Національна Академія наук України
Міністерство освіти і науки України
Інститут математики НАН України
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Севастопольський інститут банківської справи
Таврійський національний університет ім. В. І. Вернадського
Міжнародний математичний центр
ім. Ю. О. Митропольського НАН України
Всеукраїнська благодійна організація
«Фонд сприяння розвитку математичної науки»

Міжнародна математична конференція

«Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування»

з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка

23 – 30 червня 2013 р.

Севастополь, УКРАЇНА

Тези доповідей

Київ — 2013

National Academy of Sciences of Ukraine
Ministry of Education and Science of Ukraine
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
Taras Shevchenko Kyiv National University
Sevastopol Institute of Banking
V. I. Vernadsky Taurian National University
Yu. A. Mitropolskiy International Mathematical Center of NAS of Ukraine
All-Ukrainian charity organization «Foundation for Support of the Development of Mathematical Sciences»

International mathematical conference

«Bogolyubov readings DIF-2013. Differential equations, theory of functions and their applications»

on the occasion of the 75th anniversary of academician A. M. Samoilenko

June 23 – 30, 2013

Sevastopol, UKRAINE

ABSTRACTS

Kyiv — 2013

Міжнародна математична конференція «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23 – 30 червня 2013 р., Севастополь, УКРАЇНА: Тези доповідей. — Київ: Інституту математики НАН України, 2013. — 343 с.

Почесні голови

професор, академік РАПН Єпіфанов А. О. (Суми, Україна)

академік НАНУ Самойленко А. М. (Київ, Україна)

Співголови наукового та організаційного комітету

академік НАНУ Перестюк М. О. (Київ, Україна)

член-кореспондент НАНУ Бойчук О. А. (Київ, Україна)

професор Осипенко Г. С. (Севастополь, Україна)

Науковий та організаційний комітет

Абдуллаєв Ф. Г. (Туреччина)
Агарвал Р. П. (США)
Анашкін О. В. (Україна)
Бєлан Є. П. (Україна)
Боголюбов М. М. (мол.) (Росія)
Буцан Г. П. (Україна)
Гайшун І. В. (Білорусь)
Главан В. О. (Молдова)
Гребеніков Є. О. (Росія)
Діблік Й. (Чехія)
Дороговцев А. А. (Україна)
Євтухов В. М. (Україна)
Загородній А. Г. (Україна)
Ілолов М. І. (Таджикистан)
Каранджулов Л. І. (Болгарія)
Кенжебаєв К. К. (Казахстан)
Кігурадзе І. Т. (Грузія)
Козлов В. В. (Росія)
Копотун К. А. (Канада)
Кулик В. Л. (Польща)
Леонов Г. О. (Росія)
Луковський І. О. (Україна)
Макаров В. Л. (Україна)
Нестеренко Б. Б. (Україна)
Огієнко В. І. (Україна)
Палмер К. Дж. (Тайвань)
Парасюк І. О. (Україна)
Петришин Р. І. (Україна)
Прикарпатський А. К. (Україна)
Рекке Л. (Німеччина)
Розов М. Х. (Росія)
Романюк А. С. (Україна)
Ронто М. Й. (Угорщина)
Селл Дж. Р. (США)
Станжицький О. М. (Україна)
Тврди М. (Чехія)
Теплінський Ю. В. (Україна)
Ткаченко В. І. (Україна)
Трофімчук С. І. (Чилі)
Шевчук І. О. (Україна)
Янчук С. В. (Німеччина)

Локальний оргкомітет

Анашкін О. В.
Бєлан Є. П.
Браточкіна А.
Буцан Г. П.
Дворник А. В.
Руденко О. В.
Тимоха О. М.
Ферук В. А.
Янченко С. Я.

International mathematical conference «Bogolyubov readings DIF-2013. Differential equations, theory of functions and their applications» on the occasion of the 75th anniversary of academician A. M. Samoilenko, June 23 – 30, 2013, Sevastopol, UKRAINE: Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2013. — 343 p.

Honorary chairmen

Professor, Academician of RAPS A. A. Epifanov (Sumy, Ukraine)

Academician of NASU A. M. Samoilenko (Kyiv, Ukraine)

Co-chairmen of the scientific and organizing committee

Academician of NASU M. O. Perestyuk (Kyiv, Ukraine))

Corresponding Member of NASU A. A. Boichuk (Kyiv, Ukraine)

Professor G. S. Osipenko (Sevastopol, Ukraine)

Scientific and organizing committee

F. G. Abdullaev (Turkey)
R. P. Agarwal (USA)
O. V. Anashkin (Ukraine)
Ye. P. Belan (Ukraine)
N. N. Bogolyubov (Jr.) (Russia)
G. P. Butsan (Ukraine)
J. Dibli’k (Czech Republic)
A. A. Dorogovtsev (Ukraine)
V. M. Evtukhov (Ukraine)
I. V. Gaishun (Belarus)
V. A. Glăvan (Moldova)
E. A. Grebenikov (Russia)
M. I. Ilolov (Tajikistan)
L. I. Karandzhulov (Bulgaria)
K. K. Kenzhebaev (Kazakhstan)
I. T. Kiguradze (Georgia)
K. A.Kopotun (Canada)
V. V. Kozlov (Russia)
V. L. Kulyk (Poland)
G. A. Leonov (Russia)
I. O. Lukovskiy (Ukraine)
V. L. Makarov (Ukraine)
B. B. Nesterenko (Ukraine)
V. I. Ogiyenko (Ukraine)
K. J. Palmer (Taiwan)
I. O. Parasyuk (Ukraine)
R. I. Petryshyn (Ukraine)
A. K. Prykarpatsky (Ukraine)
L. Recke (Germany)
A. S. Romanyuk (Ukraine)
M. I. Ronto’ (Hungary)
N. Kh. Rozov (Russia)
G. R. Sell (USA)
I. O. Shevchuk (Ukraine)
O. M. Stanzhitsky (Ukraine)
Yu. V. Teplinsky (Ukraine)
V. I. Tkachenko (Ukraine)
S. I. Trofimchuk (Chile)
M. Tvrdy’ (Czech Republic)
S. V. Yanchuk (Germany)
A. H. Zahorodniy (Ukraine))

Local organizing committee

O. V. Anashkin
Ye. P. Belan
A. Bratochkina
G. P. Butsan
A. V. Dvornyk
V. A. Feruk
A. V. Rudenko
A. N. Timokha
S. Ya. Yanchenko

Зміст / Contents

Анатолій Михайлович Самойленко
з нагоди 75-ліття з дня народження

Анатолій Михайлович Самойленко народився 2 січня 1938 року в с. Потіївка Житомирської області. У 1960 р. закінчив із відзнакою механіко-математичний факультет Київського державного університету імені Т. Г. Шевченка та вступив до аспірантури Інституту математики АН УРСР. У 1963 р. під керівництвом академіка Ю. О. Митропольського захистив кандидатську дисертацію "Застосування асимптотичних методів для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь із нерегулярною правою частиною", а вже в 1967 р. — докторську дисертацію "Деякі питання періодичних та квазіперіодичних систем". Опонентами за дисертацією були всесвітньо відомі вчені В. І. Арнольд та Д. В. Аносов.

З 1963 до 1974 р. А. М. Самойленко працював у Інституті математики, з 1965 р. почав викладати в Київському університеті. У 1974 р. отримав звання професора та очолив кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь Київського університету. У 1978 році був обраний членом-кореспондентом АН УРСР.

У 1987 р. А. М. Самойленко повернувся до Інституту математики, де очолив відділ звичайних диференціальних рівнянь. У 1988 р. колектив інституту обрав його директором, і цю посаду Анатолій Михайлович займає по цей час. У 1995 р. він був обраний академіком НАН України, а з 2006 року є академіком-секретарем Відділення математики НАН України.

Наукові інтереси А. М. Самойленка охоплюють широке коло актуальних проблем якісної та аналітичної теорії диференціальних рівнянь, нелінійної механіки, а також суміжних питань теорії функцій та інших галузей математики.

Значна частина отриманих Анатолієм Михайловичем та розвинених його учнями наукових результатів належить до тематики Київської наукової школи Крилова – Боголюбова. Мабуть, найвідомішими з них у світовій науці є результати з теорії диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Ще в 1937 р. М. М. Крилов та М. М. Боголюбов показали, що асимптотичні методи нелінійної механіки застосовні до рівнянь із імпульсами. Систематичне дослідження таких задач безпосередньо пов'язана з ім'ям Анатолія Михайловича. Першою його науковою публікацією у 1961 р. була стаття саме з цієї тематики. У 1967 р. спільно з А. Д. Мишкісом було сформульовано загальні теореми про існування розв'язків та їх продовжуваність, а також про єдиність розв'язку задачі Коші для систем із імпульсами. У 1987 р. монографія А. М. Самойленка та М. О. Перестюка стала першою у світовій літературі, в якій представлено фундаментальні результати з теорії імпульсних систем.

Продовжуючи дослідження М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, А. М. Колмогорова, В. І. Арнольда, Ю. Мозера, Ю. О. Митропольського, Анатолій Михайлович запропонував модернізацію асимптотичного методу послідовних замін змінних, який у 1969 р. було названо “методом прискореної збіжності”. Разом із Ю. О. Митропольським у 1979 р. було узагальнено асимптотичний метод усереднення та знайдено достатні умови для розщеплення асимптотичних розв’язків. Теорія знайшла продовження, зокрема, у спільних роботах із Р. І. Петришиним.

Поняття функції Гріна задачі про інваріантний тор лінійного розширення динамічної системи на торі, введене А. М. Самойленком у 1969 р. на 5-й міжнародній конференції з нелінійних коливань у Києві, дало новий імпульс розвитку різноманітних аспектів теорії збурень та стійкості тороїдальних многовидів. У математичній літературі це поняття відоме як “функція Гріна – Самойленка” (ця назва вперше з’явилася у статті молдавського математика І. У. Бронштейна).

Роботи Анатолія Михайловича з теорії багаточастотних коливань зробили вагомий внесок у цю теорію й визначають нові напрямки їхнього вивчення та розвитку. У спільних роботах із В. Л. Куликом розроблено теорію знакозмінних функцій Ляпунова для дослідження обмежених на всій осі розв’язків лінійних неавтономних диференціальних систем і лінійних розширень динамічних систем на торі. Результати з даної теорії було узагальнено разом із Ю. В. Теплінським на випадок зліченних систем, разом із О. М. Станжицьким — для стохастичних диференціальних рівнянь.

У 1965–1966 рр. було запропоновано оригінальний метод для знаходження періодичних розв’язків звичайних диференціальних систем, у подальшому названий “чисельно-аналітичним методом Самойленка”. Згодом разом із М. Й. Ронто, В. І. Трофімчуком та їхніми учнями цей метод узагальнено для широкого класу крайових задач.

На основі теорії узагальнених обернених операторів А. М. Самойленко разом із О. А. Бойчуком розвинули теорію фредгольмових крайових задач для диференціальних рівнянь, рівнянь із запізненням, рівнянь із імпульсною дією та сингулярно збурених систем. Цю теорію було розвинуто для відшукання розв’язків, обмежених на всій дійсній осі, для систем диференціальних та різницевих рівнянь за умови дихотомії на півосях для відповідної однорідної системи.

У 1968 році А. М. Самойленко розв’язав поставлену В. І. Арнольдом задачу — зробив суто аналітичний доказ еквівалентності гладкої функції своєму поліному Тейлора в околі критичної точки скінченного типу. 2008 р. результат було суттєво доповнено.

Нещодавно було розглянуто задачі лінійної теорії систем звичайних диференціальних рівнянь, пов’язані з вивченням інваріантних гіперплощин цих систем, поняттям еквівалентності для цих систем та теорією Флоке – Ляпунова для періодичних систем лінійних рівнянь.

Анатолій Михайлович — автор більше 600 наукових праць, серед яких більше 30 монографій та 15 підручників. Більшість його робіт перекладено за кордоном. За даними MathSciNet та Google Scholar Citations його наукові праці цитувалися 866 та 4903 рази відповідно. Він має високий h-index, який дорівнює 27.

Поєднуючи в собі блискучі якості науковця та педагога, Анатолій Михайлович підготував цілу плеяду відомих математиків. Серед його учнів — 33 доктори та 82 кандидати фізико-математичних наук, які успішно працюють у багатьох математичних центрах світу. Слухачами лекцій Анатолія Михайловича стали тисячі студентів Київського університету, а також НТУУ “КПІ”, де він із 1998 до 2011 р. очолював кафедру диференціальних рівнянь. Разом із колегами з Київського університету було підготовлено серію підручників із диференціальних рівнянь, які є популярними в Україні та багатьох інших країнах. Також Анатолій Михайлович провадить активну громадську діяльність, метою якої є допомога молодим українським математикам та обдарованим дітям.

А. М. Самойленко є дійсним членом Національної академії наук України та Європейської академії наук, іноземним членом Академії наук Республіки Таджикистан, членом Українського та Американського математичних товариств. Також він є головним редактором журналів "Український математичний журнал", "Нелінійні коливання" та "Український математичний вісник", членом редакційних колегій журналів "Доповіді Національної академії наук України", "У світі математики", "Nonlinear Mathematical Physics", "Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics" та інших.

А. М. Самойленко нагороджений Орденом Дружби народів (1984), Орденом "За заслуги" III ступеня (2003), Орденом князя Ярослава Мудрого V та IV ступенів (2008, 2013), Почесною Грамотою Президії Верховної Ради України (1987), є лауреатом Державних премій України в галузі науки і техніки (1985, 1996), Державної премії України в галузі освіти (2012), Республіканської молодіжної премії імені М. О. Островського (1968), премій Академії наук України імені М. М. Крилова (1981) та М. М. Боголюбова (1998), премій НАН України імені М. О. Лаврентьєва (2000), М. В. Остроградського (2004) та Ю. О. Митропольського (2010), "Соросівський професор" (1998), Заслужений діяч науки і техніки України (1998).

Анатолію Михайловичу вдалося досягти успіхів та визнання у науковому світі завдяки неординарним здібностям, оригінальному стилю мислення та великим наполегливості і працездатності. Такому продуктивному творчому довголіттю визначного вченого значною мірою сприяло домашнє тепло родини, дорогі йому дружина Липа Григорівна та син Анатолій. Липа Григорівна є вірним другом, опорою та помічницею вже понад 50 років. Вона — кандидат фізико-математичних наук, багато років працювала в Інституті кібернетики НАН України, освічена, привітна, надзвичайно гостинна людина. Син, Анатолій, — високоосвічена молода людина з широкими енциклопедичними знаннями, талановитий науковець, фахівець із генетики. Науковий ступінь доктора філософії отримав у Німеччині у відомому Геттінгенському університеті. Безумовно додають наснаги вченому й його онуки.

Анатолій Михайлович продовжує невтомно працювати на благо математичної науки. Він сповнений нових ідей, сил та наснаги. Від щирого серця бажаємо ювілярові нових досягнень, успіхів у всіх починаннях, творчих злетів, міцного здоров'я та великого сімейного щастя на многая і благая літа.

Anatolii Mykhailovych Samoilenko

To His 75th Birthday

Anatolii Mykhailovych Samoilenko was born on January 2, 1938 in the village of Potiivka (Zhytomyr Region, Ukraine). In 1960, he graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Shevchenko Kyiv State University with honors and entered the post-graduate courses at the Institute of Mathematics of the Ukrainian Academy of Sciences. In 1963, under the guidance of Academician Yu. A. Mitropol'skii, he defended his Candidate–Degree Thesis "Application of Asymptotic Methods to the Investigation of Nonlinear Differential Equations with Irregular Right-Hand Sides". For a fairly short period of four years, he prepared and defended (in 1967) his Doctoral–Degree Thesis "Some Problems of Periodic and Quasi-periodic Systems". V. I. Arnold and D. V. Anosov, world-known experts in this field, were his opponents.

In 1963–1974, A. M. Samoilenko worked at the Kyiv Institute of Mathematics. In 1965, A. M. Samoilenko started his pedagogical career at the Kyiv State University. In 1974, he received the academic title of professor and headed the Chair of Integral and Differential Equations at the Kyiv University.

In 1978, Prof. Samoilenko was elected to become Corresponding Member of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR.

In 1987, he returned to the Institute of Mathematics, where he headed the Department of Ordinary Differential Equations. In 1988, he was elected by the staff of the Institute to become Director of the Institute and occupies this position up to now. In 1995, Prof. Samoilenko was elected to become Full Member of the Ukrainian National Academy of Sciences. Since 2006, he also works as Academician–Secretary of the Department of Mathematics of the Ukrainian National Academy of Sciences.

The scientific interests of A. M. Samoilenko cover a broad range of the actual problems of qualitative and analytic theory of differential equations, nonlinear mechanics, and related topics of the theory of functions and other branches of mathematics.

