Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 212–221

УДК 517.958:512.816

Повна класифікація симетрій Лі систем нелінійних двовимірних рівнянь Лапласа

Р.О. ПОПОВИЧ †, ***Р.М. ЧЕРНІГА*** ‡

Інститут математики НАН України, Київ

† *E-mail: rop@imath.kiev.ua*
‡ *E-mail: cherniha@imath.kiev.ua*

Використовуючи новий підхід, здійснено вичерпний опис симетрій Лі для систем двох зачеплених нелінійних рівнянь Лапласа з двома незалежними змінними. Знайдено низку випадків, коли нелінійні системи інваріантні відносно нескінченновимірних алгебр Лі, що мають структури, аналогічні до алгебри інваріантності відомого рівняння Ліувіля.

Using a new approach, Lie symmetries for nonlinear systems of two coupled Laplace equations with two independent variables are described completely. It is established that some nonlinear systems are invariant with respect to the infinite-dimensional Lie algebras. Those algebras possess similar structures to the Lie algebra of the well-known Liouville equation.

1. Вступ. В останні два-три десятиліття інтенсивно досліджуються системи рівнянь реакції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned} \lambda_1 U_t &= \Delta U + F(U,V), \\ \lambda_2 V_t &= \Delta V + G(U,V), \end{aligned} \tag{1}$$

де F і G — довільно задані дійсні диференційовні функції, λ_1, λ_2 — довільні дійсні сталі, $U = U(t,x)$, $V = V(t,x)$ — шукані функції від $n+1$ змінних t, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а нижні індекси t біля U і V означають диференціювання за цією змінною. Це пов'язано перш за все з тим, що на них ґрунтуються математичні моделі для опису різноманітних процесів у фізиці, хімії та біології [1–3]. Велика кількість статей присвячена дослідженню існування, єдиності та асимптотичній поведінці розв'язків відповідних крайових задач, у яких накладаються ті чи інші обмеження на функції F і G та розмірність простору n

(див. [3, 4] та цитовану там літературу). Порівняно недавно розпочалися спроби опису алгебр Лі, відносно яких системи вигляду (1) є інваріантними [5, 6]. У роботах [7, 8] здійснено *вичерпний* опис всіх можливих алгебр інваріантності еволюційних систем вигляду (1) в залежності від вигляду пари функцій (F, G). Проте при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ параболічна система (1) вироджується у еліптичну, а це означає, що її симетрійні властивості (структура алгебр інваріантності) суттєво змінюються. Зокрема, виявляється, що випадок $n = 2$ є особливим порівняно з іншими. Отже, у цій роботі розглядатимемо систему еліптичних рівнянь

$$\Delta u = F(u, v), \qquad \Delta v = G(u, v), \tag{2}$$

де $u = u(x)$ та $v = v(x)$ — шукані функції від двох змінних $x = (x_1, x_2)$.

Необхідно дати коротке обґрунтування важливості розгляду системи (2) щодо можливих застосувань. Скажімо, (1+2)-вимірними системами вигляду (1) (при відповідному виборі пари функцій (F, G)) моделюють процеси формування забарвлення хутра у ссавців та крил у комах [3]. Оскільки ці процеси врешті-решт стабілізуються, то остаточна (тобто при $t \to \infty$) просторова структура забарвлення задається функціями, які задовольняють відповідні двовимірні системи вигляду (2). Аналогічна картина спостерігається у випадку моделювання конкуренції (співіснування) тварин чи рослин на певній території. Очевидно, що опис структури розв'язків за допомогою анзаців і сама побудова точних розв'язків для двовимірних рівнянь є суттєво простішою задачою, ніж для тривимірних.

Окрім того, деякі параболічні системи вигляду (1) за допомогою анзаців

$$U(t, x) = \phi_1(t) u(x), \qquad V(t, x) = \phi_2(t) v(x), \tag{3}$$

де ϕ_1, ϕ_2 — відомі функції, вдається звести до відповідних еліптичних систем вигляду (2). Скажімо, системи, інваріантні відносно алгебри Ґалілея $AG(1.n)$ [5, 6], містять нелінійності

$$F = Uf(\omega), \qquad G = Vg(\omega), \qquad \omega = U^{\lambda_2} V^{-\lambda_1},$$

