие (85), определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$, а также полиномы $S_n(f;x)$ согласно формул (27$'$) и для $f \in U^\psi_{L_2}$ положим

$$\mathscr{E}^\psi_n(f)_{L_2} = \|f(\boldsymbol{x}) - S_{n-1}(f;\boldsymbol{x})\|_{L_2}, \tag{28$''$}$$

$$\mathscr{E}_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \sup_{f\in U^\psi_{L_2}} \mathscr{E}^\psi_n(f)_{L_2}, \tag{29''}$$

$$E^\psi_n(f)_{L_2} = \inf_{a_{\boldsymbol{k}}} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k}\in g^\psi_{n-1}} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kx}}\|_{L_2} \tag{30''}$$

и

$$E_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \sup_{f\in U^\psi_{L_2}} E^\psi_n(f)_{L_2}. \tag{31''}$$

Пусть еще

$$d_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \inf_{F_n\in G_n} \sup_{f\in U^\psi_{L_p}} \inf_{u\in F_n} \|f-u\|_{L_2}, \ \ n\in N,$$

$$d_0(U^\psi_{L_2}) = \sup_{f\in U^\psi_{L_2}} \|f\|_{L_2},$$

где G_n – множество всех n-мерных подпространств в L_2 и

$$e_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \sup_{f\in U^\psi_{L_2}} \inf_{a_{\boldsymbol{k}},\Gamma_n} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k}\in\Gamma_n} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kx}}\|_{L_2},$$

где Γ_n – произвольный набор из n векторов $\boldsymbol{k}\in Z^m$ – величина наилучшего n-членного приближения класса $U^\psi_{L_2}$ в пространстве L_2. Справедливо следующее утверждение

Теорема 4. *Пусть* $\psi = \psi(\boldsymbol{k})_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ *– система чисел, удовлетворяющая условиям (85) и (87). Тогда при любых* $n\in N$ *выполняются равенства*

$$E_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \mathscr{E}_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \varepsilon_n, \tag{96}$$

$$\begin{aligned} d_{\delta_{n-1}}(U^\psi_{L_2})_{L_2} &= d_{\delta_{n-1}+1}(U^\psi_{L_2}) = \ldots = \\ &= d_{\delta_n-1}(U^\psi_{L_2})_{L_2} = E_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{97}$$

$$e^2_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \sup_{q>n}(q-n)/\sum_{s=1}^{q}\bar\psi_s^{-2} = (q^*-n)/\sum_{s=1}^{q^*}\bar\psi_s^{-2}. \tag{98}$$

В этих равенствах ε_s *и* δ_s *– элементы характеристических последовательностей* $\varepsilon(\psi)$ *и* $\delta(\psi)$, $\delta_0 = 0$, p^* *– некоторое натуральное число и*

$$\bar{\psi}_s = \varepsilon_n, \quad \delta_{n-1} < s \le \delta_n, \;\; n = 1, 2, \dots \; .$$

Доказательство. В силу (94) и (95) видим, что $U_{L_2} = U^2$ и, следовательно, $U^{\psi}_{L_2} = L^{\psi}_2$. Поэтому справедливы равенства

$$\mathscr{E}^{\psi}_n(U^{\psi}_{L_2})_2 = \mathscr{E}_n(L^{\psi}_2)_2,$$

$$E_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = E_n(L^{\psi}_2)_2,$$

$$d_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = d_n(L^{\psi}_2)_2$$

и

$$e_n(U^{\psi}_{L_2})_2 = e_n(L^{\psi}_2)_2, \quad n = 1, 2, \dots \; .$$

Отсюда заключаем, что равенства (96)–(98) следуют из соотношений $(32')$, $(35')$ и $(44')$.

Отметим, что равенства (96) и (97) в одномерном случае, т.е. при $m = 1$ в несколько другой терминологии были получены еще в 1936 г. в известной работе А.Н. Колмогорова [5], положившей начало исследованию поперечников различных функциональных классов. В общем случае эти равенства можно получить и путем анализа результатов и рассуждений упоминавшегося §4.4 книги В.М. Тихомирова [1].

Отметим также, что, как следует из равенств (96) и (97), в пространстве L_2 значения поперечников множеств $U^{\psi}_{L_2}$ реализуют приближения суммами $(27')$, т.е. полиномами, которые являются наилучшими в смысле поперечников в пространствах S^p при всех $p \in [1, \infty)$ для классов L^{ψ}_p. Это позволяет предположить, что именно суммы $(27')$ будут наилучшим аппаратом приближения (опять таки в смысле колмогоровских поперечников) и в пространствах L_p при всех $p \ge 1$ для соответствующих множеств $U^{\psi}_{L_p}$,

$$U^{\psi}_{L_p} = L^{\psi} U_{L_p}, \quad U_{L_p} = \{f : \;\; f \in L_p, \;\; \|f\|_{L_p} \le 1\}.$$

Пусть $p \in (1,2]$ и $f \in L_p^\psi$, где $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k} \in Z^m}$ – кратная последовательность, удовлетворяющая условиям (85) и (87). Положим

$$\mathscr{E}_n^\psi(f)_{L_q} = \|f(\boldsymbol{x}) - S_{n-1}(f;\boldsymbol{x})\|_{L_q},$$

где $S_{n-1}(f;x)$ – полиномы, построенные согласно формул $(27')$, а $\|\cdot\|_{L_q}$ – норма, определяющаяся равенством (91). Пусть, далее,

$$\mathscr{E}_n(L_p^\psi)_{L_q} = \sup_{f \in L_p^\psi} \mathscr{E}_n^\psi(f)_{L_q},$$

$$E_n^\psi(f)_{L_q} = \inf_{a_{\boldsymbol{k}}} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in g_{n-1}^\psi} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kx}}\|_{L_q}$$

и

$$E_n(L_p^\psi)_{L_q} = \sup_{f \in L_p^\psi} E_n^\psi(f)_{L_q}.$$

Пусть еще

$$d_n(L_p^\psi)_{L_q} = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in L_p^\psi} \inf_{n \in F_n} \|f - u\|_{L_q}, \ \ n \in N,$$

$$d_0(L_p^\psi)_{L_q} = \sup_{f \in L_p^\psi} \|f\|_{L_q},$$

где G_n – множество всех n-мерных пространств в L_q и

$$e_n(L_p^\psi)_{L_q} = \sup_{f \in L_p^\psi} \inf_{a_{\boldsymbol{k}}, \Gamma_n} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in \Gamma_n} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{kx}}\|_{L_q},$$

где Γ_n – произвольный набор из n векторов $\boldsymbol{k} \in Z^m$. Согласно $(93')$, имеем

$$\mathscr{E}_n^\psi(f)_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \mathscr{E}_n^\psi(f)_p.$$

Поэтому, в силу $(32')$,

$$\mathscr{E}_n(L_p^\psi)_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \varepsilon_n,$$

где как и выше – ε_n – n-й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.