A significant part of the results obtained by Academician Samoilenko and developed by his disciples belongs to the fundamental directions of investigations of the Krylov–Bogolyubov Kyiv Scientific School. Among the most important directions of these investigations, we can mention the results in the theory of differential equations with impulsive action. As early as in 1937, N. M. Krylov and N. N. Bogolyubov showed that the asymptotic methods of nonlinear mechanics are applicable to equations with pulses. The systematic investigation of these equations is directly connected with the name of Prof. Samoilenko. In 1961, his first scientific publication was devoted just to this topic. In 1967, together with A. D. Myshkis, he formulated general theorems on the existence of solutions and their extendability, as well as on the existence of solutions of the Cauchy problem for systems with pulses. In 1987, the monograph by A. M. Samoilenko and M. O. Perestyuk became the first book in the world literature containing fundamental results in the theory of impulsive systems.

A. M. Samoilenko continued the investigations of N. M. Krylov, N. N. Bogolyubov, A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold, J. Moser, and Yu. A. Mitropol'skii and proposed an improvement of the asymptotic method of successive change of variables. In 1969, this method was called the "method of accelerated convergence". In 1979, together with Acad. Mitropol'skii, he generalized the asymptotic averaging method and established sufficient conditions for the decomposition of asymptotic solutions. This theory was generalized, in particular, in the works written together with R. I. Petryshyn.

The notion of the Green function in the problem of invariant torus of the linear extension of a dynamical system on a torus introduced by Samoilenko on the Fifth International Conference on Nonlinear Oscillations in Kyiv made a powerful impetus to the development various aspects of the theory of perturbations and stability of toroidal manifolds. In the mathematical literature, this notion is known under the name Green–Samoilenko function (first introduced by the Moldavian mathematician I. U. Bronshtein).

The works of Prof. Samoilenko in the theory of multifrequency oscillations made an important contribution to this theory and determined new directions of its investigation and development. In the works written together with V. L. Kulyk, the authors developed the theory of alternating Lyapunov functions for the investigation of the solutions of linear nonautonomous differential systems and linear extensions of dynamical systems on a torus. The results obtained in this field were generalized to the case of countable systems together with Yu. V. Teplis'kyi and to the case of stochastic differential equations together with O. M. Stanzhitsky.

In 1965–1966, A. M. Samoilenko proposed an original method for finding periodic solutions of ordinary differential equations. Later, it was called the "Samoilenko numerical-analytic method". Together with M. I. Ronto, V. I. Trofimchuk and their disciples, this method was generalized to broad classes of boundary-value problems.

On the basis of the theory of generalized inverse operators, A. M. Samoilenko and A. A. Boichuk developed the theory of Fredholm boundary-value problems for differential equations, equations with delay, equations with impulsive action, and singularly perturbed systems. This theory was developed for finding the solutions bounded on the entire real axis, for systems of differential and difference equations under the conditions of dichotomy on the semiaxes for the corresponding homogeneous system.

In 1968, A. M. Samoilenko solved the problem posed by V. I. Arnold and gave the analytic proof of the equivalence of a smooth function to its Taylor polynomial in the vicinity of a critical point of finite type. In 2008, this result was essentially generalized.

In recent years, he studied the problems of the linear theory of the systems ordinary differential equations connected with the investigation of invariant hyperplanes of these systems, the notion of equivalence for these systems, and the Floquet–Lyapunov theory for periodic systems of linear equations.

Academician Samoilenko is the author of more than 600 scientific works, including 30 monographs and 15 textbooks. Most of his works are translated into English and other languages. According to the MathSciNet and Google Scholar Citations data, his works were cited 866 and 4903 times, respectively. His h-index is quite high and equal to 27.

As an excellent teacher, he gives much attention to training highly qualified scientific personnel. Among his disciples, there are 33 Doctors and 82 Candidates of Science in Physics and Mathematics. They successfully work in numerous mathematical centers throughout the world. His lectures are attended by thousands of students from the Kiev University and National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”, where he headed the Chair of Differential Equations in 1998–2011. Together with hits colleagues from the Kiev University, he prepared a series of textbooks in the theory of differential equations quite popular not only in the Ukraine but also in many other countries. Prof. Samoilenko is also deeply involved in the social life. His activities are aimed at the support of young Ukrainian mathematicians and talented children.

A. M. Samoilenko is a Full Member of the National Ukrainian Academy of Sciences and the European Academy of Sciences. He is also a Foreign Member of the Academy of Sciences of Tajikistan, a member of the Ukrainian and American Mathematical Societies. Prof. Samoilenko is also Editor-in-Chief of the “Ukrainian Mathematical Journal” and the journals “Nonlinear Oscillations” and “Ukrainian Mathematical Bulletin” and a member of the Editorial Boards of the Journals “Reports of the Ukrainian National Academy of Sciences”, “In the World of Mathematics”, “Nonlinear Mathematical Physics”, “Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics”, and others.

A. M. Samoilenko is decorated with the “Order of Friendship of Nations” (1984), “Order of Merit” of the 3rd Degree (2003), and “Orders of the Prince Yaroslav the Wise” of the 5th and 4th Degrees (2008, 2013). He was also awarded a Honorary Diploma of the Presidium of the Supreme Soviet of Ukraine (1987). He is a winner of the State Prizes of Ukraine in the Field of Science and Technology (1985 and 1996), State Prize of Ukraine in the Field of Education (2012), Ostrovskii Republican Youth Prize (1968), Krylov (1981), Bogolyubov (1998), Lavrentyev (2000), Ostrogradskii (2004), and Mitropol’skii (2010) Prizes of the Ukrainian Academy of Sciences. Acad. Samoilenko is also a “Soros Professor” (1998) and a Honor Worker of Science and Engineering of Ukraine (1998).

Tremendous scientific achievements of A. M. Samoilenko are explained by his great mathematical talent, persistence, and efficiency in his work. Significant role in his life is played by his strong family: his wife, Lypa Hryhorivna, and his son, Anatoly. Lypa Hryhorivna is his true friend support, and assistant for more than 50 years. She was also a scientific researcher, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics. For many years, she worked in the Institute of Cybernetics of the Ukrainian National Academy of Sciences. She is a well-educated, friendly, and hospitable person. His son Anatoly is a highly educated person with broad encyclopaedic knowledge, talented geneticist, father of two children. His PhD Degree he got in Germany in the famous Göttingen University. Grandchildren also inspire Anatolii Mykhailovych for his new scientific acievements.

Prof. Samoilenko continues his intense scientific work in the field of mathematical science. He is full of new ideas, energy, and inspiration.

We wish Academician Samoilenko strong health, family happiness, creative inspiration, and new successes in his scientific work and personal life.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND NONLINEAR OSCILLATIONS

Multiperiodical solution of the quasilinear parabolic system with multivariate time

Gulshat A. Abdikalikova, A. Berzhanov
Aktobe State University by K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan
a_a_galiya@mail.ru

We consider the quasilinear parabolic equation

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial t_j} - \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma u = f(\tau, t, x, y) + \mu F(\tau, t, x, y, u), \tag{1}$$

where multivariate time $(\tau, t) \in E_{1+m}$, $x \in E_n$, E_n — n-measured of the Euclid space, $y \in E_1^+ = [0, +\infty)$, $(\tau, t, x, y) \in E_{1+m+n+1}^+$; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — operator of Laplase; $\gamma = const > 0$; $\mu > 0$ — small parameter; $f(\tau, t, x, y)$ and $F(\tau, t, x, y, u)$ — known vector-functions.

Assumptions are fulfilled condition of (S) for functions $f(\tau, t, x, y)$ and $F(\tau, t, x, y, u)$:

1) for functions $f(\tau, t, x, y)$ and $F(\tau, t, x, y, u)$ are expected that meet the conditions of periodicity:

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, x + p\sigma, y) = f(\tau, t, x, y),$$

$$F(\tau + \theta, t + k\omega, x + p\sigma, y, u) = F(\tau, t, x, y, u).$$

There $\theta, \omega_1, ..., \omega_m, \sigma_1, ..., \sigma_n$ — periods, $k \in Z^m$, $p \in Z^n$, $k\omega = = (k_1\omega_1, k_2\omega_2, ..., k_m\omega_m)$ — m-vector, $p\sigma = (p_1\sigma_1, p_2\sigma_2, ..., p_n\sigma_n)$ — n-vector;

2) condition of Gelder on τ, t with exponents $\frac{\alpha}{2}$ and on x, y with exponents α, $\alpha \in (0, 1)$, on u condition of Lipschitz.

Problem. Find sufficient conditions existence and uniqueness (θ, ω, σ) — periodic on τ, t, x of solutions of the quasilinear equations (1).

In this abstract using idea works [1] – [2]. Then the equation (1) will take type

$$Lv = \mu F^*(\tau, t, x, y, v), \tag{2}$$

where $F^*(\tau, t, x, y, v) = F(\tau, t, x, y, u^* + v)$.

The operator of T which displays every vector-function $g(\tau, t, x, y) \in H^\alpha\left(E_{1+m+n+1}^+\right)$ in the vector-function

$$G_g(\tau, t, x, y) \equiv (Tg)(\tau, t, x, y) =$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\tau} \int_{E_n} \int_{E_1^+} V(\tau, s, x, \xi)\, U(\tau, s, y, \eta)\, U_0(\tau, s, t - e\tau + es)\, e^{-\gamma(\tau - s)} \times$$

$$\times F^*(s, t - e\tau + es, \xi, \eta, g(s, t - e\tau + es, \xi, \eta))\, d\eta d\xi ds.$$

By $\mu \in (0, \overline{\mu})$ the operator of T displays the class $H^\alpha\left(E_{1+m+n+1}^+\right)$ to in itself. The operator of T will be the operator of compression in the give class. On the theorem Kachchiopoli – Banach

[3] in the $H^{\alpha}\left(E^{+}_{1+m+n+1}\right)$ existence uniqueness fixed point $g^{*}=g^{*}(\tau,t,x,y)$ of operator T.
Theorem. *If executed the condition (S) that existence $\overline{\mu}>0$ such that on $0<\mu\le\overline{\mu}$ equation (1) have uniqueness (θ,ω,σ) periodicity solution on τ,t and x from class $H^{\alpha}\left(E^{+}_{1+m+n+1}\right)$. By $\mu\to 0$ converge to solution $u^{*}(\tau,t,x,y)$ nonhomogeneous equation.*

1. Umbetzhanov D. U. Almost periodic solutions of evolutions equations. Alma-Ata: Nayka, 1990. 184 p. (in Russian).
2. Asanova A. T. Limited solution of the nonlinear parabiloc equations // Izvestiya MN – AN RK. Ser. fiz-mat. 1997. No. 1, pp. 33–39. (in Russian).
3. Bogolyubov N. N., Mitropolskii Y. A. Asymptotical method in the theory non linear fluctuation. M.: 1968. 408 p. (in Russian).

Properties of solutions of systems of nonlinear ordinary differential equations, isolated bounded on the whole axis

A. D. Abildayeva, D. S. Dzhumabaev

Institute of mathematics and mathematical modelling MES RK, Almaty, Kazakhstan

azizakz@mail.ru, dzhumabaev@list.ru

Consider on $R=(-\infty,\infty)$ a system of nonlinear differential equations

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \qquad x\in R^{n}, \tag{1}$$

where $f: R\times R^{n}\to R^{n}$ is continuous, $\|x\|=\max\limits_{i=\overline{1,n}}|x_i|$.

The problems of the existence of a bounded solution to equation (1) and the construction of regular boundary value problems, allowing with a given accuracy, to determine a restriction of limited solutions to a finite interval, are investigated. For nonlinear problems the isolation of solutions is as important as the uniqueness of solutions for linear problems. However, the isolated and bounded on whole axis solution, viewed as an isolated element of the set of bounded on R solutions of equation (1), in general, does not possess the property of continuous dependence on changes of the right side of the differential equation. Since this property is required under the construction of approximating regular boundary value problems, the isolated bounded on the whole axis are investigated in the sense of the following definition.
Definition. *The function $x^{*}(t)$ is called "isolated" bounded on the whole axis solution of* (1), *if there exist constants $\rho_0>0$, $L_0>0$ such that the function $f(t,x)$ in $G^{*}(\rho_0)=\{(t,x): t\in R, \|x-x^{*}(t)\|<\rho_0\}$ has uniformly continuous derivative $f^{'}_{x}(t,x)$, the inequality $\|f^{'}_{x}(t,x)\|\le$ $\le L_0$ is fulfilled and the non-linearized system of ordinary differential equations*

$$\frac{dy}{dt}=f^{'}_{x}(t,x^{*}(t))y+\varphi(t), \quad t\in R, \quad y\in R^{n}$$

for each n vector-function $\varphi(t)$ bounded on R has a unique bounded on R solution.

"Isolated" bounded on R solutions to equation (1) are investigated by the parameterization method [1]. On its base a family of infinite systems of linear equations with respect to the input parameters is constructed. It is established that the existence of solution in the space of bounded sequences for a certain system of this family is equivalent to the existence of "isolated" bounded on R solution. It is proved that the "isolated" bounded on R solutions, are stable to perturbations of the right hand side of (1). For limited steady-state differential equations the problem of the approximation of "isolated" bounded on R is solved solution.

1. D. S. Dzhumabaev, Singular boundary value problems and their approximation for nonlinear ordinary differential equations // Comput. Math. and Math. Phys. 1992. Vol. 32. No 1. P. 10–24.

Global Asymptotic Stability of Impulsive Cohen–Grossberg Neural Networks of Neutral type

H. Akça[1], V. Covachev[2], Z. Covacheva[3]
[1]Abu Dhabi University, Abu Dhabi, UAE
[2]Sultan Qaboos University, Muscat, Oman
[3]Middle East College, Muscat, Oman
Haydar.Akca@adu.ac.ae, vcovachev@hotmail.com, zkovacheva@hotmail.com

We consider an impulsive Cohen–Grossberg neural network of neutral type

$$\begin{gathered}
\dot{x}_i(t) + \textstyle\sum_{j=1}^m e_{ij}\dot{x}_j(t-\tau_j) = a_i(x_i(t))[-b_i(x_i(t))+ \\
+\textstyle\sum_{j=1}^m c_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^m d_{ij} g_j(x_j(t-\tau_j)) + I_i], \\
t > t_0 = 0, \quad t \neq t_k, \\
\Delta x_i(t_k) = \gamma_{ik} x_i(t_k) + \textstyle\sum_{j=1}^m \delta_{ijk} x_j(t_k - \tau_j) + \zeta_{ik}, \\
k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \\
x_i(s) = \phi_i(s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad \tau = \max_{j=\overline{1,m}} \{\tau_j\}, \qquad i = \overline{1,m}.
\end{gathered}$$

This system is more general than in [1] and provided with impulsive conditions. A discrete analogue of this system was considered in our previous paper [2]. Sufficient conditions for the existence and global asymptotic stability of a unique equilibrium point of the system considered are obtained by exploiting an appropriate Lyapunov functional. The conditions obtained are much more precise than in [1]. An example is given.

1. C.–J. Cheng, T.–L. Liao, J.–J. Yan and C.–C. Hwang. Globally asymptotic stability of a class of neutral-type neural networks with delays. IEEE Trans. Systems Man Cybernet. Part B, 2006, 36, 1191–1195.
2. V. Covachev, H. Akça and M. Sarr. Discrete-time counterparts of impulsive Cohen–Grossberg neural networks of neutral type. Neural Parallel Scientific Comput., 2011, 19, 345–360.

About a nonlocal boundary value problem for the system of hyperbolic equations with impulse effects

A. T. Asanova
Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan
anarasanova@list.ru, anar@math.kz

We consider the nonlocal boundary value problem for second-order system of hyperbolic equations with impulse effects of fixed points on rectangle $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, \omega]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x), \qquad t \neq t_i, \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$P(x)u(0,x) + S(x)u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial x} - \frac{\partial u(t_i-0,x)}{\partial x} = U_i(x)\frac{\partial u(t_i+0,x)}{\partial x} + \varphi_i(x), \qquad i = \overline{1,k}, \tag{4}$$

where $u = col(u_1, u_2, ..., u_n)$, $n \times n$ matrices $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, n-vector function $f(t,x)$ are continuous on $\bar{\Omega}$, $n \times n$ matrices $U_j(x)$, n-vector functions $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,k}$ are continuous on $[0,\omega]$, and n-vector function $\psi(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$, and matrices $P(x)$, $S(x)$, n-vector function $\varphi(x)$ are continuously differentiable on $[0,\omega]$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < T$. The initial data are satisfied of the coordination conditions: $P(0)\psi(0) + S(0)\psi(T) = \varphi(0)$.