де f, g — довільні диференційовані функції змінної ω, ліївським анзацом (3) при $\phi_k(t) = \exp(\alpha\lambda_k t)$, $k = 1, 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ зводяться до еліптичних систем (2) при

$$F = uf(\omega) - \alpha\lambda_1 u, \qquad G = ug(\omega) - \alpha\lambda_2 v, \qquad \omega = u^{\lambda_2} v^{-\lambda_1}.$$

Низку інших пар функцій $(\phi_1(t), \phi_2(t))$ і відповідних нелінійностей F і G, які зводять (1) до (2) за допомогою анзацу (3), можна побудувати на підставі вислідів роботи [7]. Отже, важливість *вичерпного* опису всіх можливих алгебр інваріантності систем вигляду (2) в залежності від вигляду пар функцій (F, G) не повинна викликати сумнівів.

2. Визначальні рівняння та перетворення еквівалентності. Відразу наголосимо, що хоч метод Лі детально розроблений [9–11], проте добре відомо, що задача *повного (вичерпного) опису* всеможливих симетрій Лі для рівнянь, які містять *довільні функції*, є дуже складною. Якщо ж розглядуване диференціальне рівняння (система рівнянь) містить довільну функцію від декількох аргументів, то донедавна вважалося, що ця задача практично нерозв'язна. Проте відразу після розв'язання цієї задачі для системи рівнянь реакції-дифузії (1) вдалося зробити це і для системи (2), застосовуючи дещо інший підхід до класифікації.

Отже, відповідно до класичної схеми Лі [9–11] розгляньмо інфінітезимальний оператор перетворень інваріантності

$$Q = \xi^1(x,u,v)\partial_1 + \xi^2(x,u,v)\partial_2 + \eta^1(x,u,v)\partial_u + \eta^2(x,u,v)\partial_v,$$

коефіцієнти-функції якого ξ^1, ξ^2, η^1, η^2 повинні бути знайдені з так званих визначальних рівнянь, які в нашому випадку породжує система (2). Оскільки на теперішній час процедура отримання визначальних рівнянь практично для будь-яких реальних математичних моделей не викликає труднощів, то ми їх відразу подаємо:

$$\begin{aligned}
&\xi^i_u = \xi^i_v = 0, \qquad \xi^1_1 = \xi^2_2, \qquad \xi^1_2 + \xi^2_1 = 0,\\
&\eta^i_{uu} = \eta^i_{uv} = \eta^i_{vv} = 0, \qquad \eta^i_{ju} = \eta^i_{jv} = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\eta^1 F_u + \eta^2 F_v = \eta^1_u F + \eta^1_v G - 2\xi^1_1 F + \Delta\eta^1,\\
&\eta^1 G_u + \eta^2 G_v = \eta^2_u F + \eta^2_v G - 2\xi^1_1 G + \Delta\eta^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Тут і нижче індекси i та j приймають значення 1, 2, а нижні індекси означають диференціювання за змінними x_1, x_2, u, v.

З рівнянь (4) випливає, що

$$\begin{aligned}
&\xi^1 = \xi^1(x), \qquad \eta^1 = h_{11}u + h_{12}v + \eta^{10}(x),\\
&\xi^2 = \xi^2(x), \qquad \eta^2 = h_{21}u + h_{22}v + \eta^{20}(x),
\end{aligned} \tag{6}$$

де $h_{ij} = \mathrm{const}$. Підставляючи вирази (6) для коефіцієнтів інфінітезимального оператора Q в рівняння (5), врешті-решт отримуємо

$$\begin{aligned}
&\left(h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \eta^{10}(x)\right) F_u + \left(h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \eta^{20}(x)\right) F_v \\
&\qquad = h_{11}F + h_{12}G - 2\xi^1_1 F + \Delta\eta^{10}, \\
&\left(h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \eta^{10}(x)\right) G_u + \left(h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \eta^{20}(x)\right) G_v \\
&\qquad = h_{21}F + h_{22}G - 2\xi^1_1 G + \Delta\eta^{20},
\end{aligned} \tag{7}$$

Рівняння (7) є основою для пошуку всеможливих симетрій Лі, які можуть допускати системи вигляду (2). Методика цього пошуку детально буде описана в одній з наших наступних статей. Тут лише зауважимо три важливі моменти, які суттєво використовувалися.