Следовательно, и

$$E_n(L^{\psi}_p)_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{k}'$ – любая точка из $\gamma_n = g^{\psi}_n \setminus g^{\psi}_{n-1}$ и $f_* = (2\pi)^{-m/2}\psi(\boldsymbol{k}')e^{i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x}}$. Тогда $f_* \in L^{\psi}_p$ и

$$E^{\psi}_n(f_*)_{L_{p'}} = \|f_*\|_{L_{p'}} = (2\pi)^{m(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2})}|\psi_{(\boldsymbol{k}')}| \ \|e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\|_{L_{p'}} =$$

$$= (2\pi)^{m(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2})}\varepsilon_n = \varepsilon_n(2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}.$$

Таким образом, доказано следующее

Предложение 3. *Если* $p \in (1, 2]$ *и последовательность* $\Phi(\boldsymbol{k})$ *удовлетворяет условиям (85) и (87), то* $\forall n \in N$

$$E_n(L^{\psi}_p)_{L_{p'}} = \mathscr{E}_n(L^{\psi}_p)_{L_{p'}} = \varepsilon_n(2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}. \tag{99}$$

Аналогично, с учетом соотношений $(93')$ и (99) в ранее принятых обозначениях получаются следующие оценки:

$$\varepsilon_n(2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \geq d_{\delta_{n-1}}(L^{\psi}_p)_{L_{p'}} \geq d_{\delta_{n-1}+1}(L^{\psi}_p)_{L_{p'}} \geq \cdots \geq d_{\delta_n-1}(L^{\psi}_p)_{L_{p'}} \tag{100}$$

и

$$e_n(L^{\psi}_p)_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\sup_{q>n}(q-n)/\sum_{s=1}^{q}\bar{\psi}_s^{-p} = (q^*-n)\sum_{s=1}^{q^*}\bar{\psi}_s^{-p}. \tag{101}$$

Заметим, что в силу теоремы 4 соотношения становятся равенствами при $p = 2$. Отметим также, что величины, подобные величинам $e_n(L^{\psi}_p)_{L_{p'}}$, изучались ранее в работах [6, 7] и др.

6. Примеры. Во всех предыдущих построениях центральное место занимают последовательности ψ : они определяют приближаемые множества, по ним строится аппарат приближения и через них выражаются аппроксимационные характеристики. Кроме условий вида (85) и (87), без которых рассмотрения становятся почти бессодержательными, в настоящей работе на последовательности ψ никаких ограничений не налагалось. Поэтому сами системы ψ, а с ними и их характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ в общем случае могут быть достаточно сложными.

В многомерном случае, по-видимому, наиболее простыми и естественными являются системы ψ, у которых числа $\psi(\boldsymbol{k})$ представляются произведениями

$$\psi(\boldsymbol{k}) = \psi(k_1, \ldots, k_m) = \prod_{j=1}^{m} \psi_j(k_j), \ \ k_j \in Z^1, \ \ j = \overline{1, m},$$

значений одномерных последовательностей $\psi_j = \{\psi_j(k_j)\}_{k_j=1}^{\infty}$. Если к тому же

$$\psi(-k_j) = \overline{\psi_j(k_j)}, \quad j = \overline{1, m}$$

(через $\bar{z}$ обозначено число, комплексно сопряженное к z), то множества g_n^{ψ} будут симметричными относительно всех координатных плоскостей и, как не трудно убедиться,

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} \psi(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{t}} = \sum_{\boldsymbol{k} \in Z_+^m} 2^{m-q(\boldsymbol{k})} \prod_{j=1}^{m} |\psi_j(k_j)| \cos(k_j t_j - \frac{\beta_{k_j}\pi}{2}), \quad (102)$$

где $Z_+^m = \{\boldsymbol{k} \in Z^m, \ \ k_i \geq 0, \ \ i = \overline{1, m}\}$, $q(\boldsymbol{k})$ – количество координат вектора $\boldsymbol{k}$, равных нулю, а числа β_{k_j} определяются равенствами

$$\cos \frac{\beta_{k_j}\pi}{2} = \frac{\mathrm{Re}\, \psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}, \quad \sin \frac{\beta_{k_j}\pi}{2} = \frac{\mathrm{Im}\, \psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}.$$

В таком случае множество ψ-интегралов действительных функций φ из $L(R^m)$ состоит из действительных функций f и в случае, когда ряд в (102) является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\mathscr{D}_\psi(t)$, согласно замечанию 3 справедлива формула (90) .

Аппроксимационные характеристики различных подмножеств из L^ψ (при тех или иных ограничениях на последовательности $\psi_j(k_j)$) рассматривались ранее в [2,8,9] и др.

При конкретных значениях $\psi_j(k_j)$, именно в случае, когда

$$\psi_j(k_j) = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ (ik_j)^{r_j}, & k_j \neq 0, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{103}$$

где r_j – некоторые действительные числа, эти характеристики изучались, как хорошо известно, многими авторами.

Пример 1. Пусть $m = 2$ и последовательности $\psi_1(k_1)$ и $\psi_2(k_2)$ заданы равенствами (103) при условии $r_1 = r_2 = r > 0$.

Классы $U^\psi_{L_2}$, определяющиеся такими последовательностями, с точки зрения нахождения их поперечников впервые рассматривались К.И. Бабенко в [10] и [11], которым в этом случае фактически было получено и соотношение (97).