A piecewise continuous on $\bar{\Omega}$ function $u(t,x)$ that has piecewise continuous on $\bar{\Omega}$ the partial derivatives $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x \partial t}$, is called a solution to problem (1)–(4) if it satisfies system (1) for all $(t,x) \in \Omega$, is out lines $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$, and the boundary conditions (2), (3) and impulse effects on the fixed points (4).

In the present communication are investigated a questions of existence and uniqueness of the solution to the problem (1)–(4). The method of introduction functional parameters [1–2, 5, 7] develops on nonlocal boundary value problems for systems hyperbolic equations with impulse effects. Algorithms for finding approximate solution of the problem (1)–(4) are constructed and conditions of existence unique solution are established in terms of the initial data. In [3–4, 6] were obtained the coefficient criteria of well-posed solvability of a nonlocal boundary value problems without impulse effects. On the basis of these results necessary and sufficient conditions of well-posed solvability to problem (1)–(4) were investigated.

1. A. T. Asanova, D. S. Dzhumabaev. Unique Solvability of the Boundary Value Problem for Systems of Hyperbolic Equations with Data on the Characteristics. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2002, 42, 1609–1621.
2. A. T. Asanova, D. S. Dzhumabaev. Unique Solvability of the Nonlocal boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations. Differential Equations, 2003, 39, 1343–1354.
3. A. T. Asanova, D. S. Dzhumabaev. Correct Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem for Systems of Hyperbolic Equations. Doklady Mathematics, 2003, 68, 46–49.
4. A. T. Asanova, D. S. Dzhumabaev. Well-Posed Solvability of Nonlocal Boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations. Differential Equations, 2005, 41, 352–363.
5. A. T. Asanova. On the unique solvability of a nonlocal boundary value problem with data on intersecting lines for systems of hyperbolic equations. Differential Equations, 2009, 45, 385–394.
6. A. T. Asanova, D. S. Dzhumabaev. Well-Posed Solvability of Linear Nonlocal Boundary Value Problem for Systems of Hyperbolic Equations. Dopovidi (Reports) NAS Ukraine, 2010, 7–11.
7. A. T. Asanova. On a boundary-value problem with data on non-characteristic intersecting lines for a system of hyperbolic equations with mixed derivative. Nonlinear Oscillations, 2012, 15, 3–12.

On Asymptotic Behavior of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations

I. V. Astashova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ast@diffiety.ac.ru

For the equation

$$y^{(n)} = p\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) |y|^k \operatorname{sgn} y, \quad n \geq 2, \quad k > 1, \tag{1}$$

I. T. Kiguradze posed the problem on asymptotic behavior of its positive solutions such that $y(x) \to +\infty$ as $x \to x^* - 0$. For these solutions to equation (1) with $n = 2$, he found an asymptotic formula and supposed all such solutions to have powered asymptotic behavior for all other n, too [1].

For $n=3$ and $n=4$, it was proved [2] that under some conditions on the function $p(x,y,\dots)$ all such solutions behave as

$$y(x) = C(x^*-x)^{-\alpha}\left(1+o(1)\right), \quad x \to x^*-0, \tag{2}$$

$$\text{with} \quad \alpha = \frac{n}{k-1}, \quad C = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{p_0}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{3}$$

So, the hypothesis of I. T. Kiguradze was confirmed in this case.

Existence of solutions satisfying (2)–(3) was proved for arbitrary $n \geq 2$. For all $2 \leq n \leq 11$, $(n-1)$-parametric families of such solutions to equation (1) were proved to exist [2].

For the equation

$$y^{(n)} = (-1)^n |y(x)|^k, \quad k > 1, \tag{4}$$

it was proved [3] that for any N and $K > 1$ there exist an integer $n > N$ and $k \in \mathbf{R}$, $1 < k < K$, such that equation (4) has a solution

$$y(x) = (x-x^*)^{-\alpha}\ h(\log(x-x^*)),$$

where h is a positive periodic non-constant function on $\mathbf{R}$. The above solution with the substitution $x \mapsto -x$ gives the negative answer to the conjecture of Kiguradze for large n.

Still it was not clear how large n should be for existence of that type of solutions.

Theorem. *Suppose* $12 \leq n \leq 14$*. Then there exists* $k > 1$ *such that equation* (1) *with* $p(x) \equiv 1$ *has a solution* $y(x)$ *satisfying*

$$y^{(j)}(x) = (x^*-x)^{-\alpha-j}\, h_j(\,\log(x^*-x)\,), \qquad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

with periodic positive non-constant functions h_j *on* $\mathbf{R}$.

For $n = 12$ this result was proved earlier [4].

The research was supported by RFBR (grant 11-01-00989).

1. Kiguradze I. T, Chanturia T. A. Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. Dordrecht-Boston-LondonKluwer, Academic Publishers, 1993.
2. Astashova I. V. Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations. In: Astashova I. V. (ed.) Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition, M.: UNITY-DANA, 2012, p. 22–290. (Russian)
3. Kozlov V. A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. Ark. Mat., 1999, **37**(2), p. 305–322.
4. Astashova I. V., Vyun S. A. On positive solutions with non-power asymptotic behavior to Emden-Fowler type twelfth order differential equation. Differential equations, 2012, **48**(11), p. 1568–1569. (Russian)

Asymptotic Behavior Of Solutions Of Nonlinear Difference Equations

Ali Mahmud Ateiwi
Department of Mathematics, Faculty of Science, AL-Hussein Bin Talal University,
P. O. Box (20), Ma'an – Jordan
ateiwi@hotmail.com

We study asymptotic behavior as $n \to \infty$ of solutions of nonlinear difference equations

$$y_{n+1} = y_n + A_n y_n + f_n(y_n) \tag{1}$$

by using construction of a such linear system of difference equations

$$x_{n+1} = x_n + A_n x_n \tag{2}$$

for which asymptotic behavior of solution is the same as behavior of solution of the original system.

Definition 1.1. Systems (1) and (2) are asymptotically equivalent for $n \to \infty$ if there exists a one-to-one correspondence between their solutions x_n and y_n such that

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0.$$

Definition 1.2. System (1) is called exponentially dichotomic on $\mathcal{N}$ if there exist two complementing projectors $P_1,\ P_2$ and also positive constants $\upsilon_1, \upsilon_2,\ N_1,\ N_2$ such that the following inequalities hold:

$$\left\|X_n P_1 X_{no}^{-1}\right\| \leq N_1(1+a)^{-\upsilon_1(n-n_0)}, \quad n \geq n_0 \tag{3}$$

and

$$\left\|X_n P_2 X_{no}^{-1}\right\| \leq N_2(1+a)^{-\upsilon_2(n_0-n)}, \quad n_0 \geq n. \tag{4}$$

We prove the asymptotic equivalent of systems (1) and (2).

Unique solvability of linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel

E. A. Bakirova
Institute of mathematics and mathematical modelling MES RK, Almaty, Kazakhstan
bakirova1974@mail.ru

Integro-differential equations arise in many areas of applied mathematics to describe processes with the aftereffects. The existence and construction of approximate methods for finding solutions of boundary value problems for integro-differential equations are investigated by many authors. The basic methods of investigation and solving of linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations are A. I. Nekrasov's method [1] and Green's function method. However, these methods do not allow us to set a criterion for the solvability of linear boundary value problems. Therefore, in [2] after replacing the integral member by the corresponding sum the linear boundary value problem for Fredgolm integro-differential equation is approximated by boundary value problem for the loaded differential equation. The necessary and sufficient conditions for correct solvability of initial problem are obtained in terms of the approximating boundary value problems. In [3] there was proposed a method of investigating and solving linear boundary value problem based on partition of the interval and introduction of additional parameters. Using of this method allowed us establish a solvability criterion of the given problem in terms of the fundamental matrix of the differential part and resolvent of auxiliary Fredholm integral equation.

In the present report on $[0, T]$ we consider a linear two-point boundary value problem for Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T \sum_{k=1}^m \varphi_k(t)\psi_k(s)x(s)ds + f(t), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^n, \tag{2}$$

where the $(n \times n)$ matrices $A(t)$, $\varphi_k(t)$ $\psi_k(s)$ and n vector $f(t)$ are continuous on $[0, T]$.

The degeneracy of the kernel of the integral member provides to obtain a criterion for the unique solvability of problem (1), (2) without the use of the resolvent of the integral equation. There is also not used the fundamental matrix of the differential part. Coefficient necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the problem (1), (2) are set. An algorithm for finding of approximate solution to problem (1), (2) is present.

1. A. I. Nekrasov, About one class of linear integro-differential equations // Trudy TsAGI, 1934, issue 190, 1–25 (in Russian).
2. D. S. Dzhumabaev, E. A. Bakirova, Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // Differential Equations. 2010. Vol. 46. No. 4. pp. 553–567.
3. D. S. Dzhumabaev, A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // Computational Mathematics and mathematical Physics, 50 (2010), No. 7, 1150–1161.

Bounded solutions of differential equations with unbounded operator in Frechet space

A. A. Boichuk, O. O. Pokutnyi

Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine

boichuk.aa@gmail.com, lenasas@gmail.com

The report is devoted to obtaining of necessary and sufficient conditions for existence of generalized solutions bounded on the entire real axis of differential equation

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

in Frechet space $(F, ||\cdot||_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Unbounded operator-function $A(t)$ with dense domain $\overline{D(A(t))} = F$ is infinitisemal operator of evolution semigroup $\{U(t, \tau)|\ t, \tau \in \mathbb{R}\}$, extended by continuity on space F. The notion of exponential dichotomy on the semi-axes for homogeneous equation is proposed by analogy [1 − 3]. It is shown, that the problem of existing of generalized solutions of equation (1) is equivalent condition of exponential dichotomy on both semi-axes with projector-valued functions $\{P_+(t)\}_{t \geq 0}, \{P_-(t)\}_{t \leq 0}$ respectively. Condition of existence of generalized almost periodic solutions of equation (1) is given. Generalized solutions of (1) built with using generalized-inverse operators [2] and generalized Green's operator [3 – 5].

1. Palmer K. J. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. J. Differential Equations. – 1984. – V. 55. – P. 225–256.
2. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – VSP, Utrecht–Boston. – 2004. – 317 p.
3. Boichuk A. A., Pokutnyi O. O. Bounded solutions of linear differential equations in Banach space. Nonlinear oscillations (Nelinijni kolivannya). – 2006. – V. 9, No. 1. – p. 3–14.
4. Pokutnyi O. O. Generalized bounded solutions of linear evolution equations in locally-convex spaces. Journal of numerical and applied mathematics. – 2009. – V. 98, No. 2. – p. 35–40.
5. Pokutnyi O. O. Bounded solutions of linear and weakly nonlinear differential equations in Banach space with unbounded operator in linear part. Differential equations. – 2012. – V. 48, No. 6. – p. 803–813 (in Russian).

Some generic necessary conditions of existence of a center

D. Boularas

Xlim, UMR 6090, DMI, Faculté des Sciences et Techniques, Université de Limoges, France

boularas@unilim.fr

Let's consider the differential system

$$\frac{dx^i}{dt} = P^i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1}$$

where P^i, $i = 1, 2, \dots, n$ are polynomials of degree m with coefficients in the field $\mathbb{C}$.
Using the matricial presentation of the formal integrability (in terms of the formal series), we investigate necessary conditions of existence of a formal integral near a singular point. When the linear part $A = \frac{\partial P}{\partial x}(0) \neq 0$ (see [1]), we have found some diophantine equation, called "starting equation", satisfied by the multi-degree of the leading monomial of the formal integral. For example, when $n = 2$, the valuation $d = d_1 + d_2$ of any formal first integral of (1) has to satisfy the equation

$$(d_1 - d_2)^2 \operatorname{Det}(A) + d_1 d_2 \operatorname{Trace}^2(A) = 0.$$

In the present talk, we continue this investigation and discuss the eventual application to the "center-focus" problem.

1. D. Boularas, A. Chouikrat, *Équations d'amorçage d'intégrales premières formelles*, Linear and Multilinear Algebra, 2006, vol. 56, n^o 3.

Minimal time and minimal norm control

O. Carja[1], A. Lazu [2]

[1] "Al. I. Cuza" University, Iaşi, Romania

Octav Mayer Institute of Mathematics (Romanian Academy), Iaşi, Romania

[2]Gh. Asachi University, Iasi, Romania

ocarja@uaic.ro, vieru_ alina@yahoo.com

Consider the control system

$$y' = Ay + Bu,$$

where A generates a C_0-semigroup and $B \in \mathcal{L}(U, X)$, X, U being Banach spaces. Let $y(t, x, u)$ be the solution starting from x with control u. For fixed $x \in X$, define

$$E(t) = \inf\{\|u\|_\infty | u \in L^\infty(0, t; U); y(t, x, u) = 0\},$$

$$T(\rho) = \inf\{t | y(t,x,u) = 0; \|u\|_\infty \le \rho\}.$$

We discuss the relations

$$E(T(\rho)) = \rho; \quad T(E(t)) = t.$$

This is related to [1].

1. Gengsheng Wang and Enrique Zuazua. On the equivalence of minimal time and minimal norm controls for internally controlled heat equations. SIAM J. Control Optim., 2012, 50 (5), 2938–2958.

A new bidirectional generalization of (2+1)-dimensional matrix k-constrained KP and mKP hierarchies

O. Chvartatskyi, Yu. Sydorenko

Ivan Franko National University of L'viv, L'viv, Ukraine

alex.chvartatskyy@gmail.com, y_ sydorenko@franko.lviv.ua

We introduce a new bidirectional generalization of the (2+1)-dimensional k-cKP and k-cmKP hierarchies ((2+1)-BDk-cKP, respectively (2+1)-BDk-cmKP hierarchy). The (2+1)-BDk-cKP hierarchy extends the (2+1)-dimensional k-cKP hierarchy that was introduced in [1, 2] and recently investigated in [3, 4]. The (2+1)-BDk-cmKP hierarchy generalizes the (2+1)-dimensional k-cmKP hierarchy that was proposed in [4].

The (2+1)-BDk-cKP hierarchy includes new generalizations of such systems as the well-known Davey–Stewartson system

$$iu_{t_2} = u_{xx} + u_{yy} - 2Su, \;\; S_{xy} = (|u|^2)_{xx} + (|u|^2)_{yy}, \tag{1}$$

where u and S are complex- and real-valued functions respectively, the (2+1)-dimensional extension of the mKdV equation

$$\begin{aligned} &q_{t_3} + c_1 q_{xxx} - c_2 q_{yyy} - 3c_1\mu q_x \int |q|_x^2 dy + 3c_2\mu q_y \int |q|_y^2 dx + \\ &+3c_2\mu q \int (\bar{q} q_y)_y dx - 3c_1 \mu q \int (q_x q)_x dy = 0, \;\; c_1, c_2, \mu \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

where q is a complex-valued function, and their matrix versions. Some members of the (2+1)-BDk-cKP and (2+1)-BDk-cmKP hierarchies including matrix generalizations of equations (1) and (2) and their representations via integro-differential operators were considered recently in [5]. The (2+1)-BDk-cmKP hierarchy also includes Nizhnik equation [6], (2+1)-dimensional extension of Chen–Lee–Liu equation and their vector-matrix generalizations. We also propose dressing methods via Binary Darboux Transformations for the (2+1)-BDk-cKP hierarchy [7]. In particular, we elaborate dressing methods for the matrix generalizations of the Davey–Stewartson system that (2+1)-BDk-cKP hierarchy contains.

1. Yu. O. Mytropolsky, V. H. Samoilenko and Yu. M. Sidorenko. Spatially-two-dimensional generalization of Kadomtsev–Petviashvili hierarchy with nonlocal constraints. Proceedings of NSA of Ukraine. 1999, 8, P. 19–23.
2. A. M. Samoilenko, V. G. Samoilenko and Yu. M. Sidorenko. Hierarchy of the Kadomtsev–Petviashvili equations under nonlocal constraints: Many-dimensional generalizations and exact solutions of reduced system. Ukr. Math. Journ. 1999, 51 (1), P. 86–106.
3. X. J. Liu, Y. B. Zeng and R. Lin. A new extended KP hierarchy. Phys. Lett. A. 2008, 372, P. 3819–3823.

4. X. J. Liu, R. Lin, B. Jin and Y. B. Zeng. A generalized dressing approach for solving the extended KP and the extended mKP hierarchy. J. Math. Phys. 2009, 50, P. 053506-1 – 053506-12.
5. O. I. Chvartatskyi and Yu. M. Sydorenko. Matrix generalizations of integrable systems with Lax integro-differential representations. J. Phys.: Conf. Ser.. 2013, 411, P. 012010-1 – 012010-11, http://arxiv.org/abs/1212.3444
6. L. P. Nizhnik. Integration of multidimensional nonlinear equations by the inverse problem method. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1980, 254 (2), P. 332–335
7. O. Chvartatskyi and Yu. Sydorenko. A new bidirectional generalization of (2+1)-dimensional matrix k-constrained KP hierarchy. submitted to J. Math. Phys. 2013.