По-перше, неважко помітити, що *будь-яка* система вигляду (2) інваріантна відносно тривимірної алгебри Евкліда $AE(2)$ з базисними операторами

$$P_1 = \partial_1, \quad P_2 = \partial_2, \quad J = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 \tag{8}$$

Більше того, легко довести таке: якщо система вигляду (2) допускає хоч один додатковий оператор інваріантності, то це автоматично накладає обмеження на вигляд функцій F і G. Нижче алгебру $AE(2)$ називатимемо тривіальною алгеброю симетрій Лі системи (2) і вона є ядром всеможливих алгебр Лі, які допускає ця система при фіксованих (конкретних) функціях F і G.

По-друге, необхідно було знайти групу еквівалентності в класі систем (2), тобто групу таких локальних перетворень, при яких вигляд системи не змінюється, попри те, що вигляд власне функцій F і G може змінюватися. З цією метою ми застосували подібний до викладеного в [12] підхід і розглянули однопараметричні групи локальних симетрій системи

$$\Delta u = F, \qquad \Delta v = G, \qquad F_i = G_i = 0, \tag{9}$$

для яких інфінітезимальний оператор має вигляд

$$\begin{aligned}
\widehat{Q} &= \hat{\xi}^1(x,u,v)\partial_1 + \hat{\xi}^2(x,u,v)\partial_2 + \hat{\eta}^1(x,u,v)\partial_u + \hat{\eta}^2(x,u,v)\partial_v \\
&\quad + \hat{\chi}^1(x,u,v,F,G)\partial_F + \hat{\chi}^2(x,u,v,F,G)\partial_G.
\end{aligned}$$

Пошук коефіцієнтів оператора $\widehat{Q}$ відбувається за класичним критерієм інваріантності і легко доводиться до кінця, оскільки тут F і G

розглядаються як залежні змінні. У підсумку отримуємо, що алгебра Лі групи еквівалентності G^{equiv} породжується такими базисними операторами:

$$\begin{gathered}\partial_1,\quad \partial_2,\quad J,\quad x_1\partial_1+x_2\partial_2-2F\partial_F-2G\partial_G,\quad \partial_u,\quad \partial_v,\\ u\partial_u+F\partial_F,\quad v\partial_u+G\partial_F,\quad u\partial_v+F\partial_G,\quad v\partial_v+G\partial_G.\end{gathered}\tag{10}$$

Отже, перетворення еквівалентності з G^{equiv}, які нетривіальним чином діють на F і G, мають вигляд

$$\begin{gathered}\tilde x=\delta x,\quad \tilde u=a_{11}u+a_{12}v+b_1,\quad \tilde v=a_{21}u+a_{22}v+b_2,\\ \tilde F=\delta^{-2}(a_{11}F+a_{12}G),\quad \tilde G=\delta^{-2}(a_{21}F+a_{22}G),\end{gathered}\tag{11}$$

де $\delta, a_{ij}, b_i=\mathrm{const}$, $\delta\neq 0$, $\det(a_{ij})_{i,j=1}^2\neq 0$.

По-третє, для деяких класів систем вигляду (2) (тобто систем з більш конкретизованими функціями F і G) знайдено додаткові перетворення еквівалентності, що не містяться в G^{equiv}. Це дозволило суттєво спростити пошук і зменшити кількість нееквівалентних систем вигляду (2), які допускають розширення тривіальної алгебри $AE(2)$.

3. Основний результат класифікації. Нехай $A^{\max}{=}A^{\max}(F,G)$ — максимальна (в сенсі Лі) алгебра інваріантності (МАІ) системи (2) з конкретно заданими функціями F і G. Тоді існує *51 нееквівалентна система* вигляду (2), кожна з яких інваріантна відносно $A^{\max}\neq AE(2)$. Всі ці випадки природним чином розбиваються на чотири сім'ї:

1. 6 випадків *лінійних* систем вигляду (2), які наведено лише для повноти результату;
2. 5 випадків *нелінійних* систем вигляду (2), інваріантних відносно нескінченновимірних алгебр Лі, що містять підалгебри, ізоморфні алгебрі інваріантності відомого рівняння Ліувіля $\Delta u=\lambda\exp u$;
3. 26 випадків *нелінійних* систем вигляду (2), МАІ яких нескінченновимірні і містять оператори $R(\chi)=\chi(x)\partial_u$, де функція $\chi(x)$ — довільний розв'язок рівняння Пуасона $\Delta\chi=\beta\chi$;
4. 14 випадків *нелінійних* систем вигляду (2) із скінченновимірними МАІ, що є розширеннями тривіальної алгебри $AE(2)$ шляхом додавання одного, двох або трьох додаткових операторів інваріантності.