В данной ситуации характеристическая последовательность $\varepsilon(\psi)$ состоит из элементов $\varepsilon_n = n^{-r}$, $n \in N$, множества g^ψ_n – множества векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2) \in Z^2$, удовлетворяющих условию

$$k_1' k_2' \leq n, \tag{104}$$

где

$$k_j' = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ |k_j|, & k_j \neq 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

Такие соотношения впервые появились в упомянутых работах К.И. Бабенко и сейчас их принято называть гиперболическими крестами.

Числа $\delta_n = \delta^\psi_n$ в рассматриваемом случае – число векторов $\boldsymbol{k} \in Z^2$, удовлетворяющих условию (104). Можно подсчитать, что $\delta_1 = 9$, $\delta_2 = 21$, $\delta_3 = 33$, $\delta_4 = 49$, $\delta_5 = 61$, $\delta_6 = 81$, $\delta_7 = 93$, $\delta_8 = 113, \cdots$. Поэтому, полагая $d_\nu = d_\nu(U^\psi_{L_2})_{L_2}$, на основании равенства (97), имеем

$$d_1 = \cdots = d_8 = 1;\ \ d_9 = \cdots = d_{20} = 2^{-r};\ \ d_{21} = \cdots = d_{32} = 3^{-r},$$

$$d_{33} = \cdots = d_{48} = 4^{-r};\ d_{49} = \cdots = d_{60} = 5^{-r};\ d_{61} = \cdots = d_{80} = 6^{-r},$$

$$d_{81} = \cdots = d_{92} = 7^{-r};\ \ d_{93} = \cdots = d_{112} = 8^{-r}; \cdots .$$

Пример 2. Пусть по-прежнему $m = 2$ и

$$\psi_j(k_j) = e^{-\alpha|k_j|} e^{-i\beta k_j \frac{\pi}{2}\mathrm{sign} k_j},\ \ j = 1, 2,$$

где $\alpha > 0$, β_{k_j} – произвольные действительные числа. Тогда $\varepsilon_n = e^{-\alpha(n-1)}$, $n \in N$, а g_n^ψ – множества векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2) \in Z^2$, удовлетворяющие условию $|k_1| + |k_2| \le n - 1$, и $\delta_n = 1 + 2n(n-1)$, $n \in N$. Равенство (97) в этом случае имеет вид

$$d_{2n(n-1)+1} = d_{2n(n-1)+2} = \cdots = d_{2n(n+1)} = e^{-\alpha n}.$$

Здесь, как и раньше, $d_\nu = d_\nu(U^\psi_{L_2})_{L_2}$.

Пример 3. Пусть опять $m = 2$ и

$$\psi_j(k_j) = e^{-\alpha k_j^2} e^{-i\beta_{k_j} \frac{\pi}{2}\mathrm{sign} k_j},\ \ j = 1, 2,\ \ \alpha > 0,$$

где β_{k_j} – произвольные действительные числа. В этом случае элементами характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$ есть упорядоченные по убыванию числа $e^{-\alpha(n_1^2+n_2^2)}$, $n_1, n_2 \in Z^1$, а множества g_n^ψ состоят из векторов $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2) \in Z^2$, для которых

$$k_1^2 + k_2^2 \le \log_{e^\alpha}\ 1/\varepsilon_n \overset{\mathrm{df}}{=} R_n^2,$$

т.е. g_n^ψ состоят из векторов $\boldsymbol{k}$, находящихся внутри концентрических окружностей, радиусы R_n которых таковы, что число R_n^2 представимо суммой квадратов двух целых чисел. Можно подсчитать, что

$$\varepsilon_1 = 1,\ \ \delta_1 = 1;\ \varepsilon_2 = e^{-\alpha},\ \ \delta_2 = 5;\ \ \varepsilon_3 = e^{-2\alpha},\ \ \delta_3 = 9;$$

$$\varepsilon_4 = e^{-4\alpha},\ \ \delta_4 = 13;\ \ \varepsilon_5 = e^{-5\alpha},\ \ \delta_5 = 21;\ \ \varepsilon_6 = e^{-8\alpha},\ \ \delta_6 = 25;$$

$$\varepsilon_7 = e^{-9\alpha},\ \ \delta_7 = 29;\ \ \varepsilon_8 = e^{-10\alpha},\ \ \delta_8 = 33;\ \ \varepsilon_9 = e^{--13\alpha},\ \ \delta_9 = 41;$$

$$\varepsilon_{10} = e^{-16\alpha},\ \ \delta_{10} = 45;\ \ \varepsilon_{11} = e^{-17\alpha},$$

$$\delta_{11} = 53,\ \ \varepsilon_{12} = e^{-18\alpha},\ \ \delta_{12} = 57;\ \ \ldots .$$

В этом случае равенство (97) показывает, что

$$d_1 = \ldots = d_4 = e^{-\alpha};\ \ d_5 = \cdots = d_8 = e^{-2\alpha};\ \ d_9 = \cdots = d_{12} = e^{-4\alpha};$$

$$d_{13} = \cdots = d_{20} = e^{-5\alpha};$$

$$d_{21} = \cdots = d_{24} = e^{-8\alpha};\ \ d_{25} = \cdots = d_{28} = e^{-9\alpha};$$

$$d_{29} = \cdots = d_{32} = e^{-10\alpha};\ \ d_{33} = \cdots = d_{40} = e^{-13\alpha};$$

$$d_{41} = \cdots = d_{44} = e^{-16\alpha};$$

$$d_{45} = \cdots = d_{52} = e^{-17\alpha},\ \ d_{53} = \cdots = d_{56} = e^{-18\alpha};\ \ \cdots .$$

Здесь также $d_\nu = d_\nu(U^\psi_{L_2})_{L_2}$.

Отметим, что подсчеты в примерах 1–3 были выполнены А.С. Сердюком и их результаты приводятся здесь с его любезного согласия.