Boundary-value problem with initial jump for a singularly perturbed integral-differential equations

M. K. Dauylbayev
Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Kazakhstan
dmk57@mail.ru

Let's consider in the interval $[0,1]$ the third order linear integral-differential equation with the small parameter $\varepsilon > 0$ at the highest derivative:

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t) y'' + A_1(t) y' + A_2(t) y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} H_i(t,x) y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \qquad (1)$$

with boundary conditions:

$$h_1 y(t) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha, \qquad h_2 y(t) \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta, \qquad h_3 y(t) \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma. \qquad (2)$$

We suppose that the roots of the additional characteristic equation $\mu^2 + A_0(t)\cdot\mu + A_1(t) = 0$ satisfy the conditions $\mu_1(t) < -\gamma_1 < 0$, $\mu_2(t) > \gamma_2 > 0$.

A similar problem for differential equations considered in [1]. For the solution of the integral-differential boundary-value problem (1), (2) under certain specific conditions one has the following asymptotic as $\varepsilon \to 0$ estimates:

$$|y^{(i)}(t,\varepsilon)| \le C\Big(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\Big) +$$
$$+\frac{C}{\varepsilon^{i-1}} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}} \Big(|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\Big) +$$
$$+\frac{C}{\varepsilon^{i}} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}} \Big(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0\le t\le 1}|H_1(t,1)| + \max_{0\le t\le 1}|F(t)|\Big), \qquad i = 0,1,2,$$

where $C > 0$ is a constant independent on ε.

It follows that as $\varepsilon \to 0$ the values $y'(0,\varepsilon)$, $y''(0,\varepsilon)$ have the order of greatness

$$y''(0,\varepsilon) = O\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big), \qquad y'(1,\varepsilon) = O\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big), \qquad y''(1,\varepsilon) = O\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\Big), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Thus, it follows, that the solution of the boundary problem has an initial jumps at both ends of the interval, and the various orders. Namely, at $t = 0$ the initial jump has first order and at $t = 1$ the initial jump has zero order.

1. Kasymov K. A., Zhakipbekova D. A., Nurgabyl D. N. Presentation of the boundary-value problem for a linear differential equation with a small parameter at the highest derivatives. Vestnik KazNU. Ser. mathem., mech., computer science, 2001, № 3, pp. 73–78.

On solutions of the SU(2)-reductions of the Yang–Mills equations

V. S. Dryuma

Institute of Mathematics and Computer Science, 5, Academiei str., MD-2028 Chisinau, Republic of Moldova

valdryum@gmail.com; valery@dryuma.com

New particular solutions of the nonlinear equation

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f\left(x,y\right) - f(x,y)^3 = 0, \tag{1}$$

and its two-component generalization

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f\left(x,y\right) - f\left(x,y\right) h\left(x,y\right)^2 = 0, \ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h\left(x,y\right) - h\left(x,y\right) f\left(x,y\right)^2 = 0, \tag{2}$$

which are known examples of reduction of the full SU(2) Yang-Mills system of equations

$$\partial_\mu \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \partial_\mu \vec{A}_\mu + [\vec{A}_\mu, (\partial_\nu \vec{A}_\mu - \partial_\mu \vec{A}_\nu + [\vec{A}_\mu, \vec{A}_\nu])] - \partial_\mu [\vec{A}_\mu, \vec{A}_\nu] = 0 \tag{3}$$

are obtained.

The system of the equations

$$2\,\frac{\partial}{\partial x} f(\vec{x},t) \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x},t) + 2\,f(\vec{x},t) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} f(\vec{x},t) + f(\vec{x},t)^2 \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{x},t) = 0,$$

$$2\,\frac{\partial}{\partial y} f(\vec{x},t) \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x},t) + 2\,f(\vec{x},t) \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} f(\vec{x},t) + f(\vec{x},t)^2 \frac{\partial}{\partial y} f(\vec{x},t) = 0,$$

$$2\,\frac{\partial}{\partial z} f(\vec{x},t) \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x},t) + 2\,f(\vec{x},t) \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} f(\vec{x},t) + f(\vec{x},t)^2 \frac{\partial}{\partial z} f(\vec{x},t) = 0,$$

which is an example of a new multidimensional reduction is considered.

Particular solutions of this system of equations are constructed and their properties are discussed.

For deriving solutions of considered equations is applied the method of parametric presentation of the functions and their particular derivatives which was developed by author [1]. As a result of application of this method, the equation can be transformed into another equation, with the help of which you can obtain non-trivial solutions of the original equation.

For example, the equation (1) can be transformed to the equation

$$-\theta\left(\xi,t\right)^3 + \xi^4 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \xi} \theta\left(\xi,t\right) - \xi^3 \frac{\partial}{\partial t} \theta\left(\xi,t\right) = 0. \tag{4}$$

The simplest solution of the equation (4) has the form $\theta\left(\xi,t\right) = \frac{\xi^{3/2}\sqrt{c_2}}{\sqrt{(2+\xi\,C_1\,c_2)(-2\,c_2 t + C_1)}}$. As a result of a reverse transformation, it turns out nontrivial solution of the original equation (1).

1. Dryuma V. On the equations determining the Ricci flows on manifolds. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 10, No. 4 1320009 (9 pages), World Scientific Publishing Company (2013).

Global bifurcations of limit cycles in polynomial dynamical systems

V. A. Gaiko
National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
valery.gaiko@gmail.com

We carry out the global qualitative analysis of polynomial dynamical systems. To control all of their limit cycle bifurcations, especially, bifurcations of multiple limit cycles, it is necessary to know the properties and combine the effects of all of their rotation parameters. It can be done by means of the development of a new bifurcational geometric method based on the well-known Weierstrass preparation theorem and the Perko planar termination principle stating that the maximal one-parameter family of multiple limit cycles terminates either at a singular point which is typically of the same multiplicity (cyclicity) or on a separatrix cycle which is also typically of the same multiplicity (cyclicity) [1].

This principle is a consequence of the principle of natural termination which was stated for higher-dimensional dynamical systems by A. Wintner who studied one-parameter families of periodic orbits of the restricted three-body problem and used Puiseux series to show that in the analytic case any one-parameter family of periodic orbits can be uniquely continued through any bifurcation except a period-doubling bifurcation. Such a bifurcation can happen, e. g., in a three-dimensional Lorenz system [1]. Besides, the periods in a one-parameter family of a higher-dimensional system can become unbounded in strange ways: for example, the periodic orbits may belong to a strange invariant set, strange attractor, generated at a bifurcation value for which there is a homoclinic tangency of the stable and unstable manifolds of the Poincaré map. This cannot happen for planar systems. That is why the Wintner–Perko termination principle is applied for studying multiple limit cycle bifurcations of planar polynomial dynamical systems [1].

If we do not know the cyclicity of the termination points, then, applying canonical systems with field rotation parameters, we use geometric properties of the spirals filling the interior and exterior domains of limit cycles. Applying this method, we have solved, e. g., Smale's Thirteenth Problem proving that the Liénard system with a polynomial of degree $2k+1$ can have at most k limit cycles [2]. Generalizing the obtained results, we have also solved the problem of the maximum number of limit cycles surrounding a singular point for an arbitrary polynomial system [3] and Hilbert's Sixteenth Problem for a general Liénard polynomial system with an arbitrary (but finite) number of singular points [4, 5].

Finally, applying the same approach, we consider three-dimensional polynomial dynamical systems and, in particular, complete the strange attractor bifurcation scenario in the classical Lorenz system globally connecting the homoclinic, period-doubling, Andronov–Shilnikov, and period-halving bifurcations of its limit cycles.

1. V. A. Gaiko. Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.
2. V. A. Gaiko. Limit cycles of Liénard-type dynamical systems. Cubo, 2008, vol. 10, p. 115–132.
3. V. A. Gaiko. On limit cycles surrounding a singular point. Differ. Equ. Dyn. Syst., 2012, vol. 20, p. 329–337.
4. V. A. Gaiko. The applied geometry of a general Liénard polynomial system. Appl. Math. Letters, 2012, vol. 25, p. 2327–2331.
5. V. A. Gaiko. Limit cycle bifurcations of a general Liénard system with polynomial restoring and damping functions. Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ., 2012, vol. 4, p. 242–254.

Quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states

V. I. Gerasimenko
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
gerasym@imath.kiev.ua

Recently the considerable advance in the rigorous derivation of quantum kinetic equations in the mean field scaling limit, such as the nonlinear Schrödinger equation and the Gross–Pitaevskii equation is observed. In the scaling limit approach to the construction of kinetic equations one of the essential assumptions is that initial data must satisfy a chaos property, i.e. the initial state is completely determined by a sequence of products of the one-particle density operators. At the same time it is well known that, for instance, the equilibrium state of the Bose condensate is characterized by correlations of particles in contrast to the gaseous state. Thus, the validation of quantum kinetic equations in case of presence of correlations at initial time, in particular for condensed states, remains an open problem so far.

We generalized the concept of quantum kinetic equations in case of the kinetic evolution involving correlations of particle states at initial time, for instance, correlations characterizing the condensed states. We prove that in fact, if initial data is completely specified by a one-particle marginal density operator and initial correlation operators, then all possible states of infinite-particle systems at an arbitrary moment of time can be described within the framework of a one-particle density operator governed by the kinetic equation, whose coefficients are determined by the initial correlation operators [1].

The actual kinetic equations that describe the evolution of interacting particles in the condensed states, are derived in appropriate scaling limits on the basis of the established quantum kinetic equation. The mean field scaling asymptotics of a solution of the generalized quantum kinetic equation of many-particle systems in condensed states was been considered. These results extended to quantum systems of bosons and fermions.

We note that one more approach to the construction of the kinetic equations in the mean field limit, in case of the presence of correlations at initial time, was developed on the basis of the description of the kinetic evolution in terms of marginal observables [2].

The developed approaches are also related to the problem of a rigorous derivation of the non-Markovian kinetic-type equations from underlaying many-particle quantum dynamics which make it possible to describe the memory effects of particle and energy transport in quantum fluids.

1. V. I. Gerasimenko and Zh. A. Tsvir. On quantum kinetic equations of many-particle systems in condensed states. Physica A: Stat. Mech. Appl., (2012), 391, 6362–6366.
2. V. I. Gerasimenko. Heisenberg picture of quantum kinetic evolution in mean-field limit. Kinet. Relat. Models, (2011), 4, 385–399.

Morse–Smale diffeomorphisms: bifurcations, interrelation between dynamics and topology of ambient manifold

V. Z. Grines
Lobachevsky State University, Nizhni Novgorod, Russia
vgrines@yandex.ru

The report is devoted to exposition of results on dynamics of Morse–Smale diffeomorphisms in dimension 3 obtained in recent time by the author in collaboration with Russian

(V. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzoma) and French (C. Bonatti, F. Laudenbach) mathematicians. We will discuss questions of topological classification of diffeomorphisms, interrelation between dynamics and topology of ambient manifold, existence of global Lyapunov function whose set of critical points coincide with nonwandering set (such function is called energy function) and existence of simple arc which joins two Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifold. The survey of the results and references can be found in [1], [2].

The author thanks RFBR 12-01-00672-a for the financial support.

1. V. Z. Grines, O. V. Pochinka. Morse-Smale cascades on-manifolds. Uspehi matematicheskih nauk, 2013, 68:1(409), 129—188.
2. V. Z. Grines, O. V. Pochinka. Introduction to the topological classification of cascades on manifolds of dimension two and three. – Moscow: "Regular and Chaotic Dynamics" Research Center; Izhevsk: Izhevsk Institute for computer Studies, 2011, 423 pp.

On Embedding in Flows of Morse–Smale Cascades

E. Gurevich
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Russia
elena_gurevich@list.ru

Results under presentation are obtained in collaboration with V. Grines and O. Pochinka, and published in [1].

A C^r-diffeomorphism (cascade) $f : M^n \to M^n$, $r \geq 1$, on smooth connected closed manifold of dimension n embeds in a C^l-flow, $l \leq k$, if f is the time-one map of such a flow. Palis showed in [2] that the set of C^r-diffeomorphisms that embed in C^1-flows is a set of first category. In the same time, the structural stability of Morse–Smale diffeomorphisms leads to existence of open sets of cascades that embed in topological flow (for example, a neighbourhood of time-one map of a Morse-Smale flow). In [3] were stated the following necessary conditions of embedding of Morse-Smale cascade f in a topological flow:

(1) non-wandering set of f consists only of fixed points;

(2) f restricted to each invariant manifold of its fixed points is orientation preserving;

(3) for any fixed points p, q having non-empty intersection of invariant manifolds, the intersection does not contain compact components.

It was also shown in [3] that conditions (1)–(3) are sufficient in case $n = 2$.

In dimension $n = 3$ an additional obstacle for Morse–Smale cascade to embed in a flow is non-trivial embedded separatrices of saddle points. To describe them, we put into a correspondence to each diffeomorphism f a global scheme S_f which is a set of wandering orbits with projections of 2-dimensional invariant manifolds. We introduce a definition of triviality of global scheme and prove the following theorem.

Theorem. *A Morse–Smale cascade $f : M^3 \to M^3$ embeds in continuous flow iff its scheme is trivial.*

We also discuss a possibility of expanding our result for Morse-Smale cascades on manifolds of dimension $n > 3$.

Research is supported by grants 12-01-00672 and 11-01-12056-ofi-m of RFFR.

1. Grines V. Z., Gurevich E. Ya. , Medevedev V. S., Pochinka O. V. On embedding of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds in flows. Mat. Sb., 2012, 203–12, 81—104.
2. Palis J. Vector fields generate few diffeomorphisms. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, 80, 503–505.
3. Palis J., Smale S. Structural Stability Theorem. Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math. – American Math. Soc., 1970, 14, 223–231.

Plane compacta as attractors of IFS's and Borsuk's conjecture

V. Guţu
Moldova State University, Chişinău, Republic of Moldova
vgutu@yahoo.com

J. Hutchinson (1981) has shown that any *hyperbolic Iterated Function System* (*IFS*), consisting of a finite collection of contractions in a complete metric space, possesses a unique invariant compact set, called the *attractor* of this IFS.

The structure of attractors and their properties were studied by many authors. M. Hata (1985), M. Barnsley (1988), P. F. Duvall and L. S. Husch (1992), M. Kwieciński (1999), S. Crovisier and M. Rams (2006), M. J. Sanders (2009), M. Kulczycki and M. Nowak (2012), T. Banakh and M. Nowak (2013) and others have studied the possibility of compacta to be obtained as attractors, as well as some examples of compacta, which can not serve as attractor of any hyperbolic IFS.

We study this problem from another side: *Which compacta can serve as attractors of hyperbolic IFS's?*

In this connection a natural question arises: *Given a compact, what is the minimal number of contractions of a hyperbolic IFS (provided it exists) needed to obtain this compact as attractor?* This question is related also to Borsuk's conjecture [1].

We show that any finite union of convex compacta in $\mathbb{R}^n$ can be represented as the attractor of a hyperbolic IFS.

F. W. Levi [2] has proved that any plane convex compact set can be covered by three translates of its interior, excepting parallelograms, when four translates are needed.

We show that any plane convex compact may be realized as attractor of an IFS, consisting of at most three contractions.

V. Boltyansky [3] has proved that any plane convex compact with diameter d, which may by embedded uniquely in a figure of constant width d, may be covered by not less then three figures of smaller diameter.

As a consequence, we show that if A is a plane convex compact with diameter d, which may by embedded uniquely in a figure of constant width d, then the minimal number of contractions of an IFS, having A is attractor, is equal to three.

This work was supported by the HCSTD ASM Grants 11.817.08.41F and 12.839.08.06F.

1. K. Borsuk. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. Fund. Math., 1933, 20, 177–190.
2. F. W. Levi. Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns. Arch. Math., 1954, 6, 369–370.
3. V. Boltyansky, I. Gohberg. Partition of figures in smaller parts. – Moscow: Nauka, 1971. (In Russian.)