Сім'я 1. $\Delta u = a_{11}u + a_{12}v + b_1$, $\Delta v = a_{21}u + a_{22}v + b_2$.

Тут a_{ij}, b_i, $i, j = 1, 2$ — довільні дійсні сталі. Оскільки система лінійна, то вона інваріантна відносно операторів

$$\widehat{R}(\chi^1, \chi^2) = \chi^1(x_1, x_2)\partial_{x_1} + \chi^2(x_1, x_2)\partial_{x_2}, \quad I = u\partial_u + v\partial_v,$$

де $\chi = (\chi^1, \chi^2)$ — довільний розв'язок цієї ж системи. В залежності від жорданової форми матриці $(a_{ij})_{i,j=1}^2$, отримуємо шість нееквівалентних класів таких систем, які наводяться нижче разом з базисними операторами з розширень відповідних МАІ.

1.1. $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$:
$\widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, $\xi^1(x_1, x_2)\partial_{x_1} + \xi^2(x_1, x_2)\partial_{x_2}$, $u\partial_u$, $v\partial_v$, $v\partial_u$, $u\partial_v$;

1.2. $\Delta u = v$, $\Delta v = 0$: $\widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, I, $x\partial_x - 2v\partial_v$, $v\partial_u$;

1.3. $\Delta u = \varepsilon u$, $\Delta v = \varepsilon v$: $\widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, $u\partial_u$, $v\partial_v$, $v\partial_u$, $u\partial_v$;

1.4. $\Delta u = \varepsilon u$, $\Delta v = \gamma v$, $\gamma \neq \varepsilon$: $\widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, $u\partial_u$, $v\partial_v$;

1.5. $\Delta u = \gamma u + v$, $\Delta v = \gamma v$, $\gamma \neq 0$: $\widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, I, $v\partial_u$;

1.6. $\Delta u = \gamma u - v$, $\Delta v = u + \gamma v$: $\widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, I, $u\partial_v - v\partial_u$,

де $\varepsilon = \pm 1$, а у випадку 1.1 (ξ^1, ξ^2) — довільний розв'язок системи Коші-Рімана ($\xi^1_1 = \xi^2_2$, $\xi^1_2 = -\xi^2_1$).

Сім'я 2. $\Delta u = f(v)e^u$, $\Delta v = g(v)e^u$.

Тут f і g — довільні дійсні диференційовні функції, не рівні одночасно нулю, тобто $(f, g) \not\equiv (0, 0)$. Системи такого вигляду завжди інваріантні відносно оператора, характерного для рівняння Ліувіля, а саме:

$$L(\xi) = \xi^1(x_1, x_2)\partial_{x_1} + \xi^2(x_1, x_2)\partial_{x_2} - 2\xi^1_1(x_1, x_2)\partial_u,$$

де $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ — довільний розв'язок системи Коші–Рімана $\xi^1_1 = \xi^2_2$, $\xi^1_2 = -\xi^2_1$.

В залежності від вигляду функцій f і g, отримуємо п'ять нееквівалентних класів систем, які наводяться нижче разом з базисними операторами відповідних МАІ.

2.1. $\Delta u = 0$, $\Delta v = e^u$: $L(\xi)$, $R'(\chi)$, $v\partial_v + \partial_u$, $u\partial_v$;

2.2. $\Delta u = \varepsilon e^u$, $\Delta v = 0$: $L(\xi)$, $R'(\chi)$, $v\partial_v$;

2.3. $\Delta u = C_1 e^u v^\mu$, $\Delta v = C_2 e^u v^{\mu+1}$, $(\mu C_1, C_2) \neq (0,0)$:
$L(\xi)$, $v\partial_v - \mu\partial_u$;

2.4. $\Delta u = (C_1 - 2\varepsilon C_2 v)e^{u+\varepsilon v^2}$, $\Delta v = C_2 e^{u+\varepsilon v^2}$, $(C_1, C_2) \neq (0,0)$:
$L(\xi)$, $\partial_v - 2\varepsilon v\partial_u$;

2.5. $\Delta u = f(v)e^u$, $\Delta v = g(v)e^u$ у випадках, що не зводяться до перерахованих вище: $L(\xi)$.