Пример 4 (к теоремам 3 и $3'$**)** Пусть система $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $|\psi_k| = k^{-r}$, $r > 0$. В таком случае $\varepsilon_n = n^{-r}$, $n \in N$, и $\bar\psi_k = |\psi_k| = k^{-r}$, $k \in N$. Поэтому согласно (44)

$$e_n^p(H^\psi_{\varphi,p}) = \sup_{q>n}(q-n)/\sum_{k=1}^q k^{rp}.$$

Пусть, к примеру, $rp = 1$. Так как

$$\sum_{k=1}^q k = \frac{q(q+1)}{2},$$

то

$$e_n^p(H^\psi_{\varphi,p}) = \sup_{q>n}\frac{2(q-n)}{q(q+1)} = \frac{2(q^*-n)}{q^*(q^*+1)},$$

где

$$q^* = n\sqrt{n^2+n}.$$

Пример $4'$. Пусть в теореме 3 $\psi_k = e^{-k}$. Тогда $\varepsilon_n = e^{-n}$, $\bar{\psi}_k = e^{-k}$ и согласно (44)

$$e_n^p(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \sup_{q>n}(q-n)/\sum_{k=1}^{q} e^{kp} = \sup_{q>n}(q-n)/\frac{e^p(e^{pq}-1)}{e^p-1} =$$

$$= \frac{e^p-1}{e^p}\sup_{q>n}\frac{(q-n)}{e^{pq}-1}.$$

Величина

$$\frac{q-n}{e^{pq}-1}$$

при $q \geq n+1/p$ убывает. Поэтому при $p \geq 1$

$$e_n^p(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \frac{e^p-1}{e^p}\frac{1}{e^{p(n+1)}-1}.$$

Список литературы

1. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. – Изд. МГУ, 1976. – 304 с.

2. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов// Докл. АН СССР. – 1955. – 102, N 1. – С. 37 – 40.

3. **Степанец А.И.** Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.

4. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

5. **Колмогоров А.Н.** Über die beste Annäherung von Functionen einer gegebenen Functionenklass//Ann. of Math.–1936. – 37, N 1. – S. 107 – 110.

6. **Temlyakov V.N.** Greedy Algorithm and m-Term Trigonometric Approximation// Constructive Approximation. – 1998. – 14. – P. 569 – 587.

7. **Temlyakov V.N.** Greedy Algorithms and M-Term Approximation with Regard to Redundant Dictionaries// Journal of Approximation Theory. – 1999. – 98. – P. 117 – 145.

8. **Степанец А.И., Пачулиа Н.Л.** Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций// Укр. мат. журн. – 1991. – 43, N 4. – С. 545 – 555.

9. **Романюк А.С.** О приближении классов периодических функций многих переменных// Укр.мат.журн. – 1992. – 44, N 5. – С. 662 – 672.

10. **Бабенко К.И.** О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. – 1960. – 132, N 2. – С. 247 – 250.

11. **Бабенко К.И.** О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами// Докл. АН СССР. – 1960. – 132, N 5. – С. 982 – 985.

Abstract

Let $\mathscr{X}$ – be an arbitrary complex vector space and $\varphi = \{\varphi_k\}$, $k \in N = \{1, 2, \ldots\}$ – fixed denumerable system in it. Let us assume that for any pair $x, y \in \mathscr{X}$, in which at least one vector belongs to φ, the inner product (x, y) is defined, satisfying well-known conditions:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ – arbitrary numbers;
3) $$(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases} \tag{1}$$

For each element $f \in \mathscr{X}$ we will associate a system of numbers $\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k)$ by means of equalities

$$\hat{f}(k)_\varphi = (f, \varphi_k), \quad k \in N, \tag{2}$$

and for given fixed $p \in (0, \infty)$ we will put

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathscr{X}) = \{f \in \mathscr{X} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_\varphi(k)|^p < \infty\}. \tag{3}$$

Two vectors $x, y \in S^p_\varphi$ is equvivalent if for any $k \in N$ $\hat{x}(k) = \hat{y}(k)$. Thus the set S^p_φ is generated by the space $\mathscr{X}$, system φ and number p.

For vectors $f \in S^p_\varphi$ as $p \in [1, \infty)$ we will define a norm by means of equality

$$\|f\|_p = \|f\|_{\varphi,p} = \|\hat{f}_\varphi\|_{l_p} = (\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_\varphi(k)|^p)^{1/p}. \tag{4}$$

At once let us observe that if system $\varphi' = \{\varphi'_k\} = \{\varphi_{k_s}\}$, $s = 1, 2, \ldots$, is obtained from system φ by arbitrary rearrangement of its terms, then by virtue of (3) and (4), the equalities hold

$$S^p_\varphi = S^p_{\varphi'} \quad \text{and} \quad \|f\|_{\varphi,p} = \|f\|_{\varphi',p} \quad \forall f \in S^p_\varphi. \tag{5}$$

The set S^p_φ is linear space: operations of addition of vectors and their multiplication by numbers, defined in whole $\mathscr{X}$ remain admissible also for any pair $x, y \in S^p_\varphi$ and for arbitrary numbers λ and μ

$$\lambda x + \mu y = z \in S^p_\varphi.$$

In fact since $z \in \mathscr{X}$, then $\hat{z}(k) = \lambda\hat{x}(k) + \mu\hat{y}(k)$ and by virtue of Minkowski inequality

$$(\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{z}(k)|^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda\hat{x}(k) + \mu\hat{y}(k)|^p)^{1/p} \leq \lambda\|x\|_p + \mu\|y\|_p. \quad (6)$$

It is clear as well that the norm introduced by equality (4) satisfies all necessary axioms, therefore S^p_φ is linear normed space containing orthonormal system φ.

Let us mark one more from most important properties of S^p_φ. spaces. Let

$$S[f] = S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \quad (7)$$

be Fourier series of element $f \in S^p_\varphi$ with respect to system φ and

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k, \;\; n \in N, \quad (8)$$

be partial sums of this series. The following statement holds.

Proposition 1. *Among all sums of the form*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k \quad (9)$$

for given $n \in N$ *the partial sum* $S_n(f)$ *is least deviating from* $f \in S^p_\varphi$. *Moreover*

$$\|f - S_n(f)\|_p^p = \|f\|_p^p - \sum_{k=1}^{n} |\hat{f}_\varphi(k)|^p. \quad (10)$$

In fact according to (4) we have

$$\|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\|_p^p=\sum_{k=1}^{n}|\hat f_\varphi(k)-\alpha_k|^p+\sum_{k=n+1}^{\infty}|\hat f_\varphi(k)|^p,$$

from where necessary statement follows.

For $n\to\infty$ right side of (10) tends to zero. It implies that *for arbitrary element* f *from* S^p_φ *its Fourier series (7) converges to* f, i.e. system φ is complete in S^p_φ and S^p_φ is separable.