The invariant Bargmann type reduction of the (2|1+1)-dimensional supersymmetric generalization of the modified Korteweg–de Vries equation and its integrability

O. Ye. Hentosh

Inst. for Applied Problems of Mech. and Math., NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine

ohen@ua.fm

By use of the hierarchies [1] of squared eigenfunction symmetries for the Lax type vector fields on the extended dual space to Lie algebra of super-integro-differential operators of one anticommuting variable one can obtain the Lax integrable (2|1+1)-dimensional supersymmetric generalization of the modified Korteweg–de Vries equation as the system of two evolutions

$$\begin{aligned}
&df_i/d\tau = (-M_1^1 + \delta_1^i l)f_i, \quad df_i^*/d\tau = (M_1^1 - \delta_1^i l)^* f_i^*,\\
&d\Phi_i/d\tau = (-M_1^1 + \delta_1^i l)\Phi_i, \quad d\Phi_i^*/d\tau = (M_1^1 - \delta_1^i l)^* \Phi_i^*,\\
&df_i/dT = ((l^3)_+ - M_1^3 + \delta_1^i l^3)f_i, \quad df_i^*/dT = (-(l^3)_+ + M_1^3 - \delta_1^i l^3)^* f_i^*,\\
&d\Phi_i/dT = ((l^3)_+ - M_1^3 + \delta_1^i l^3)\Phi_i, \quad d\Phi_i^*/dT = (-(l^3)_+ + M_1^3 - \delta_1^i l^3)^* \Phi_i^*,
\end{aligned} \tag{1}$$

where $l = \partial + \sum_{i=1}^{2}(f_i D_\theta^{-1} f_i^* + \Phi_i D_\theta^{-1}\Phi_i^*)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \Phi_1^*, \Phi_2^*, f_1^*, f_2^*, \Phi_1, \Phi_2)^\top \in M^{4|4} \subset L_2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times\Lambda_1^2; \Lambda_0^4\times\Lambda_1^4)$, $\Lambda = \Lambda_0\oplus\Lambda_1$ is a Grassmann algebra over $\mathbb{C}\subset\Lambda_0$, $i\in\{1,3\}$, $\partial = \partial/\partial x$, $x\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, D_θ is a superderivative with respect to the anticommuting variable θ, $D_\theta^2 = \partial$, the subscript "+" designates a projection of the corresponding operator on the Lie subalgebra of superdifferential operators, $M_1^s = \sum_{p=0}^{s-1}\big((l^p f_1)D_\theta^{-1}(l^{*(s-1-p)} f_1^*) + (l^p\Phi_1)D_\theta^{-1}(l^{*(s-1-p)}\Phi_1^*)\big)$, δ_k^i, $k\in\{1,3\}$, is a Kronecker symbol, $s\in\{1,3\}$, with the compatibility condition

$$d(l^3)_+/dy = [(l^3)_+, M_1^1]_+, \tag{2}$$

where $(l^3)_+ = \partial^3 + w_5\partial^2 D_\theta + w_4\partial^2 + w_3\partial D_\theta + w_2\partial + w_1 D_\theta + w_0$, $w_0, w_2, w_4 \in L_2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times\Lambda_1^2;\Lambda_0)$, $w_1, w_3, w_5 \in L_2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times\Lambda_1^2;\Lambda_1)$.

The Hamiltonian forms for the vector fields d/dx, $d/d\tau$ and d/dT, generated by the dynamical system (1)–(2), on their common invariant finite-dimensional supersubspace $M_N^{4|4}\subset M^{4|4}$ of a Bargmann type

$$M_N^{4|4} = \{\mathbf{f}\in M^{4|4}:\ grad\,\mathcal{L}_N[\mathbf{f}] = 0\}, \quad \mathcal{L}_N = \gamma_0 + \sum\nolimits_{j=1}^{N} c_j\lambda_j,$$

where $\gamma_0 = \int_0^{2\pi} dx\int d\theta\sum_{i=1}^{2}(-f_i f_i^* + \Phi_i\Phi_i^*)$ is a local conservation law of the system (1)–(2), λ_j are some eigenvalues of an associated isospectral problem and $c_j\in\Lambda_0$ for every $j=\overline{1,N}$, are found via the superanalog of the Gelfand–Dikii relationship [2] for the Lagrangian $\mathcal{L}_N$. It is shown that the monodromy supermatrix of the corresponding matrix isospectral problem give us the Lax representations for the reduced vector fields. Among the coefficients of the expansions of the traces of the monodromy supermatrix natural powers by poles one can choice the set of $3N$ functionally independent conservation laws, being involutive with respect to the Poisson bracket, generated by the found supersymplectic structure. This set of conservation laws provides the Liouville integrability of the reduced vector fields d/dx, $d/d\tau$ and d/dT.

1. Hentosh O. Ye. Lax integrable supersymmetric hierarchies on extended phase spaces. Symmetry, integrability, geometry: methods and applications, 2006, 2, 001, 11 p.; nlin.SI/0601007.
2. Hentosh O. Ye. The Lax integrable Laberge-Mathieu hierarchy of supersymmetric nonlinear dynamical systems and its finite-dimensional Neumann type reduction. Ukr. Math. J., 2009, 61, № 7, P. 906–921.

Fredholm Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations with Double Singularity

L. I. Karandzhulov
Technical University, Sofia, Bulgaria
likar@tu-sofia.bg

In the present paper, we obtain conditions under which, as $\varepsilon \to 0$, the exists a unique solution of the nonlinear boundary-value problems (BVP)

$$\varepsilon\dot{x} = Ax + \varepsilon F(t, x, \varepsilon, f(t, \varepsilon)) + \varphi(t), \;\; t \in [a, b], \;\; 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{1}$$

$$lx(\cdot) = h, \;\; h \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

satisfying the following conditions: (C1) $\mathbf{A}$ is a constant $(n \times n)$-matrix, $Re\lambda_i < 0\,(i = \overline{1, n})$, $\lambda_i \in \sigma(\mathbf{A}), \lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ and the function $\varphi(t)$ is an n-dimensional vector-function of the class $\mathbb{C}^\infty[a, b]$;
(C2) The function $F(t, x, \varepsilon, f(t, \varepsilon))$ is a vector-function, having continuous partial derivatives with respect to all arguments op $(n + 2)$ in the domain $\mathbf{G} = [a, b] \times \mathbf{D_x} \times [0, \overline{\varepsilon}] \times \mathbf{D_f}$, where $\mathbf{D_x} \subset \mathbb{R}^n$ is a neighborhood of the solution $x^{(0)}(t)$ of the degenerate system ($\varepsilon = 0$) $Ax^{(0)} + \varphi(t) = 0$, $\mathbf{D_f} \subset \mathbb{R}^p$ is bounded and closed domain, $0 < \overline{\varepsilon} \ll 1$. The function $f(t, \varepsilon)$ is smooth with respect to all argument up $(n+1)$ in the domain $\mathbf{G_1} = [a, b] \times (0, \overline{\varepsilon}]$ and its values belongs to $\mathbf{D_f}$; (C3) l is a linear m-dimensional bounded vector functional

$$l = col(l^1, \cdots, l^m), l \in (\mathrm{C[a, b]} \to \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

We assume that the function $f(t, \varepsilon)$ of (1) contain singular elements (for example, $f = f(\exp\,(-\frac{t}{\varepsilon}), \sin(\frac{t}{\varepsilon})))$. On one hand, the small parameter ε is in front of the derivative and on another, $\frac{1}{\varepsilon}$ is involved in the function f. Therefore the BVP (1), (2) is withe double singularity.

We use an asymptotic method of the boundary functions (see [3]) and construct an asymptotic series, satisfying the BVP (1), (2) at $\det A \neq 0$. The Couchy problem for nonlinear systems with double singularity was investigated in [2]. In [1] was investigated the BVP in the form $\varepsilon\dot{x} = Ax + \varepsilon A_1(t)x + \varphi(t)$, $lx(\cdot) = h$, $h \in \mathbb{R}^m$.

1. L. I. Karandzhulov. Asymptotic expansion of solutions of a singularly perturbed boundary-value problem, Nonlinear Oscillations, 2004, Vol. 7, No 2, pp. 154–167.
2. R. P. Kuzmina. Asymptotic methods for ordinary differential equations, Dordrecht-Boston: Kluwer Academic Publisher, 2000.
3. A. B. Vasl'eva and V. F. Butuzov. Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations, Moscow: Nauka, 1973. (in Russian)

Multiple solutions for nonlinear boundary value problems of ODE

A. Kirichuk
Daugavpils University, Daugavpils, Latvia
anita.kiricuka@du.lv

We consider two dimensional systems of ordinary differential equations. The phase portrait describes the global behavior of solutions. Principal changes of the structure of the phase portrait are called bifurcations. We consider the Hopf bifurcation. The Hopf bifurcation is a local bifurcation in which a fixed point of a dynamical system loses stability as a pair of complex conjugate eigenvalues of the linearization around the fixed point cross the imaginary axis of the complex plane.

We consider systems that have undergone the Hopf bifurcation and have certain properties.

Our aim is to study the influence of the Hopf bifurcation on the number of solutions of the Dirichlet problem.

This work has been supported by the European Social Fund within the Project "Support for the implementation of doctoral studies at Daugavpils University"
Agreement Nr.2009/0140/1DP/1.1.2.1.2/09/$IPIA$/$VIAA$/015.

1. D. K. Arrowsmith, C. M. Place. Dynamical Systems. Differential Equations, maps and chaotic behaviour. – London: Chapman and Hall, 1992.
2. W. Kelley and A. Peterson. The Theory of Differential Equations Classical and Qualitative. – New Jersey: Pearson Education, Inc., 2004.
3. S. Lynch. Dynamical systems with applications using Mathematica. – Boston: Birkhäuser, 2007.
4. R. Seydel. Practical Bifurcation and Stability Analysis. – New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2010.

Method of averaging for optimal control problems with impulsive effects

N. M. Kitanov
Bulgarian Academy of Sciences, Blagoevgrad, Bulgaria
nkitanov@abv.bg

In this paper are presented some results connected to the applications of the averaging method for solving of optimal control problems, where the models are systems of differential equations with impulsive effects. We suppose additional control in the impulses. Four schemes for averaging are presented. Using the method of averaging, an optimal solution for a controlled system, is found.

1. Aubin J. P., Frankowska H. Set-Valued Analysis, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 1990.
2. Bainov D. D., Covachev V. Impulsive Differential Equations with a Small Parameter, World Scientific Publishers, Singapore, 1994.
3. Blagodatskikh V. I., Filippov A. F. Differential Inclusions and Optimal Control, Trudy Mat. Inst. Steklov (In Russian), v. 169, No 2, pp. 194–252, 1985 . English transl. in *Proc. Steklov Inst. Math.*, 4 (169), 1986.
4. Donchev Tz., Slavov J. I. Averaging method for one-sided Lipschitz differential inclusions with generalized solutions, SIAM J. Control Optim., Vol. 37, 5, pp. 1600–1613
5. Mitropolskii Yu. A. Averaging Method in Nonlinear Mechanics, Nauk. Dumka (in Russian), Kiev, 1971.
6. Plotnikov V. A. Averaging Method in Controlled Problems, Lybid (in Russian), Kiev–Odessa, 1992.

7. Plotnikov V. A., Ivanov R. P., Kitanov N. M. Differential Inclusions with Finite Number of Impulses in Fixed Moments, Discrete Mathematics and Applications. Research in Mathematics, Blagoevgrad, 5 (1995), pp. 246–254
8. Plotnikov V. A., Ivanov R. P., Kitanov N. M. Method of averaging for impulsive differential inclusions, C. R. Akad. Bul. Sci. 52 (1999), 3–4, pp.17–20.
9. Plotnikov V. A., Kitanov P. M. Bogoljubov's Theorem for Quasidifferential Equations with Impulses, Ukrainian Math. J., 45 (1997), 11, (in Russian), pp. 1504–1511.
10. Plotnikov V. A., Plotnikova L. I. Averaging of Differential Inclusions with Multivalued Impulses, Ukrain. Math. J., 47 (1995), 11, (in Russian), pp. 1526–1532.

Hopf bifurcation for dissipative hyperbolic PDEs

I. Kmit[1,2], **L. Recke**[1]
[1] Humboldt University of Berlin, Germany
[2] Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Lviv, Ukraine
kmit@informatik.hu-berlin.de, recke@mathematik.hu-berlin.de

We consider boundary value problems for semilinear first order hyperbolic systems of the type

$$\partial_t u_j B \ + a_j(x,\lambda)\partial_x u_j + b_j(x,\lambda,u) = 0,\ x \in (0,1),\ j = 1,\dots,n,$$

$$u_j(0,t) = \sum_{k=m+1}^{n} r_{jk} u_k(0,t), \quad j = 1,\dots,m,$$

$$u_j(1,t) = \sum_{k=1}^{m} r_{jk} u_k(1,t), \quad j = m+1,\dots,n$$

with smooth coefficient functions a_j and b_j such that $b_j(x,\lambda,0) = 0$.

We state conditions for Hopf bifurcation, i.e. for existence, local uniqueness (up to phase shifts), smoothness and smooth dependence on λ of time-periodic solutions bifurcating from the zero stationary solution. Furthermore, we derive a formula which determines the bifurcation direction.

The proof is done by means of a Lyapunov–Schmidt reduction procedure. For this purpose, Fredholm properties of the linearized system and implicit function theorem techniques are used.

There are several distinguishing features of the proofs of Hopf bifurcation theorems for hyperbolic PDEs in comparison with those for parabolic PDEs or for ODEs: First, the question of Fredholm solvability of the linearized problem (in appropriate spaces of time-periodic functions) is essentially more difficult. Second, the question if a non-degenerate time-periodic solution of the nonlinear problem depends smoothly on the system parameters is much more delicate. And third, a sufficient amount of dissipativity is needed in order to prevent small denominators from coming up, and we present an explicit sufficient condition for that in terms of the data of the PDEs and of the boundary conditions.

1. I. Kmit, L. Recke, Periodic solutions to dissipative hyperbolic systems. I: Fredholm solvability of linear problems. Preprint 999, DFG Research Center Matheon, 2013. http://opus4.kobv.de/opus4-matheon/frontdoor/index/index/docId/1197
2. I. Kmit, L. Recke, Periodic solutions to dissipative hyperbolic systems. II: Hopf bifurcation for semilinear problems. Preprint 1000, DFG Research Center Matheon, 2013. http://opus4.kobv.de/opus4-matheon/frontdoor/index/index/docId/1198

On inverse spectral problem for the Sturm–Liouville operator with degenerate boundary conditions

A. S. Makin
Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science, Moscow, Russia
alexmakin@yandex.ru

Consider the Sturm–Liouville equation

$$u'' - q(x)u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

on the interval $(0, \pi)$ with degenerate [1] boundary conditions

$$u'(0) + du'(\pi) = 0, \quad u(0) - du(\pi) = 0, \tag{2}$$

where $d \neq 0$, and $q(x)$ is an arbitrary complex-valued function of class $L_2(0, \pi)$.

Denote by $c(x, \mu), s(x, \mu)$ $(\lambda = \mu^2)$ the fundamental system of solutions to (1) with the initial conditions $c(0, \mu) = s'(0, \mu) = 1$, $c'(0, \mu) = s(0, \mu) = 0$. By PW_σ we denote the class of entire functions $f(z)$ of exponential type $\leq \sigma$ such that $||f(z)||_{L_2(R)} < \infty$, and by PW_σ^- we denote the set of odd functions in PW_σ.

Simple computations show that the characteristic equation of problem (1), (2) can be reduced to the form $\Delta(\mu) = 0$, where

$$\Delta(\mu) = \gamma + c(\pi, \mu) - s'(\pi, \mu) = \gamma + \frac{f(\mu)}{\mu},$$

where $\gamma = \frac{d^2-1}{d}$ and $f(\mu) \in PW_\pi^-$.

Theorem. *Let a function $v(\mu)$ have the form*

$$v(\mu) = \gamma + \frac{f(\mu)}{\mu},$$

where γ is a complex number, $f(\mu) \in PW_\pi^-$, and satisfies the condition:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mu^m f(\mu)|^2 d\mu < \infty,$$

where m is a nonnegative integer number. Then there exists a function $q(x) \in W_2^m(0, \pi)$ such that the characteristic determinant $\Delta(\mu)$ of problem (1), (2), where either $d = (\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4})/2$ or $d = (\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4})/2$ and with the potential $q(x)$ is identically equal to the function $v(\mu)$.

For the case $m = 0$ the Theorem was proved in [2].

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 13-01-00241.

1. V. A. Marchenko. Sturm–Liouville Equations and their Applications (Russian). – Kiev: Naukova Dumka, 1977.
2. A. S. Makin. Characterization of the spectrum of the Sturm-Liouville operator with irregular boundary conditions. Differ. Equations, 2010, V. 46, No. 10, 1427–1437; translation from Differ. Uravn., 2010, V. 46, No. 10, 1421–1432 (Russian).