Тут $\varepsilon = \pm 1$, $R'(\chi) = \chi(x)\partial_v$, де $\Delta\chi = 0$.

Сім'я 3. $\Delta u = f(v) + \beta u$, $\Delta v = g(v)$.

Тут f і g — довільно задані дійсні диференційовні функції, для яких $(f'', g'') \neq (0,0)$ і система перетвореннями еквівалентності не зводиться до випадків 2.1 або 2.2 (останнє, зокрема означає, що вектор-функції (f, g) і (f', g') — лінійно незалежні). Системи такого вигляду завжди допускають інфінітезімальний оператор

$$R(\chi) = \chi(x_1, x_2)\partial_u,$$

де $\chi = \chi(x)$ — довільний розв'язок рівняння Пуасона $\Delta\chi = \beta\chi$. В залежності від вигляду функцій f і g, отримуємо 26 нееквівалентних класів систем, які наводяться нижче разом з базисними операторами з розширень відповідних МАІ (скрізь нижче базові оператори тривіальної алгебри $AE(2)$ нами опущені; також введено позначення $x\partial_x \equiv x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}$).

3.1. $\Delta u = v^\mu$, $\Delta v = 0$, $\mu \notin \{0,1\}$:
$R(\chi)$, $2u\partial_u + x\partial_x$, $v\partial_u$, $2v\partial_v - \mu x\partial_x$;

3.2. $\Delta u = \ln v$, $\Delta v = 0$: $R(\chi)$, $2u\partial_u + x\partial_x$, $v\partial_u$, $2v\partial_v + \frac{|x|^2}{2}\partial_u$;

3.3. $\Delta u = f(v)$, $\Delta v = 0$: $R(\chi)$, $2u\partial_u + x\partial_x$, $v\partial_u$;

3.4. $\Delta u = v^2 + \varepsilon u$, $\Delta v = 0$: $R(\chi)$, $2u\partial_u + v\partial_v$, $2v\partial_u - \varepsilon\partial_v$;

3.5. $\Delta u = v^\mu + \varepsilon u$, $\Delta v = \varepsilon v$, $\mu \notin \{0,1\}$: $R(\chi)$, $\mu u\partial_u + v\partial_v$, $v\partial_u$;

3.6. $\Delta u = \ln v + \varepsilon u$, $\Delta v = \varepsilon v$: $R(\chi)$, $\varepsilon v\partial_v - \partial_u$, $v\partial_u$;

3.7. $\Delta u = v^\mu,\ \Delta v = \varepsilon,\ \mu \notin \{0,1\}$:
$R(\chi),\ 2(1+\mu)u\partial_u + 2v\partial_v + x\partial_x,\ 2v\partial_u - \varepsilon\frac{|x|^2}{2}\partial_u;$

3.8. $\Delta u = \ln v,\ \Delta v = \varepsilon$:
$R(\chi),\ 2u\partial_u + 2v\partial_v + x\partial_x - \frac{|x|^2}{2}\partial_u,\ 2v\partial_u - \varepsilon\frac{|x|^2}{2}\partial_u;$

3.9. $\Delta u = e^v,\ \Delta v = \varepsilon$: $R(\chi),\ u\partial_u + \partial_v,\ (2v - \varepsilon\frac{|x|^2}{2})\partial_u;$

3.10. $\Delta u = 0,\ \Delta v = \varepsilon v^\mu,\ \mu \notin \{0,1\}$: $R(\chi),\ u\partial_u,\ 2v\partial_v + (1-\mu)x\partial_x;$

3.11. $\Delta u = v\ln v + \gamma_1 u,\ \Delta v = \gamma_2 v,\ \gamma_1 \neq \gamma_2$:
$R(\chi),\ u\partial_u + v\partial_v + (\gamma_2 - \gamma_1)^{-1}v\partial_u;$

3.12. $\Delta u = v^\mu \ln v,\ \Delta v = \varepsilon v^\mu,\ \mu \notin \{0,1\}$:
$R(\chi),\ 2u\partial_u + 2v\partial_v + 2\varepsilon^{-1}v\partial_u + (1-\mu)x\partial_x;$

3.13. $\Delta u = \ln v,\ \Delta v = \varepsilon v^\mu,\ \mu \neq 0$:
$R(\chi),\ 2v\partial_v + 2(1-\mu)v\partial_u + \frac{|x|^2}{2}\partial_u + (1-\mu)x\partial_x;$