Let us mention the concrete definitions of these constructions which are important later on.

Let R^m be m-dimensional Euclidean space, $m\geq 1$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_m)$ – its elements, Z^m – integer-valued lattice in R^m – the set of vectors $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_m)$ with integer components, $\boldsymbol{xy}=x_1y_1+\dots+x_my_m$, $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{(\boldsymbol{xx})}$ and, in particular, $\boldsymbol{kx}=k_1x_1+\dots+k_mx_m$, $|\boldsymbol{k}|=\sqrt{k_1^2+\dots+k_m^2}$.

Next let $L=L(R^m)$ be the set of all 2π - periodic with respect to each variable functions $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_m)$, summable on cube of periods Q^m,

$$Q^m=\{\boldsymbol{x}:\ \boldsymbol{x}\in R^m,\ \ -\pi\leq x_k\leq\pi,\ \ k=1,\dots,m\}.$$

If $f\in L$, then by $S[f]$ the Fourier series of function f in trigonometric system

$$(2\pi)^{-m/2}e^{i\boldsymbol{kx}},\quad \boldsymbol{k}\in Z^m, \tag{11}$$

is detoted, i.e.

$$S[f]=(2\pi)^{-m/2}\sum_{\boldsymbol{k}\in Z^m}\hat f(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{kx}},\quad \hat f(\boldsymbol{k})=(2\pi)^{-m/2}\int\limits_{Q^m}f(t)e^{-i\boldsymbol{k}t}dt. \tag{12}$$

If one consider as indistinguishable the functions which are equivalent with respect to Lebesgue measure then it is possible to take $L(R^m)$ space as $\mathscr{X}$ and trigonometric system $\tau=\{\tau_s\}$, $s\in N$, where

$$\tau_s=(2\pi)^{-m/2}e^{i\boldsymbol{k}_s\boldsymbol{x}},\ \ \boldsymbol{k}_s\in Z^m,\ \ s=1,2,\dots\ , \tag{13}$$

obtained from system (11) by means of arbitrary fixed enumeration of its elements as system φ ; inner product in this case is defined in well-known way:

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(\boldsymbol{t}) e^{-i\boldsymbol{k}_s \boldsymbol{t}} d\boldsymbol{t} = \hat{f}(\boldsymbol{k}_s) = \hat{f}_\tau(\boldsymbol{k}_s). \tag{14}$$

Thus obtained sets S^p_τ according to (5) do not depend on enumeration of system (11) and later are denoted by S^p.

Now let $\psi = \{\psi_n\}$, $n \in N$, – be arbitrary system of complex numbers. If for given element $f \in \mathscr{X}$ there exists an element $F \in \mathscr{X}$, for which

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}_\varphi(k) \varphi_k, \tag{15}$$

i.e.

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}_\varphi(k), \;\; k \in N, \tag{16}$$

then F will be called ψ -integral of vector f and we will write $F = \mathcal{J}^\psi f$. In this case sometimes it is convenient to call f the ψ -derivative of element F and to write $f = F^\psi$.

Next let

$$U^p_\varphi = \{f \in S^p_\varphi : \;\; \|f\|_{\varphi,p} \leq 1\} \tag{17}$$

– be unit ball in S^p_φ space. Then by $H^\psi_{\varphi,p}$ we will denote the set of ψ -integrals of all vectors $f \in U^p_\varphi$:

$$H^\psi_{\varphi,p} = \{f \in \mathscr{X} : \;\; f^\psi \in U^p_\varphi\}. \tag{18}$$

Later on we assume that system ψ satisfies the condition

$$\lim_{n\to\infty} |\psi_n| = 0. \tag{19}$$

It is easily seen that this condition certainly ensures inclusion $\mathcal{J}^\psi f \subset S^p_\varphi$ for every element $f \in U^p_\varphi$ (it is clear that necessary and sufficient condition for this inclusion is boundedness of numbers $|\psi_n|, \quad n \in N$). Therefore in considered case

$$H^{\psi}_{\varphi,p} \subset S^p_{\varphi}. \tag{20}$$

In this paper the method is proposed of construction of approximative aggregates for vectors from $H^{\psi}_{\varphi,p}$, adjusted to given set, and its consistency is proved in the sense of Kolmogorov widthes. More precisely under minimal natural restrictions on systems ψ – requirement (19) and condition

$$\psi_k \neq 0 \ \ \forall k \in N, \tag{21}$$

exact values of Kolmogorov widthes are found

$$d_n(H^{\psi}_{\varphi,p}) = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in H^{\psi}_{\varphi,p}} \inf_{u \in F_n} \|f-u\|_p, \ \ n = 1, 2, \dots,$$

$$d_0(H^{\psi}_{\varphi,p}) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in H^{\psi}_{\varphi,p}} \|f\|_p, \tag{22}$$

where G_n – the set of all n -dimensional subspaces of S^p_{φ}. It is shown that in addition extremal subspaces realizing lower bound in (22) are just the subspaces constructed here. In particular, it follows from the Theorem 2 proved below that the graph of the value $d_n(H^{\psi}_{\varphi,p})$ as function of variable n in general case has staircase form, moreover the height and the widht of the step are defined completely and explicitly by the system ψ.

Here also the exact values of magnitudes $e_n(H^{\psi}_{\varphi,p})$ of the best approximations of $H^{\psi}_{\varphi,p}$ classes by means of n -term polynomials in system φ are found. These values also are defined explicitly by the sequence ψ.

In the second part of the paper the corollaries are deduced from proved statements giving exact values of Kolmogorov widthes of classes of periodic functions of several variables defined by multiplicators in S^p space. Obtained results spreads on more general classes of functions well-known statements by

A.N. Kolmogorov, K.L. Babenko and V.M. Tikhomirov, which are fundamental in subjects under consideration. Also the values of best n - term approximations (according to Stechkin) of such classes are found.