An inverse scattering problem for a class Sturm–Liouville operators on the half line

Kh. R. Mamedov
Mersin University, Mersin, Turkey
hanlar@mersin.edu.tr

We consider inverse scattering problem for the equation

$$-\psi'' + q(x)\psi = \lambda^2 \rho(x)\,\psi \quad (0 < x < +\infty), \tag{1}$$

with the boundary condition

$$-\left(\alpha_1\psi(0) - \alpha_2\psi'(0)\right) = \lambda^2\left(\beta_1\psi(0) - \beta_2\psi'(0)\right), \tag{2}$$

where λ is a spectral parameter, $q(x)$ is a real valued function satisfying the condition

$$\int_0^{+\infty} (1+x)\,|q(x)|\,dx < \infty, \tag{3}$$

$\rho(x)$ is a positive piecewise-constant function with a finite number of points of discontinuity, α_i, β_i $(i = 1, 2)$ are real numbers and $\gamma = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 > 0$.

The aim of the present paper is to investigate the direct and inverse scattering problem on the half line $[0, \infty)$ for the boundary value problem (1)–(3). The discontinuous version was studied by Gasymov [1], by Guseinov and Pasaev [2] by using the new (non-triangular) representation of Jost solution of the equation (1). When $\rho(x) \equiv 1$ in the equation (1) with the spectral parameter appearing in the boundary conditions the inverse problem on the half line was considered according to scattering data in [3, 4]. This type of boundary condition arises from a varied assortment of physical problems and other applied problems such as the study of heat conduction by Cohen [5].

1. M. G. Gasymov. The direct and inverse problem of spectral analysis for a class of equations with a discontinuous coefficient, In: *Non-classical methods in geophysics,* M. M. Lavrent'ev (Eds) . (Novosibirsk Nauka) 1977, 37–44 (in Russian)
2. I. M. Guseinov and R. T. Pashaev. On an inverse problem for a second-order differential equation, *Uspekhi Math Nauk,* 2002, 57, 147–148.
3. Kh. R. Mamedov. Uniqueness of the solution to the inverse problem with a spectral parameter in the boundary condition, *Math. Notes,* 2003, 74 (1), 136–140.
4. Kh. R. Mamedov. On the inverse problem for Sturm–Liouville operator with a nonlinear spectral parameter in the boundary condition, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 2009, 46 (6), 1243–1254, 1986.
5. D. S. Cohen. An integral transform associated with boundary conditions containing an eigenvalue parameter, *SIAM J. Appl. Math.,* 1966, 14 (5), 1164–1175.

An isolated solution to nonlinear two-point boundary value problem with parameter

B. B. Minglibayeva

Institute of mathematics and mathematical modelling MES RK, Almaty, Kazakhstan

bayan_math@list.ru

Consider the nonlinear two-point boundary value problem with a parameter for the system of ordinary differential equations

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \qquad t \in (0, T), \qquad x \in R^n, \qquad \mu \in R^m, \tag{1}$$

$$g\big(\mu, x(0), x(T)\big) = 0, \tag{2}$$

where $f : [0, T] \times R^n \times R^m \to R^n$, $g : R^m \times R^n \times R^n \to R^{n+m}$ are continuous, $\|x\| = \max\limits_{i=1:n} |x_i|$.

Let $C([0, T], R^n)$ denote the space of continuous functions $x : [0, T] \to R^n$ with a norm $||x||_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} ||x(t)||$.

Solution of the problem (1), (2) is a pair $(\mu^*, x^*(t))$, where the continuously differentiable on $(0, T)$ function $x^*(t) \in C([0, T], R^n)$ at $\mu = \mu^*$ satisfies the differential equation (1) and boundary condition (2).

The problem (1), (2) is a general kind of the two-point boundary value problem with parameter for ordinary differential equations solvable with respect to derivative. Here the unknown parameter μ is contained both in the differential equation, and in the boundary condition.

The particular cases of problem (1), (2) were considered in many works. The emphasize is paid to the case when $m = n$ and the boundary condition (2) has the form

$$x(0) = x^0, \qquad x(T) = x^1, \tag{2'}$$

where x^0, x^1 are given vectors.

The problem (1), (2′) can be viewed as a problem of control. Let the simulated process is described by the differential equation (1). Then the value of the parameter μ should be chosen so that the process having an initial state x^0, would have the desired state x^1 at the time $t = T$.

In the communication problem (1), (2) is investigated by the parametrization method [1]. The method consists in partition of the interval apart, the introduction of additional parameters and reducing the original problem to the equivalent multi-point boundary value problem with parameters. The algorithms for finding a solution to the equivalent boundary value problem are constructed. Each step of the algorithm consists of two parts: a) solving of the nonlinear system of equations with respect to the parameters, compiled by the initial data of the boundary value problem, and b) solving the Cauchy problems on corresponding intervals at the founded parameter values. The conditions for convergence of the algorithms that ensure the solvability of nonlinear two-point boundary value problem with a parameter are obtained. Definition of the isolated solution to nonlinear two-point boundary value problem with a parameter, which is a modification of the well-known definition for the nonlinear two-point boundary value problem without parameter, is introduced. The necessary and sufficient conditions for the existence of the isolated solution to the investigated boundary value problem with parameter are established in terms of the right-hand side of the differential equation and the boundary conditions.

1. D. S. Dzhumabaev and S. M. Temesheva. A Parametrization Method for Solving Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2007, Vol. 47, No. 1, pp. 37–61.

THE NECESSARY CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF LOCAL GINZBURG-LANDAU MINIMIZERS WITH PRESCRIBED DEGREES ON THE BOUNDARY

O. Misiats
Purdue University, West Lafayette, USA
omisiats@purdue.edu

We consider the minimization problem for the simplified Ginzburg-Landau type functional

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_G \left\{ |\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1-|u|^2)^2 \right\}, \tag{1}$$

in a smooth doubly connected domain $G = \Omega \setminus \omega \subset \mathbb{C}$. Note that any critical point of (1) satisfies the Ginzburg–Landau equation in G:

$$-\Delta u = \frac{1}{\varepsilon^2} u(1-|u|^2) \tag{2}$$

The solutions of (2) with isolated zeros (vortices) are of special importance since they model the observable physical states during phase transitions in superconductors. The existence of nontrivial solutions of (2) which would correspond to local minimizers of (1) in the class with so-called "semi-stiff" boundary conditions $\mathcal{J} := \{u \in H^1(G, \mathbb{C}) \,|\, |u| = 1 \text{ a.e. on } \partial G\}$ is a highly nontrivial issue. The work [1] established the existence of local minimizers in this class for small ε. The main tool in it was the *approximate bulk degree*:

$$\mathrm{abdeg}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_G u \times (\partial_{x_1} V \, \partial_{x_2} u - \partial_{x_2} V \, \partial_{x_1} u)\, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

where V solves $\Delta V = 0$ with $V = 1$ on $\partial\Omega$ and $V = 0$ on $\partial\omega$. The construction of the solutions of (1) was based on the study of the minimization problem

$$m_\varepsilon(p, q, d) := \inf\{E_\varepsilon(u);\, u \in \mathcal{J}_{pq}^{(d)}\}, \text{ with} \tag{4}$$

$$\mathcal{J}_{pq}^{(d)} = \{u \in \mathcal{J}, \deg(u, \partial\omega) = p, \deg(u, \partial\Omega) = q; d - 1/2 \le \mathrm{abdeg}(u) \le d + 1/2\}. \tag{5}$$

Here, the topological degree is given by $\deg(u, \gamma) := \frac{1}{2\pi}\int_\gamma u \times \frac{\partial u}{\partial \tau} \mathrm{d}\sigma$, where γ is a smooth closed curve and $u \in C^1(\gamma, \mathbb{S}^1)$. The following existence result holds [1]:

Theorem 1. *For any integers p, q and $d > 0$ ($d < 0$) with $d \ge \max\{p, q\}$ ($d \le \min\{p, q\}$) there exists $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(p, q, d) > 0$ such that the infimum in (4) is always attained, when $\varepsilon < \varepsilon_1$.*

It was conjectured in [1] that the condition $d \ge \max\{p, q\}$ ($d \le \min\{p, q\}$) is essential and in the contrary case there is a threshold value ε_0 s.t. for $\varepsilon < \varepsilon_0$ the minimizer in the minimization problem (4) is not attained. The proof of this conjecture is the main objective of this work. Our main results are:

Theorem 2. *Let $d > 0$, $d \le \min\{p, q\}$ (or $d < 0$, $d \ge \max\{p, q\}$) and either $p \ne d$ or $q \ne d$. Let u be a weak limit of a minimizing sequence for problem (4) (such a minimizing sequence always exists). Then $u \notin \mathcal{J}_{pq}^{(d)}$ when ε is sufficiently small.*

Theorem 3. *Let u be a weak limit of a minimizing sequence for problem (4) with $d = 0$ and $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \ne 0$ or $q \ne 0$. Then $u \notin \mathcal{J}_{pq}^{(d)}$ when ε is sufficiently small.*

Theorems 2 and 3 provide the necessary conditions for the existence of GL minimizers by imposing natural restrictions on the bulk degrees of stable GL solutions. These results also complement the Theorem 1 in the sense that they show that the conditions $d > 0$ ($d < 0$) with $d \ge \max\{p, q\}$ ($d \le \min\{p, q\}$) are essential rather than technical.

1. L. Berlyand and V. Rybalko. Solutions with vortices of a semi-stiff boundary value problem for the Ginzburg-Landau equation. J. Eur. Math. Soc., 2010, 12, 1497–1531.

About energy function for structurally stable diffeomorphisms of surfaces

T. M. Mitryakova
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
tatiana.mitryakova@yandex.ru

Energy function for dynamical system is a smooth function which decreases along trajectories out of the chain recurrent set and is constant on the chain component. First construction of energy function belongs to S. Smale [3] who proved in 1961 the existence of Morse energy function for gradient-like flows on a closed n-manifold ($n \geq 1$). In 1977 D. Pixton [2] constructed Morse energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on surfaces. Notice that such function does not exist in general even for Morse-Smale diffeomorphisms on closed 3-manifold (see, for example, [1], [2]).

In the present paper a class $S(M)$ of preserving orientation structurally stable diffeomorphisms with one-dimensional attractors and repellers given on orientable closed surfaces M is considered. More precisely diffeomorphisms $f \in S(M)$ satisfy the following conditions: 1) every non-trivial basic set of the diffeomorphism $f \in S(M)$ is an attractor or repeller; 2) set of heteroclinic orbits belong to the intersection of stable and unstable manifolds of saddle periodic points of the trivial basic sets is finite. Following theorem takes place.

Theorem. *Any diffeomorphism $f \in S(M)$ possesses an energy function.*

The results were obtained in collaboration with V. Z. Grines and O. V. Pochinka. The work was supported by the Government of Russian Federation (grant no. 11. G34.31.0039), by the Russian Foundation for Basic Research (grants no. 11-01-12056-ofi-m-2011 and no. 12-01-00672-a), and by the Ministry of Education and Science of Russian Federation (state contract no. 1.1907.2011 for 2012–2014).

1. V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka. On existence of energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds. DAN, 2011, v. 440 (1), p.7–10.
2. Pixton D. Wild unstable manifolds. Topology, 1977, v. 16 (2), p. 167–172.
3. Smale S. On gradient dynamical systems. Ann. Math., 1961, p. 199–206.

One-dimensional Schrödinger operators with singular matrix potentials

V. M. Molyboga
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
molyboga@imath.kiev.ua, vm.imath@gmail.com

In the talk we establish the non-symmetric generalization of the Glazman–Povzner–Weinholtz theorem for one-dimensional Schrödinger operators with strongly singular matrix potentials from the negative Sobolev space $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{m\times m})$. In the particular case when the potential is a self-adjoint matrix if the preminimal operator is lower semibounded then it is essentially self-adjoint.

The result is new in the case of L^2-potentials and in the scalar case $m = 1$ as well.

For more details see [1].

The talk is based on the joint work with Prof. V. A. Mikhailets.

1. V. Mikhailets, V. Molyboga, *Remarks on Schrödinger operators with singular matrix potentials*, Methods Funct. Anal. Topology 19 (2003), no. 2, to appear.

Synchronization phenomena in large size systems of coupled oscillators

O. E. Omel'chenko
Weierstrass Institute, Berlin, Germany
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Oleh.Omelchenko@wias-berlin.de

Systems of coupled oscillators are widely used to describe collective processes of self-organization in various applications, including neuroscience, laser dynamics, power grids, coupled nano-oscillators, or chemical oscillatory cells. In spite of the different nature and complexity of individual oscillatory units, many important features of their collective behaviour can be adequately reproduced by a paradigmatic model of N globally coupled phase oscillators

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \omega_k - \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_k(t) - \theta_j(t) + \alpha), \quad k = 1, \dots, N, \tag{1}$$

where each $\theta_k \in \mathbb{R} \bmod 2\pi$ denotes the phase of the k-th oscillator. The oscillators are supposed to have different natural frequencies ω_k drawn from a certain probability distribution $g(\omega)$ and interact according to the right-hand sides of Eqs. (1), where $K > 0$ and $|\alpha| < \pi/2$ denote the *coupling strength* and the *phase lag parameter*, respectively.

In the context of large N limit, various types of continuum limit equations are often used as a basic mathematical tool for studying the statistically stationary dynamics of solutions to Eqs. (1). The starting point of this approach is to describe an infinite oscillator system by a probability density f giving the probability to find a certain oscillator at a given time moment t at a given phase θ. This density follows a continuity equation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(fv) = 0 \tag{2}$$

where the phase velocity v is given by the original oscillator system with an integral version of the coupling term. Thus Eq. (2) turns out to be a nonlinear integro-differential equation. Using a frequency dependent version of the Ott–Antonsen invariant manifold theory [1] we can reduce Eq. (2) to an evolution equation in a Banach space of continuous functions. This provides a significant simplification and allows us to formulate a general approach for the analysis of synchronization transitions in Eqs. (1). In particular, we reveal a series of non-universal transitions which up to now were considered as impossible [2].

In conclusion we discuss some generalizations of the suggested approach to spatially extended models of coupled oscillators, including bifurcation analysis of coherence-incoherence patterns in systems with non-local coupling [3].

1. E. Ott and T. M. Antonsen. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators. Chaos, 2008, 18, p. 037113.
2. O. E. Omel'chenko and M. Wolfrum. Nonuniversal transitions to synchrony in the Sakaguchi-Kuramoto model. Phys. Rev. Lett., 2012, 109, p. 164101.
3. O. E. Omel'chenko. Coherence-incoherence patterns in a ring of non-locally coupled phase oscillators. WIAS Preprint No. 1777, 2013.

Some convergence estimates for abstract second order singularly perturbed Cauchy problems

A. Perjan, G. Rusu
Moldova State University, Chisinau, Moldova
aperjan1248@gmail.com, rusugalinamoldova@gmail.com

Let H be a real Hilbert space endowed with the scalar product $(\cdot,\cdot)$ and the norm $|\cdot|$. Let $A_i : D(A_i) \subset H \to H$, $i = 0, 1$, be two linear self-adjoint operators and $B : D(B) \subset H \to H$ a local Lipschitzian and monotone operator.

Consider the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} \varepsilon\Big(u_\varepsilon''(t) + A_1 u_\varepsilon(t)\Big) + u_\varepsilon'(t) + A_0 u_\varepsilon(t) + B\big(u_\varepsilon(t)\big) = f_\varepsilon(t), \quad t \in (0,T), \\ u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}, \quad u_\varepsilon'(0) = u_{1\varepsilon}, \end{cases} \tag{P_ε}$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter($\varepsilon \ll 1$), $u_\varepsilon, f_\varepsilon : [0,T) \to H$.

We investigate the behavior of solutions u_ε to the problems (P_ε) when $u_{0\varepsilon} \to u_0$, $f_\varepsilon \to f$ as $\varepsilon \to 0$. We establish a relationship between solutions to the problems (P_ε) and the corresponding solution to the following unperturbed problem:

$$\begin{cases} v'(t) + A_0 v(t) + B\big(v(t)\big) = f(t), \quad t \in (0,T), \\ v(0) = u_0. \end{cases} \tag{P_0}$$

An application to singularly perturbed problems of hyperbolic-parabolic type with stationary part defined by strongly elliptic operators of high order is presented.