3.14. $\Delta u = \ln v + \varepsilon u,\ \Delta v = \gamma v,\ \gamma \neq \varepsilon$: $R(\chi),\ \varepsilon v\partial_v - \partial_u;$

3.15. $\Delta u = v^\mu + \gamma_1 u,\ \Delta v = \gamma_2 v,\ \gamma_1 \neq \gamma_2,\ \mu \neq 0$: $R(\chi),\ \mu u\partial_u + v\partial_v;$

3.16. $\Delta u = f(v) + \varepsilon u,\ \Delta v = \varepsilon v$: $R(\chi),\ v\partial_u;$

3.17. $\Delta u = f(v),\ \Delta v = 1$: $R(\chi),\ 2v\partial_u - \frac{|x|^2}{2}\partial_u;$

3.18. $\Delta u = v^2 + \varepsilon u,\ \Delta v = 1$: $R(\chi),\ 2v\partial_u - \varepsilon\partial_v + 2\varepsilon^{-1}\partial_u;$

3.19. $\Delta u = ve^v,\ \Delta v = \varepsilon e^v$: $R(\chi),\ 2v\partial_u + 2\varepsilon\partial_v - \varepsilon x\partial_x;$

3.20. $\Delta u = \varepsilon u,\ \Delta v = f(v),\ f'' \neq 0$: $R(\chi),\ u\partial_u;$

3.21. $\Delta u = 0,\ \Delta v = f(v)$, функції vf', f', f — лінійно незалежні:
$R(\chi),\ u\partial_u;$

3.22. $\Delta u = e^{\mu v},\ \Delta v = \varepsilon e^v,\ \mu \neq 0$: $R(\chi),\ 2(\mu-1)u\partial_u + 2\partial_v - x\partial_x;$

3.23. $\Delta u = e^v + \varepsilon u,\ \Delta v = \gamma$: $R(\chi),\ u\partial_u + \partial_v;$

3.24. $\Delta u = v,\ \Delta v = \varepsilon e^v$: $R(\chi),\ 2u\partial_u - 2\partial_v + x\partial_x - \frac{|x|^2}{2}\partial_u;$

3.25. $\Delta u = v^\mu,\ \Delta v = \varepsilon v^\nu,\ \mu\nu \neq 0,\ \mu \neq \nu$:
$R(\chi),\ 2(1+\mu-\nu)u\partial_u + 2v\partial_v + (1-\nu)x\partial_x;$

3.26. $\Delta u = f(v) + \beta u$, $\Delta v = g(v)$, якщо вибрані функції f і g не зводять систему до однієї з перерахованих вище: $R(\chi)$,

де $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$. У випадках 3.3, 3.15, 3.16 функція $f = f(v)$ така, що чотири функції vf', f', f, 1 — лінійно незалежні.

Сім'я 4 репрезентує системи вигляду (2) зі скінченновимірними MAI розмірності 4, 5 та 6 ($\delta \in \{0; 1\}$).

4.1. $\Delta u = \varepsilon v^\mu u$, $\Delta v = \varepsilon v^{\mu+1}$, $\mu \neq 0$: $2v\partial_v - \mu x\partial_x$, $u\partial_u$, $v\partial_u$;

4.2. $\Delta u = f(v)u$, $\Delta v = f(v)v$, $vf' + C$, f', f — лінійно незалежні при довільно вибраній $C = \mathrm{const}$: $u\partial_u$, $v\partial_u$;

4.3. $\Delta u = \varepsilon v^\mu (u + \ln v)$, $\Delta v = \varepsilon v^{\mu+1}$, $\mu \neq 0$:
$4u\partial_u + 2v\partial_v - (2\mu - 1)x\partial_x$, $v\partial_u + \partial_v$, ;

4.4. $\Delta u = \varepsilon v^\mu u + v^{\nu+1}$, $\Delta v = \varepsilon v^{\nu+1}$, $\mu \notin \{\nu, \nu \pm 1, 0\}$:
$2(1 + \nu - \mu)u\partial_u + 2v\partial_v - \mu x\partial_x$, $v\partial_u$;

4.5. $\Delta u = C_2\omega^\mu v + C_1\omega^{\mu+1/2}$, $\Delta v = C_2\omega^\mu$, $\omega = v^2/2 - u$,
$(C_1(2\mu + 1), C_2\mu) \neq (0, 0)$, $C_1^2 + C_2^2 = 1$:
$4u\partial_u + 2v\partial_v - (2\mu - 1)x\partial_x$, $v\partial_u + \partial_v$;