Let $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \dots,$ – be arbitrary system of complex numbers satisfying the condition (19). Let us denote by $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ the set of values of magnitudes $|\psi_k|$, ordered by their decreasing and by $g^{(\psi)} = g_1, g_2, \cdots$ – the system of sets

$$g_n = g_n^{\psi} = \{k \in N : \ |\psi_k| \geq \varepsilon_n\}. \tag{23}$$

Let also $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \cdots,$ where $\delta_n = |g_n|$ – number of integers $k \in N,$ belonging to g_n. Taking into account the condition (19), the sequences $\varepsilon(\psi)$ and $g(\psi)$ may be defined by means of the following recursion relations

$$\varepsilon_1 = \sup_{k \in N} |\psi_k|, \ \ g_1 = \{k \in N : \ |\psi_k| = \varepsilon_1\},$$

$$\varepsilon_n = \sup_{k \in N \setminus g_{n-1}} |\psi(k)|, \ \ g_n = g_{n-1} \cup \gamma_n,$$

$$\gamma_n = \{k \in N : \ |\psi(k)| = \varepsilon_n\}. \tag{24}$$

The sequences $\varepsilon(\psi), g(\psi)$ and $\delta(\psi)$ will play the important role later on, therefore we will call them the characteristic sequences for given sequence ψ.

Let us observe that in the case , when the set $\varepsilon(\psi)$ of values $|\psi(k)|$ consists of a finite number n_0 of elements, then $\varepsilon_{n_0} = 0$ and for $n < n_0$ the sets g_n also have a finite number δ_n elements and $\delta_{n_0} = \infty$. In addition

$$\delta_{n-1} < \delta_n. \tag{25}$$

But if the set $\varepsilon(\psi)$ is infinite, then always $\delta_n < \infty,$ and equality (25) holds. In both cases

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = \infty. \tag{26}$$

Later on for the sake of convenience by g_0^ψ the empty set is denoted, and we assume that $\delta_0 = 0$.

As approximating aggregates for the elements $f \in H^\psi_{\varphi,p}$ we will consider the polynomials

$$S_n(f)_\varphi = S_{g_n^\psi}(f)_\varphi = \sum_{k\in g_n^\psi} c_k\varphi_k, \ \ n = 1,2,\dots, \quad S_0(f)_\varphi = \theta, \quad (27)$$

where g_n^ψ – the elements of sequence $g(\psi)$, and θ – zero element of the S^p_φ space.

Let us assume that

$$\mathscr{E}_n^\psi(f)_\varphi = \|f - S_{n-1}(f)_\varphi\|_{\varphi,p} \quad (28)$$

and

$$\mathscr{E}_n(H^\psi_{\varphi,p}) = \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} \mathscr{E}_n^\psi(f)_\varphi, \ \ n = 1,2,\dots\ . \quad (29)$$

Let also

$$E_n^\psi(f)_\varphi = \inf_{a_k} \|f - \sum_{k\in g^\psi_{n-1}} a_k\varphi_k\|_{\varphi,p} \quad (30)$$

and

$$E_n(H^\psi_{\varphi,p}) = \sup_{f\in H^\psi_{\varphi,p}} E_n^\psi(f)_\varphi. \quad (31)$$

The following statements hold.

Theorem 1. *Let* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1,2,\dots$, *– be a system of numbers, for which conditions (19) and (21) hold. Then for each* $p \in [1,\infty)$ *and* $n \in N$ *the equality*

$$E_n(H^\psi_{\varphi,p}) = \mathscr{E}_n(H^\psi_{\varphi,p}) = \varepsilon_n, \quad (32)$$

is correct, where ε_n *is* n*-th term of the characteristic sequence* $\varepsilon(\psi)$.

Theorem 2. *Let* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1,2,\dots$ *be a system of numbers satisfying the conditions (19) and (21). Then for each* $p \in [1,\infty)$ *and* $n \in N$ *the equalities*

$$d_{\delta_{n-1}}(H^\psi_{\varphi,p}) = d_{\delta_{n-1}+1}(H^\psi_{\varphi,p}) = \cdots =$$

$$= d_{\delta_n - 1}(H^{\psi}_{\varphi,p}) = E^{\psi}_n(H^{\psi}_{\varphi,p})_{\varphi} = \varepsilon_n, \tag{33}$$

hold, in which δ_s *and* ε_s, $s = 1, 2, \ldots,$ *are the elements of the characteristic sequences* $\delta(\psi)$ *and* $\varepsilon(\psi)$ *of the system* ψ, *and* $\delta_0 = 0$.

Let as before $S^p_{\varphi} = S^p_{\varphi}(\mathscr{X})$ be the set generated by arbitrary linear space $\mathscr{X}$, orthonormal system $\varphi = \{\varphi_n\}$, $n \in N$ and number $p \in [1, \infty)$. Following S.B. Stechkin [2] we shall give such definition.

Definition 1. *Let* n *be fixed pozitive integer ,* Γ_n *– arbitrary system of* n *positive integers, and*

$$P_{\Gamma_n} = \sum_{k \in \Gamma_n} a_k \varphi_k,$$

where a_k *– some complex numbers. The magnitude*

$$e_n(f)_{\varphi} = e_n(f)_{\varphi,p} = \inf_{a_k, \Gamma_n} \|f - P_{\Gamma_n}\|_{\varphi,p}$$

is called the best n *-term approximation of the element* $f \in S^p_{\varphi}$ *in* S^p_{φ} *space.*

The following statement holds.

Theorem 3. *Let* $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ *be a system of numbers satisfying the conditions (19) and (21). Then for each* $n \in N$ *the equality*

$$e^p_n(H^{\psi}_{\varphi,p}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in H^{\psi}_{\varphi,p}} e^p_n(f)_{\varphi} =$$

$$= \sup_{q > n} (q - n) / \sum_{k=1}^{q} \bar{\psi}_k^{-p} = (q^*_n - n) / \sum_{k=1}^{q^*_n} \bar{\psi}_k^{-p}, \tag{34}$$

is true, where $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ *sequence defined by the relations*

$$\bar{\psi}_k = \varepsilon_n, \;\; \delta_{n-1} < k \le \delta_n, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

and q^*_n *is some positive integer.*

Remark 1. If the system $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ is such, that for some given $n \in N$ the set $g_n^{\psi} \setminus g_{n-1}^{\psi}$, defined by formula (23) consists of more than one point, then by virtue of (33)

$$d_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \varepsilon_n \quad \forall \nu \in [\delta_{n-1}, \delta_n - 1].$$