The finite-dimensional representations of differentiations in functional rings and their applications

A. K. Prykarpatski
The Ivan Franko State Pedagogical University of Drohobych, Lviv region, Ukraine
pryk.anat@ua.fm, pryk.anat@gmail.com

A differential-algebraic approach to studying the Lax type integrability of the generalized Riemann type hydrodynamic hierarchy, proposed in [1], is developed. In addition to the Lax type representation, found before in [2], another Lax type representation is constructed in exact form by means of a new differential-functional technique. The related bi-Hamiltonian integrability and compatible Poisson structures of the generalized Riemann type hierarchy are analyzed by means of the symplectic and gradient-holonomic methods. An application of the devised differential-algebraic approach to other Riemann and Vakhnenko type hydrodynamic systems is presented. In particular, concerning the following differential constraints

$$D_t u = v, \qquad D_t v = \bar{z}_x^2, \qquad D_t \bar{z} = 0, \tag{1}$$

the representation proposition is proved in the ring $\mathcal{K} := \mathbb{R}\{\{x,t\}\}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition. *The Riemann type hydrodynamic flow* (1) *is a bi-Hamiltonian dynamical system on the functional manifold M_3 with respect to two compatible Poissonian structures $\vartheta, \eta : T^*(M_3) \to T(M_3)$*

$$\vartheta := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z^{1/2} D_x z^{1/2} \end{pmatrix}, \eta := \begin{pmatrix} \partial^{-1} & u_x \partial^{-1} & 0 \\ \partial^{-1} u_x & v_x \partial^{-1} + \partial^{-1} v_x & \partial^{-1} z_x - 2z \\ 0 & z_x \partial^{-1} + 2z & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

possessing an infinite hierarchy of mutually commuting conservation laws and a non-autonomous Lax representation of the form

$$D_t f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda z_x & u_x \end{pmatrix} f,$$

$$D_x f = \begin{pmatrix} \lambda^2 u\sqrt{z} & \lambda v\sqrt{z} & z \\ -\lambda^3 tu\sqrt{z} & -\lambda^2 tv\sqrt{z} & -\lambda tz \\ \lambda^4(tuv - u^2) - \frac{\lambda^2 u_x}{\sqrt{z}} & -\frac{\lambda v_x}{\sqrt{z}} + \lambda^3(tv^2 - uv) & \lambda^2\sqrt{z}(u - tv) - \frac{z_x}{2z} \end{pmatrix} f,$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ *is an arbitrary spectral parameter and* $f \in \mathcal{K}$*.*

1. Prykarpatsky A. K., Artemovych O. D., Popowicz Z., Pavlov M. V. Differential-algebraic integrability analysis of the generalized Riemann type and Korteweg–de Vries hydrodynamical equations. J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 295205 (13 pp).
2. Popowicz Z., Prykarpatsky A. K. The non-polynomial conservation laws and integrability analysis of generalized Riemann type hydrodynamical equations. Nonlinearity, 23 (2010), p. 2517–2537.

On oscillation of nonlinear differential equations with a damping term

Y. V. Rogovchenko

University of Agder, 4604 Kristiansand, Norway

yuriy.rogovchenko@uia.no

Differential equations with damping terms provide a natural framework for many problems arising in astrophysics, atomic physics, gas and fluid mechanics, etc. Therefore, analysis of the asymptotic behavior of solutions to such equations is important for applications. In particular, oscillatory and non-oscillatory behavior of solutions to various classes of nonlinear differential and functional differential equations has always attracted attention of researchers. In this talk, we discuss oscillation of nonlinear differential equations of the form

$$(r(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0, \tag{1}$$

where $t \geq t_0,\ t_0 \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty),\ r \in \mathrm{C}^1([t_0, +\infty), (0, +\infty)),\ p, q \in \mathrm{C}([t_0, +\infty), \mathbb{R})$ and $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Our goal is not only to demonstrate that more efficient oscillation criteria for equation (1) can be established by refining the standard integral averaging technique [2], but to show also that known results can be enhanced. In particular, re-visiting the well-known Yan's oscillation theorem [4] for a linear differential equation

$$(r(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0,$$

we eliminate one of its fundamental conditions [3].

We conclude the talk presenting new oscillation criteria for a nonlinear differential equation

$$\left(r(t)\left(x'(t)\right)^{\gamma}\right)' + p(t)\left(x'(t)\right)^{\gamma} + q(t)f(x(t)) = 0, \tag{2}$$

where $t \geq t_0 > 0$, $\gamma \geq 1$ is a ratio of odd natural numbers, the functions r, p, and q are as above, $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $xf(x) > 0$ for $x \neq 0$, $f(x)/x^{\gamma} \geq \mu$, for some $\mu > 0$ and for all $x \neq 0$, and, for all $t \geq t_0$, the function $q(t)$ is non-negative and does not vanish eventually [1].

One should note that oscillation results reported for equations (1) and (2) can be also extended to more general classes of equations

$$(r(t)\psi(x(t))x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0$$

and

$$\left(r\,(t)\,\psi(x(t))\,(x'\,(t))^{\gamma}\right)' + p(t)\,(x'\,(t))^{\gamma} + q(t)f(x(t)) = 0,$$

where $\psi \in \mathrm{C}^1\left([t_0, +\infty)\,, (0, +\infty)\right)$.

1. T. Li, Yu. V. Rogovchenko, S. Tang. Oscillation of second-order nonlinear differential equations with damping, Mathematica Slovaca, in press.
2. Yu. V. Rogovchenko, F. Tuncay. Oscillation criteria for second-order nonlinear differential equations with damping, Nonlin. Anal., 69 (2008), 208–221.
3. Yu. V. Rogovchenko, F. Tuncay. Yan's oscillation theorem revisited, Appl. Math. Lett., 22 (2009), 1740–1744.
4. J. Yan. Oscillation theorems for second order linear differential equations with damping, Proc. Amer. Math. Soc., 98 (1986), 276–282.

Numerical-analytic method for periodic solutions with interval halving

A. Rontó[1], M. Rontó[2], N. Shchobak[3]

[1]Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Brno

[2]University of Miskolc, Hungary

[3]Uzhgorod National University, Ukraine

ronto@math.cas.cz, matronto@uni-miskolc.hu, natasha.shchobak@gmail.com

We analyse conditions of applicability of the numerical-analytic method (see, e. g., [1]) for the periodic boundary value problem

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, T]; \qquad u\,(0) = u(T), \tag{1}$$

where $T \in (0, \infty)$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ and

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K\,|x_1 - x_2| \tag{2}$$

for all $\{x_1, x_2\} \subset D$ and $t \in [0, T]$, where K is a square matrix of dimension n with non-negative elements and $D \subset \mathbb{R}^n$ is the closure of a bounded convex domain. The inequality signs and the operator $|\cdot|$ for vectors are understood componentwise. The same convention is adopted for the operations "max" and "min".

For any non-negative vector $r \in \mathbb{R}^n$, with the given domain D, we associate the set $D(r) \subset D$ by putting $D(r) := \{z \in D : B(z, r) \subset D\}$, where $B(z, r) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - z| \leq r\}$. Clearly, $D(r_1) \subset D(r_2)$ for $r_1 \geq r_2$, and $D(r)$ is increasing to D as $r \to 0$. It is known (see, e. g., [1, Theorem 3.17]) that the numerical-analytic method is applicable provided that the conditions

$$r(K) < \frac{10}{3T}, \tag{3}$$

$$D\Big(\frac{T}{4}\delta_{[0,T],D}(f)\Big) \neq \varnothing, \tag{4}$$

hold, where $\delta_{J,D}(f) := \max_{(t,z)\in J\times D} f(t,z) - \min_{(t,z)\in J\times D} f(t,z)$ for any interval $J \subseteq [0,T]$. In (2), $r(K)$ stands for the spectral radius of the matrix K.

We show [2, 3] that, after a suitable modification based on the interval halving, the method turns out to be applicable, in particular, if (2) and (3) are replaced by the conditions

$$r(K) < \frac{20}{3T}, \tag{3$'$}$$

$$D\Big(\frac{T}{8}\delta_{[0,T],D}(f)\Big) \neq \varnothing. \tag{4$'$}$$

Assumptions (3′), (4′) are twice as weak as (3), (4). The modification can be carried out repeatedly, so that, e. g., (4′) takes the form $D\big(2^{-k-2}T\delta_{[0,T],D}(f)\big) \neq \varnothing$ on the kth step. The modified numerical-analytic scheme is thus applicable however large the eigenvalues of K in the Lipschitz condition (2) may be. It can also be used to study the solvability of (1) [3].

1. Rontó A. and Rontó M. Successive approximation techniques in non-linear boundary value problems for ordinary differential equations. In Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. IV, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam 2008:441–592.
2. Rontó, A. and Rontó M. Periodic successive approximations and interval halving, Miskolc Math. Notes, Vol. 12, No. 2 (2012), 459–482.
3. Rontó, A. Ronto, M., and Shchobak N. Constructive analysis of periodic solutions with interval halving, Boundary Value Problems, 2013, 2013:57, DOI: 10.1186/1687-2770-2013-57.

Multiple solutions in boundary value problems for ordinary differential equations

F. Zh. Sadyrbaev
University of Latvia, Riga, Latvia
felix@latnet.lv

We consider as a sample boundary value problems of the type

$$x'' + \lambda x = f(t,x), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{2}$$

where nonlinearity f is continuous and bounded in modulus, λ is a parameter. The problem is known to have a classical ($C^2[0,1]$) solution if the homogeneous problem

$$x'' + \lambda x = 0, \tag{3}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0 \tag{4}$$

has only the trivial (the zero) solution.

If a nonlinearity f is not bounded, the existence of a solution generally cannot be guaranteed. In some cases the right side in (1) can be modified so that the new one F in a modified equation

$$x'' + \lambda x = F(t,x), \tag{5}$$

is bounded and the modified problem (5) has then a solution $x(t)$. Whether this solution solves also the original equation (1) depends on the estimates of F and x.

The linear part $x'' + \lambda x$ can be described in terms of oscillatory behavior. A solution of the boundary value problem also can be described in similar terms. It appears that the quasi-linear problem has a solution with the same oscillatory properties that the respective linear part has.

This lay a basis for the following treatment of boundary value problems of the form

$$x'' = f(t,x), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \tag{6}$$

Define a quasilinear problem

$$x'' + \lambda_k x = F_k(t,x), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{7}$$

which has a solution $x_k(t)$ with properties induced by the linear part and show that $x_k(t)$ solves also the problem (6). Repeat this process multiply with different linear parts and prove the existence of multiple solutions of the boundary value problem (6).

We give examples of applying this technique.

Solution of B-hyperbolic equation

E. L. Shishkina
Voronezh State University, Voronezh, Russia
ilina_ dico@mail.ru

Let $\mathbb{R}_n^+$ denote an Euclidean space of points $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_1 > 0, ..., x_n > 0$ and the multiindex $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ runs through fixed positive numbers, $|\gamma| = \gamma_1 + ... + \gamma_n$. The space $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+) = S_{ev}$ is the subspace of the Schwartz function space that consists of functions $\varphi(x)$ even in each variable $x_1, ..., x_n$.

The weighted spherical mean is denoted by formula (compare with formulas in [1], [2])

$$M_r^\gamma f(x) = \frac{1}{|S_1^+(n)|_\gamma} \int\limits_{S_1^+(n)} T_x^{ry} f(x) \prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i} dS,$$

where $S_1^+(n) = \{x \in \mathbb{R}_n^+ : |x| = 1\}$,

$$T_x^y f(x) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int\limits_0^\pi ... \int\limits_0^\pi \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1} \beta_i \times$$

$$\times f(\sqrt{x_1^2 - 2x_1 y_1 \cos\beta_1 + y_1^2}, ..., \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\beta_i + y_n^2})\, d\beta,$$

The constant $|S_1^+(n)|_\gamma$ was calculated in [3] p. 20, formula (1.2.5) where N=n should be taken.

Following [4] we introduce the operator $\Delta_\gamma = \sum_{i=1}^n B_{\gamma_i}$, where B_{γ_i} is Bessel operator: $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad i = 1, ..., n$.

The solution of the B-hyperbolic equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{t}\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle_\gamma u(x,t), \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad x \in \mathbb{R}_n^+, \qquad t \geq 0,$$

such that

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x), \qquad \varphi(x) \in S_{ev},$$

for $3 \leq n+|\gamma|-\alpha$, $n+|\gamma|=2k+2$, $k=0,1,2,...$ is given by formula

$$u(x,t)=C_n(\alpha,\gamma)(-1)^k(B_\alpha)_t^k\int\limits_0^{+\infty}{}_2F_1\left(\frac{2-\alpha}{2},\frac{1}{2},\frac{n+|\gamma|}{2};\frac{|\xi|^2}{t^2}\right)M_r^\gamma\varphi(x)r^{n+|\gamma|-1}dr,$$

where

$$C_n(\alpha,\gamma)=\frac{2^{\frac{|\gamma|-n-1}{2}}}{\sqrt{\pi}}|S_1^+(n)|_\gamma\prod_{j=1}^n\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right).$$

1. John F. Plane Waves and Spherical Means. Applied to Partial Differential Equations. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1981.
2. Kipriyanov I. A., Zasorin Y. V. A Fundamental Solution of the Wave-Equation with Several Variables, and the Huygens Principle, Differential Equations, 28, 3, 1992, pp. 383–393
3. Lyakhov L. N. B-Hypersingular Integrals and Their Applications to the Description of Kipriyanov Function Classes and to Integral Equations with B-Potential Kernels. – Lipetsk: Gos. Pedagog. Univ., 2007.
4. Kipriyanov I. A. Singular Elliptic Boundary Value Problems. – Moscow: Nauka, 1996.

Global existence and long-time behaviour of nonlinear equation of Schredinger type

Kamal N. Soltanov

Hacettepe University, Ankara, TURKEY

soltanov@hacettepe.edu.tr ; sultan_kamal@hotmail.com

We consider the following problem for the nonhomogeneous nonlinear Schrödinger equation

$$i\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+f\left(x,u\right)=h\left(t,x\right),\quad (t,x)\in R_+\times\Omega\equiv Q, \tag{1}$$

$$u\left(0,x\right)=u_0\left(x\right),\quad x\in\Omega\subset R^n,\ n\geq 1;\quad u\left|_{\ R_+\times\partial\Omega}\right.=0, \tag{2}$$

where $h\left(t,x\right)$ and $u_0\left(x\right)$ are complex functions, $f\left(x,\tau\right)$ is a distribution (generalized function) with respect to variable $x\in\Omega$, Ω is a bounded domain with sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, $i\equiv\sqrt{-1}$. We investigate this problem in the case, when the function $f(x,t)$ can be represented as $f\left(x,u\right)=q\left(x\right)\left|u\left(t,x\right)\right|^{p-2}u\left(t,x\right)+a\left(x\right)\left|u\left(t,x\right)\right|^{\widetilde{p}-2}u\left(t,x\right)$, i.e. the function f has the growth with respect to unknown function of the polynomial type, where $a:\Omega\longrightarrow R$ is some function and $q:\Omega\longrightarrow R$ is a generalized function, $p\geq 2$, $\widetilde{p}\geq 2$, $h\in L_2\left(Q\right)$ (i.e. $h\left(t,x\right)\equiv h_1\left(t,x\right)+ih_2\left(t,x\right)$ and $h_j\in L_2\left(Q\right)$, $j=1,2$).

In this paper we study problem (1)–(2) in the case when f have the above representation and the function q is a generalized function and the beahviour of the solution. Moreover here for the proof of the existence theorem of the problem is used some different method, which allow us several other possibility. It should be noted that the steady-state case of the problem of such type were studied in [1]. Here we study problem (1)–(2) globally in the dynamical case, which in [2] is studied for $t\in(0,T)$, $T<\infty$. Here an existence theorem for the problem (1)–(2) is proved in the model case when $f\left(x,u\right)$ only has the above expression.

We have defined how to understand the equation (1) with use of representation of certain generalized functions and properties of some special class of functions (see, for example, [3]). Later on we conducted variants of the general results from [2], on which the proof of the solvability theorem is based and is studied the behaviour of the solutions of the considered problem under certain additions conditions.

1. Soltanov K. N. On a Nonlinear Equation with Coefficients which are Generalized Functions. Novi Sad J. Math. (2011) 41, No. 1, 43–52
2. Soltanov K. N. Perturbation of the mapping and solvability theorems in the Banach space. Nonlinear Analysis: T.M.&A. (2010), 72, 1.
3. Soltanov K. N. On Nonlinear Equation of Schrödinger type. arXiv:1208.2560v1, (2012), 16 p.

Resonant problems for ordinary differential equations

N. Sveikate
Daugavpils University, Daugavpils, Latvia
nsveikate@inbox.lv

We consider resonant boundary value problem of the form

$$x'' + (i\pi)^2 x = f(t, x), \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{2}$$

where $i = 1, 2, \ldots$, $t \in I := [0, 1]$.

In the paper we will give some conditions when resonant boundary value problem (1), (2) is solvable.

We use the specific quasi-linearization approach [3], [4]. We do not need Landesman–Lazer condition [2] in our result.