4.6. $\Delta u = v^\mu e^{\delta u/v}(C_2 u + C_1 v)$, $\Delta v = v^\mu e^{\delta u/v} C_2 v$, $C_1^2 + C_2^2 = 1$,
$(\delta C_1, \delta C_2, \mu C_1 C_2) \neq (0, 0, 0)$: $2u\partial_u + 2v\partial_v - \mu x\partial_x$, $2v\partial_u - \delta x\partial_x$;

4.7. $\Delta u = u^\mu v^\nu C_1 u$, $\Delta v = u^\mu v^\nu C_2 v$, $(C_1(\mu + 1), C_2\mu) \neq (0, 0)$,
$(C_1\nu, C_2(\nu + 1)) \neq (0, 0)$, $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$, $(\mu\nu, C_1 - C_2) \neq (0, 0)$,
$C_1^2 + C_2^2 = 1$: $2u\partial_u - \mu x\partial_x$, $2v\partial_v - \nu x\partial_x$;

4.8. $\Delta u = (u^2 + v^2)^{\mu/2} e^{\nu \arctan v/u}(C_1 u - C_2 v)$, $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$,
$\Delta v = (u^2 + v^2)^{\mu/2} e^{\nu \arctan v/u}(C_1 v + C_2 u)$, $C_1^2 + C_2^2 = 1$:
$2u\partial_u + 2v\partial_v - \mu x\partial_x$, $u\partial_v - v\partial_u - \nu x\partial_x$;

4.9. $\Delta u = e^{\delta u/v}(g(v)u + f(v))$, $\Delta v = e^{\delta u/v} g(v)v$: $2v\partial_u - \delta x\partial_x$;

4.10. $\Delta u = e^{\delta u}(g(\omega)v + f(\omega))$, $\Delta v = e^{\delta u} g(\omega)$, $\omega = v^2/2 - u$:
$2v\partial_u + 2\partial_v - \delta x\partial_x$;

4.11. $\Delta u = v^{\mu+1}(\gamma g(\omega)\ln v + f(\omega))$, $\Delta v = v^{\mu+1} g(\omega)$, $\omega = u/v - \gamma \ln v$,
$\gamma \neq 0$: $2u\partial_u + 2v\partial_u + \gamma v\partial_u - \mu x\partial_x$;

4.12. $\Delta u = u^\mu f(\omega)u$, $\Delta v = u^\mu g(\omega)$, $\omega = v - \ln u$: $2u\partial_u + 2\partial_v - \mu x\partial_x$;

4.13. $\Delta u = u^{\mu} f(\omega) u,\ \Delta v = u^{\mu} g(\omega) v,\ \omega = u^{-\nu} v$: $\quad 2u\partial_u + 2\nu\partial_v - \mu x\partial_x$;

4.14. $\Delta u = e^{\nu \arctan v/u}(f(\omega)u - g(\omega)v)$,
$\Delta v = e^{\nu \arctan v/u}(f(\omega)v + g(\omega)u),\ \omega = \ln(u^2+v^2) - 2\mu \arctan v/u$:
$u\partial_v - v\partial_u + \mu(u\partial_u + v\partial_v) - \nu x\partial_x$.

[1] Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering. — New York: Academic Press, 1972.

[2] Aris R. The Mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts, **I**, **II**. — Oxford: Clarendon Press, 1975.

[3] Murray J.D. Mathematical biology. — Berlin: Springer, 1989. — 750 p.

[4] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

[5] Чернига Р.М. О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа // Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики. — Киев: Ин-т математики, 1988. — С. 49–53.

[6] Фущич В.І., Черніга Р.М. Ґалілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь типу Гамільтона–Якобі та реакції-дифузії // Доп. АН України. — 1994. — № 3. — С. 31–38.

[7] Cherniha R., King J. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — **33**. — P. 267–282; 7839–7841.

[8] Cherniha R. Lie symmetries of nonlinear two-dimensional reaction-diffusion systems // Rept. Math. Phys. — 2000. — **46**. — P. 63–76.

[9] Овсянников Л.В. Груповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[10] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. — Berlin: Springer, 1986. — 420 p.

[11] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов М.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с.

[12] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1989. — **34**. — С. 3–83.