And the values of $e_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi})$ are alvays strictly decreasing while number ν increasing:

$$e_{\nu+1}(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \sup_{q>\nu+1} \frac{q-\nu-1}{\sum\limits_{k=1}^{q} \bar{\psi}_k^{-p}} < \sup_{q>\nu+1} \frac{q-\nu}{\sum\limits_{k=1}^{q} \bar{\psi}_k^{-p}} \le e_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi}),$$

i.e. always $e_{\nu+1}(H_{\varphi,p}^{\psi}) < e_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi})$, and furthermore always $e_{\delta_{n-1}}(H_{\varphi,p}^{\psi}) < \varepsilon_n = d_{\delta_{n-1}}(H_{\varphi,p}^{\psi})$. In fact according to (34)

$$e_{\delta_{n-1}}(H_{\varphi,p}^{\psi}) = \sup_{q>\delta_{n-1}} \frac{q-\delta_{n-1}}{\sum\limits_{k=1}^{\delta_{n-1}} \bar{\psi}_k^{-p} + \sum\limits_{k=\delta_{n-1}+1}^{q} \bar{\psi}^{-p}} <$$

$$< \sup_{q>\delta_{n-1}} \frac{q-\delta_{n-1}}{\sum\limits_{k=\delta_{n-1}+1}^{q} \bar{\psi}^{-p}} \le \sup_{q>\delta_{n-1}} \frac{q-\delta_{n-1}}{(q-\delta_{n-1})\bar{\psi}_{\delta_{n-1}+1}^{-p}} = \bar{\psi}_{\delta_{n-1}+1}^{p} = \varepsilon_n.$$

Thus always

$$e_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi}) \; < \; d_\nu(H_{\varphi,p}^{\psi}).$$

Let as before $L = L(R^m)$ be the set of all 2π - periodic with respect to each variable functions $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$, summable on cube of periods Q^m and (12) is Fourier series of function $f \in L$ in system (11). Here equivalent functions are assumed as indistinguishable.

Let further S^p be the space generated by the set L, system (11) and some number $p \in [1, \infty)$ with the norm $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{S^p}$, defined according to (4) for which by virtue of (5) the equalities

$$\|f\|_p = \|f\|_{S^p} = (\sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} |\hat{f}(\boldsymbol{k})|^p)^{1/p}.$$

are true. Let now $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k} \in Z^m}$ be arbitrary system of complex numbers (multiple sequence). For functions $f \in L$ along with (12) we will consider a series

$$(2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} \psi(\boldsymbol{k}) \hat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{kx}}. \tag{36}$$

If this series of given function f and system ψ is Fourier series of some function F from L, then we will call F the ψ -integral of function f and write $F(x) = \mathcal{J}^{\psi}(f; \boldsymbol{x})$. In addition sometimes it is convenient to call f the ψ -derivative of function F and write $f(\boldsymbol{x}) = D^{\psi}(F; \boldsymbol{x}) = F^{\psi}(\boldsymbol{x})$. The set of ψ -integrals of all functions $f \in L$ is denoted by L^{ψ}. If $\mathfrak{N}$ is some subset from L, then $L^{\psi}\mathfrak{N}$ will designate the set of ψ -integrals of all functions from $\mathfrak{N}$. It is clear that if $f \in L^{\psi}$, then Fourier coefficients of functions f and f^{ψ} are associated by the relation

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = \psi(\boldsymbol{k}) \hat{f}^{\psi}(\boldsymbol{k}), \ \ \boldsymbol{k} \in Z^m. \tag{37}$$

We will consider as $\mathfrak{N}$ unit ball U^p in S^p space

$$U^p = \{f : \ \ f \in S^p, \ \ \|f\|_p \leq 1\}.$$

In such case we assume $L^{\psi}U^p = L^{\psi}_p = L^{\psi}_p(R^m)$. Concerning the system ψ it is supposed that

$$\lim_{|\boldsymbol{k}| \to \infty} \psi(\boldsymbol{k}) = 0. \tag{38}$$

Let us observe that if $f \in L^{\psi}S^p$ and $|\psi(\boldsymbol{k})| \leq C$, $\boldsymbol{k} \in Z^m$, $C = \mathrm{const}$, then $f \in S^p$, i.e. condition (38) always ensures inclusion $L^{\psi}_p \subset S^p$. Let us define the characteristic sequences $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ and $\delta(\psi)$ in following way :

$\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ – the set of values of magnitudes $|\psi(\boldsymbol{k})|$, $\boldsymbol{k} \in Z^m$, ordered by their decreasing; $g(\psi) = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, where

$$g_n = g_n^{\psi} = \{\boldsymbol{k} \in Z^m : \ \ |\psi(\boldsymbol{k})| \geq \varepsilon_n\};$$

$\delta(\psi) = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, where $\delta_n = \delta_n^{\psi} = |g_n|$ is amount of numbers $\boldsymbol{k} \in Z^m$, belonging to the set g_n.

In view of condition (38), in the case under consideration the sequences $\varepsilon(\psi)$ and $g(\psi)$ are defined by equalities (24) taking account of that this time $\boldsymbol{k} \in Z^m$. As before it is assumed that $g_0 = g_0^{\psi}$ is empty set and $\delta_0 = \delta_0^{\psi} = 0$.

As approximating aggregates for functions $f \in L^{\psi}$ we will consider trigonometric polynomials

$$S_n(f;\boldsymbol{x}) = S_{g_n^{\psi}}(f;\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in g_n^{\psi}} \hat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}},$$

$$n \in N, \ \ S_0(f;\boldsymbol{x}) = 0,$$

where g_n^{ψ} are elements of the sequence $g(\psi)$.

Let

$$\mathscr{E}_n^{\psi}(f)_p = \|f(\boldsymbol{x}) - S_{n-1}(f;\boldsymbol{x})\|_{S^p}, \tag{28'}$$

$$\mathscr{E}_n(L_p^{\psi})_p = \sup_{f \in L_p^{\psi}} \mathscr{E}_n^{\psi}(f)_p, \ \ n = 1, 2, \dots . \tag{29'}$$

$$E_n^{\psi}(f)_p = \inf_{a_{\boldsymbol{k}}} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in g_{n-1}^{\psi}} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\|_{S^p} \tag{30'}$$

and

$$E_n(L_p^{\psi})_p = \sup_{f \in L_p^{\psi}} E_n^{\psi}(f)_p, \ \ n = 1, 2, \dots . \tag{31'}$$

Let further

$$d_n(L_p^{\psi})_p = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in L_p^{\psi}} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{S^p}, \ \ n \in N, \ \ d_0(L_p^{\psi})_p \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{f \in L_p^{\psi}} \|f\|_{S^p},$$

where G_n is set of all n -dimensional subspaces in S^p, be Kolmogorov widthes of classes L_p^{ψ} and

$$e_n(L_p^{\psi})_p = \sup_{f \in L_p^{\psi}} \inf_{a_{\boldsymbol{k}}, \Gamma_n} \|f(\boldsymbol{x}) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{\boldsymbol{k} \in \Gamma_n} a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\|_{S^p},$$

where Γ_n is arbitrary system of n vectors $\boldsymbol{k} \in Z^m$, be magnitude of best n-term approximation of class L^{ψ}_p in S^p space.

Under adopted notations the following statements hold which are analogs and actually partial cases of theorems 1–3.

Theorem $1'$**.** *Let* $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ *be a system of numbers satisfying the condition (38) and such that*

$$\psi(\boldsymbol{k}) \neq 0 \quad \forall \boldsymbol{k} \in Z^m. \tag{39}$$

Then for each $p \in [1,\infty)$ *and* $n \in N$

$$E_n(L^{\psi}_p)_p = \mathscr{E}_n(L^{\psi}_p)_p = \varepsilon_n, \tag{32$'$}$$

where ε_n *is* n*-th term of sequence* $\varepsilon(\psi)$.

Theorem $2'$. *Let* $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ *be a system of numbers satisfying the conditions (38) and (39). Then for each* $p \in [1,\infty)$ *and* $n \in N$ *equalities*

$$d_{\delta_{n-1}}(L^{\psi}_p)_p = d_{\delta_{n-1}+1}(L^{\psi}_p)_p = \cdots =$$

$$= d_{\delta_n-1}(L^{\psi}_p)_p = E_n(L^{\psi}_p)_p = \varepsilon_n, \tag{33$'$}$$

hold in which δ_s *and* ε_s, $s \in N$, *are elements of characteristic sequences* $\delta(\psi)$ *and* $\varepsilon(\psi)$ *of system* ψ, *and* $\delta_0 = 0$.

Theorem $3'$. *Let* $\psi = \{\psi(\boldsymbol{k})\}_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ *be a system of numbers satisfying the conditions (38) and (39). Then for each* $p \in [1,\infty)$ *and* $n \in N$ *the equality*

$$e^p_n(L^{\psi}_p)_p = \sup_{q>n}(q-n)/\sum_{s=1}^{q}\bar{\psi}_s^{-p} = (q^*-n)/\sum_{s=1}^{q^*}\bar{\psi}_s^{-p}, \tag{44$'$}$$

holds, where $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_s\}$, $s \in N$ *is sequence defined by relations*

$$\bar{\psi}_s = \varepsilon_n, \quad \delta_{n-1} < s \le \delta_n, \ \ n = 1,2,\dots\ ,$$

in which ε_s *and* δ_s *are elements of sequences* $\varepsilon(\psi)$ *and* $\delta(\psi)$, *and* q^* *is some positive integer.*

Remark 2. Expression (4) defines norm only for $p \in [1, \infty)$ (for $p \in (0, 1)$ inequality (6) does not hold), but it makes sense for all $p > 0$. Therefore in under sign $\| \cdot \|_p$ the right side of (4) is conceived, then all statements proved above remain true with the exception of lower estimate of widthes d_ν, because the theorem on ball width applied here assumes that $\mathscr{X}$ is normed space.

Remark 3. If the sequence ψ is such that series

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in Z^m} \psi(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}x}$$

is Fourier series of some summable function $\mathscr{D}_\psi(t)$, then the necessary and sufficient condition on inclusion $f \in L^\psi \mathfrak{N}$ is possibility of representation of f by the convolution of the form

$$f(x) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{Q^m} \varphi(x - t) \mathscr{D}_\psi(t) dt,$$

in which $\varphi \in \mathfrak{N}$ and almost everywhere $\varphi(x) = f^\psi(x)$. Thus, $L^\psi \mathfrak{N}$ classes enclose the classes of functions represented by convolutions with fixed summable kernels.

Remark 4. Let $L_p = L_p(R^m)$, $p \in [1, \infty)$, be the space of functions $f \in L$ with finite norm $\| \cdot \|_{L_p}$,

$$\|f\|_{L_p} = (\int\limits_{Q^m} |f(t)|^p dt)^{1/p}.$$

The connection between the sets L_p and S^p is established by well-known Hausdorff – Young theorem claiming that

(I) If $f \in L_p$, $p \in (1, 2]$ and $\hat{f}(\boldsymbol{k})$ are Fourier coefficients of function f defined by the formula

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(t) e^{i\boldsymbol{k}t} dt, \tag{40}$$

then

$$(\sum_{\boldsymbol{k}\in Z^m} |\hat{f}(\boldsymbol{k})|^{p'})^{1/p'} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L_p}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

(II) Let $\{c_{\boldsymbol{k}}\}_{\boldsymbol{k}\in Z^m}$ be sequence of complex numbers for which

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Z^m} |c_{\boldsymbol{k}}|^p < \infty, \quad p\in(1,2].$$

Then the function $f \in L_{p'}$ exists for which $\hat{f}(\boldsymbol{k}) = c_{\boldsymbol{k}}$, where numbers $\hat{f}(\boldsymbol{k})$ are defined by the formula (40) and

$$\|f\|_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}(\sum_{\boldsymbol{k}\in Z^m} |c_{\boldsymbol{k}}|^p)^{1/p}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

This theorem implies that if $p\in(1,2]$, then

$$L_p \subset S^{p'} \quad \text{and} \quad \|f\|_{S^{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L_p},$$

$$S^p \subset L_{p'} \quad \text{and} \quad \|f\|_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|f\|_{S^p}.$$

In particular, the equalities hold

$$L_2 = S^2 \quad \text{and} \quad \|\cdot\|_{L_2} = \|\cdot\|_{S^2}.$$

Автор сердечно благодарит А.С. Сердюка и Т.А. Андрееву за большую помощь в подготовке к печати настоящей работы.