1. First modify equation adding a linear part so that the resulting linear part in not resonant yet

$$x'' + (i\pi + \varepsilon)^2 x = (2i\pi\varepsilon + \varepsilon^2)x + f(t, x) := F(t, x); \tag{3}$$

2. choose constant N and truncate the right side

$$x'' + (i\pi + \varepsilon)^2 x = F_N(t, x) := F(t, \delta(-N, x, N)); \tag{4}$$

3. check the inequality

$$\Gamma \cdot M \leq N, \tag{5}$$

where $\Gamma = \max\limits_{0 \leq t,s \leq 1} |G(t, s)|$ is the estimates of the Green's function associated with the linear part in (4) and boundary conditions (2), $M = \sup_{I \times R} |F_N(t, x)|$.

Theorem. *Suppose that* $(i\pi)^2$ *and* N *can be found such that the inequality* (5) *fulfil. Then the resonant problem* (1), (2) *has a solution.*

Acknowledgement. *This work has been supported by the European Social Fund within the Project "Support for the implementation of doctoral studies at Daugavpils University" Agreement Nr.2009/0140/1DP/1.1.2.1.2/09/IPIA/VIAA/015*

1. R. P. Agarwal, D. O'Regan. Ordinary and partial differential equations. – New York: Springer, 2009.
2. E. M. Landesman, A. C. Lazer. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance. Journal of Mathematics and Mechanics, 1970, vol. 19, pp. 609–623.
3. F. Sadyrbaev, I. Yermachenko. Multiple solutions of two-point nonlinear boundary value problems. Nonlinear Analysis: TMA, 2009, vol. 71, N. 12, e176–e185.

4. I. Yermachenko, F. Sadyrbaev. Quasilinearization and multiple solutions of the Emden-Folwer type equation. Mathematical Modeling and Analysis, 2005, vol. 10, pp. 41–50.

Robustness of Exponential Dichotomies of Boundary-Value Problems for General First-Order Hyperbolic Systems

V. I. Tkachenko
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine
vitk@imath.kiev.ua

This is a joint work with I. Ya. Kmit and L. Recke.

We examine the robustness of exponential dichotomies of boundary-value problems for general linear first-order one-dimensional hyperbolic system

$$(\partial_t + a(x,t,\varepsilon)\partial_x + b(x,t,\varepsilon))u = 0, \quad x \in (0,1),$$

subjected to boundary conditions

$$u_j(0,t) = \sum_{k=m+1}^{n} p_{jk}(t)u_k(0,t) + \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(t)u_k(1,t), \quad 1 \le j \le m,$$
$$u_j(1,t) = \sum_{k=1}^{m} q_{jk}(t)u_k(0,t) + \sum_{k=m+1}^{n} q_{jk}(t)u_k(1,t), \quad m < j \le n.$$

Here $u = (u_1, \dots, u_n)$ is a vector of real-valued functions, $a = diag(a_1, \dots, a_n)$ and $b = \{b_{jk}\}_{j,k=1}^n$ are matrices of real-valued functions, $0 \le m \le n$ are fixed integers, and ε is small positive parameter.

It is assumed that the boundary conditions guarantee an increase in the smoothness of solutions in a finite time interval.

We show that the dichotomy survives in the space of continuous functions under small perturbations of all coefficients in the differential equations.

1. I. Ya. Kmit, L. Recke, V. I. Tkachenko. Robustness of Exponential Dichotomies of Boundary-Value Problems for General First-Order Hyperbolic Systems. Ukrain. Mat. Zh, 2013, v. 65, no 2, pp. 236–251.

Ill-posed optimal control problems for linear elliptic variational inequalities

N. V. Zadoianchuk[1], O. P. Kupenko[2]
[1]Taras Shevchenko Kiev National University, Kiev, Ukraine
[2]National Mining University, Dnipropetrovsk, Ukraine
zadoianchuk.nv@gmail.com, kogut_ olga@bk.ru

We study an optimal control problem for a linear degenerate elliptic variational inequality with homogeneous Dirichlet boundary conditions. The control is taken as the matrix $A \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^{\frac{N(N+1)}{2}})$ of the coefficients in the main part of the elliptic operator. The most important feature of such controls is the fact that the eigenvalues of the matrix A may vanish on subsets with zero Lebesgue measure and be unbounded.

Namely we deal with a following optimal control problem in coefficients

$$I(A, y) = \int_\Omega |y(x) - y_d(x)|^2 \, dx + \int_\Omega (\nabla y(x), A(x) \nabla y(x))_{\mathbb{R}^N} \, dx,$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) dx + \int_\Omega y\,(v - y)\, dx \geq \int_\Omega f(v - y)\, dx \quad \forall\, v \in K_A.$$

Here, $f \in L^2(\Omega)$ is a given distribution, K_A is a convex closed subset of the space $W_0^{1,1}(\Omega)$, and A is a measurable non negative square symmetric matrix on a bounded open domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) such that A is bounded in $BV(\Omega; \mathbb{R}^{N(N+1)/2})$. We assume that for every admissible matrix A there exist two non-negative $L^1(\Omega)$-functions ζ and β such that $\zeta^{-1} \in L^1(\Omega)$, $\zeta^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$, and

$$\zeta(x) \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^N} \leq (A(x)\xi, \xi)_{\mathbb{R}^N} \leq \beta(x) \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^N} \quad \text{a.e. in } \Omega\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Such matrices are sometimes referred to as matrices with degenerate spectrum. Because of this, the problem is ill-possed, in general. It means that there are no reasons to assume that for every $f \in L^2(\Omega)$ and $A \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^{N(N+1)/2})$, the variational inequality admits at least one weak solution in $H_0^1(\Omega)$. Thus, it makes impossible to apply classical theorems to establish solvability of the corresponding variational inequality and, hence, the regularity of the optimal control problem associated with it.

Having formulated the optimal control problem in coefficients in terms of the corresponding weighted Sobolev spaces, we are facing another kind of challenge: changing the control matrix changes not only the solution space $H(\Omega; A\, dx)$, but the control object itself. In fact, it means that the set of admissible solutions to the above optimal control problem is a family of pairs, where each belongs to the correspondent space. Therefore, in this situation there are several possible settings of the variational inequality and optimal control problem associated with it, which depend on the choice of solution space. The main questions are: what is the right setting of the optimal control problem with L^1-controls in coefficients, and what is the right class of admissible solutions to the above problem? As we show in this paper, the precise answer for the question of existence or non-existence of optimal solutions heavily depends on the class of chosen admissible controls.

We introduce the class of H-optimal admissible solutions and discuss the regularity of the corresponding optimal control problem. Using the direct method in the Calculus of Variations, we prove the existence of the so-called H-optimal solutions to the original problem.

Parabolic differential equations with “maxima”

A. Zeinev, V. Todorova, D. Kolev, N. Kitanov
UCTM, Sofia, Bulgaria
zejnev@abv.bg

In this presentation we study a class of reaction-diffusion equations under initial and boundary conditions and with nonlinear reaction terms containing “maxima”. By assuming that initial density as well the boundary data are Holder continuous, and reaction functions have different rates we give two stability criteria. We extend the existence and uniqueness result for the parabolic equations with delay to the case with “maxima”. The uniqueness and asymptotic behavior of the solutions are discussed as well. The above mentioned equations are used for mathematical simulation in theoretical physics, thermodynamics, chemistry, mechanics, biology, ecology, etc.

1. D. Bainov., D. Milev. Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay, Adam Hilger, Bristol. Philadelphia and New York, IOP Publishing Ltd 1991.
2. T. Donchev, N. Kitanov, D. Kolev V. Stability for the Solutions of Parabolic Equations with Maximal, Pan American Mathematical Journal, vol. 20, (2010), N 2, 119,
3. C. Pao. Nonlinear Parabolic and Eliptic Equations, Plenum Press, New York, 1992.

Корректная разрешимость нелокальной задачи для системы уравнений в частных производных

Г. А. Абдикаликова

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

a_a_galiya@mail.ru

Рассматривается на $\overline{\Omega}=\{(x,t): t\leq x\leq t+\omega, 0\leq t\leq T\}$, $T>0$, $\omega>0$ краевая задача с нелокальным условием для системы уравнений в частных производных

$$D\Big[\frac{\partial}{\partial x}u\Big]=A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+S(x,t)u+f(x,t),\quad u\in R^n, \tag{1}$$

$$B(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,0)+C(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+T,T)=d(x),\quad x\in[0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,t)=\Psi(t),\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

где $D=\frac{\partial}{\partial t}+\sum\limits_{k=1}^{n}\Lambda_k\frac{\partial}{\partial x_k}$, $\Lambda_k=diag\,[a_k,a_k,...,a_k]$; симметрическая $(n\times n)$-матрица $A(x,t)$, а также $S(x,t)$ — $(n\times n)$-матрица, $f(x,t)$ — n-вектор-функция непрерывны по x и t на $\overline{\Omega}$; $B(x)$, $C(x)$ — $(n\times n)$-матрицы и n-вектор-функция $d(x)$ — непрерывны на $[0,\omega]$; функция $\Psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$.

В сообщении устанавливаются коэффициентные достаточные условия корректной разрешимости задачи (1)–(3).

Следуя [1]–[2], путем введения новой неизвестной функции $v(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ нелокальная задача (1)–(3) сводится к эквивалентной задаче, состоящей из системы уравнений с одинаковой главной частью по Куранту и функционального соотношения, связывающая исходную и новую функции. Полученная нелокальная задача приводится к семейству обыкновенных дифференциальных уравнений на $\overline{H}=\{(\xi,\tau):\ 0\leq\xi\leq\omega,\ 0\leq\tau\leq T\}$

$$\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\tau}=\widetilde{A}(\xi,\tau)\widetilde{v}+\widetilde{S}(\xi,\tau)\widetilde{u}(\xi,\tau)+\widetilde{f}(\xi,\tau),\quad \tau\in[0,T], \tag{4}$$

$$\widetilde{B}(\xi)\widetilde{v}(\xi,0)+\widetilde{C}(\xi)\widetilde{v}(\xi,T)=\widetilde{d}(\xi),\quad \xi\in[0,\omega], \tag{5}$$

$$\widetilde{u}(\xi,\tau)=\Psi(\tau)+\int\limits_{\tau}^{\xi+\tau}\widetilde{v}(\zeta,\tau)d\zeta,\quad \tau\in[0,T]. \tag{6}$$

При известной непрерывной функции $\widetilde{u}(\xi,\tau)$ задача (4)–(5) является семейством двухточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\tau}=\widetilde{A}(\xi,\tau)\widetilde{v}+\widetilde{G}(\xi,\tau),\quad \tau\in[0,T], \tag{7}$$

с граничным условием (5) и для ее решения применяется метод параметризации [3].

Теорема. *Пусть двухточечная краевая задача* (7), (5) *корректно разрешима. Тогда последовательность пар приблежения* $(\widetilde{v}^{(k)}(\xi,\tau),\,\widetilde{u}^{(k)}(\xi,\tau))$ *равномерно сходится к единственному решению задачи* (4)–(6) *и задача* (1)–(3) *корректно разрешима.*

1. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Диффер. уравнения. – 2005. – Т. 41, No 3. – С. 337–346.
2. Абдикаликова Г. А. Корректная разрешимость нелокальной краевой задачи // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2007. No 10 (74). – С. 162–165.
3. Джумабаев Д. С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, No 1. – С. 50–66.

Предельное поведение решений импульсных систем

О. В. Анашкин, О. В. Митько

Таврический национальный университет, Симферополь, Украина

anashkin@crimea.edu

Доклад посвящен предельному поведению решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени τ_k

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x) = Ax + g(x), \quad t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k + 0) = B_k x(\tau_k) + h_k(x(\tau_k)), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $g(x) = o(\|x\|)$, $h_k(x) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$, $\det B_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Предполагается, что множество $\{\tau_k\}$ не имеет конечных точек сгущения. Решения $x(t)$ системы (1) имеют в точках $t = \tau_k$ разрывы первого рода и предполагаются непрерывными слева.

Одной из первых статей, посвященных этому типу уравнений, была работа [1]. В монографии [2] были заложены основы общей теории систем с импульсным воздействием.

Рассмотрим систему вида (1) на плоскости, т.е. $n = 2$. Пусть матрица A имеет пару комплексных собственных значений $\lambda = \alpha \pm i\beta$. Хорошо известно, что при определенных условиях в системе уравнений (1) без импульсных воздействий наблюдается бифуркация рождения устойчивого предельного цикла при прохождении величины α через нуль в сторону возрастания. В системе с импульсными воздействиями (1) наблюдается аналогичное явление рождения разрывного “предельного цикла”. При этом в системе вида (1) критическое состояние, вызывающее качественное изменение расположения траекторий, определяется взаимодействием матрицы A линеаризации поля скоростей f с линейной частью B_k оператора импульсного воздействия. Поэтому устойчивый “предельный цикл” может возникать как при положительных, так и при отрицательных значениях α.

В докладе приводятся результаты численных экспериментов с характерными модельными системами

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2 + a x_1^3, \quad t \neq \tau_k, \quad \dot{x}_2 = \alpha x_2 + \beta x_1 + a x_2^3, \quad t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k + 0) = \exp(\alpha_{k-1}\theta_{k-1}) x(\tau_k), \quad x = (x_1, x_2), \end{gathered} \tag{2}$$

где $\tau_k = \tau_{k-1} + \theta_{k-1}$. Последовательности θ_k и α_k являются p-периодическими. При определенном выборе этих последовательностей в системе (2) можно наблюдать как устойчивые, так и неустойчивые разрывные “предельные циклы”. В общем случае движение, описываемое такими предельными циклами, является почти периодическим. Аналогичное поведение траекторий наблюдается и у более сложных систем вида (1). Характер устойчивости возникающего предельного режима устанавливается при помощи достаточных условий устойчивости из работы [3].

1. Мышкис А. Д., Самойленко А. М. Системы с толчками в заданные моменты времени. Матем. сборник, 1967, **74(116)**, № 2, 202–208.
2. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием – Киев: Вища школа, 1987.
3. Анашкин О. В., Митько О. В. Достаточные условия устойчивости для нелинейных систем с импульсным воздействием. Динамические системы, 2011, 1 (29), № 1, 5–14.

Про еліптичні крайові задачі в розширеній соболєвській шкалі

А. В. Аноп
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
ahlv@ukr.net

В доповіді розглядаються загальні еліптичні крайові задачі в розширеній соболєвській шкалі (р.с.ш.) $\{H^{\varphi} : \varphi \in \mathrm{RO}\}$. Ця шкала утворена просторами Л. Хермандера H^{φ}, для яких показником гладкості служить вимірний функціональний параметр $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, RO-змінний на $+\infty$ за В. Авакумовичем. Остання умова значить існування чисел $a > 1$ і $c \geq 1$ таких, що $c^{-1} \leq \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \leq c$ для довільних $t \geq 1$ і $\lambda \in [1,a]$ (a і c можуть залежати від φ).

Р.с.ш. на $\mathbb{R}^n$ складається з гільбертових просторів

$$H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) := \bigl\{w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \varphi(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)\bigr\}, \quad \|w\|_{\varphi} := \|\varphi(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}^n,d\xi)},$$

і означається на евклідових областях та гладких компактних многовидах стандартним чином. Тут $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$, а $\widehat{w}$ — перетворення Фур'є розподілу w. У випадку степеневої функції $\varphi(t) = t^s$ маємо простір Соболєва $H^{\varphi} =: H^{(s)}$ порядку $s \in \mathbb{R}$.

Нехай Ω є обмежена евклідова область з межею $\Gamma \in C^{\infty}$. Розглянемо загальну еліптичну крайову задачу

$$Au = f \;\text{ в }\; \Omega, \quad B_j u = g_j \;\text{ на }\; \Gamma, \quad j = 1,\ldots,q. \tag{1}$$

Тут $A = A(x,D)$, $x \in \overline{\Omega}$, та всі $B_j = B_j(x,D)$, $x \in \Gamma$, є лінійні диференціальні вирази. Їх коефіцієнти нескінченно гладкі, а порядки $\operatorname{ord} A = 2q$, де $q \in \mathbb{N}$, та $\operatorname{ord} B_j = m_j \leq 2q-1$.

Задача (1) має наступні властивості в р.с.ш. Позначимо $\rho(t) := t$ при $t \geq 1$.

Теорема 1. *Нехай функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$ зростає. Тоді відображення $u \to (Au, Bu)$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмеженого оператора*

$$(A,B) : H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega) \to H^{\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\rho^{2q-m_j-1/2}}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma).$$

Цей оператор нетерів, його ядро та індекс не залежать від φ.

Нехай $V \subset \mathbb{R}^n$ є довільна відкрита множина, $\Omega_0 := \Omega \cap V \neq \varnothing$ та $\Gamma_0 := \Gamma \cap V$. Позначимо через $H^{\varphi\rho^{2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ лінійний простір усіх розподілів $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, що $\chi u \in H^{\varphi\rho^{2q}}(\Omega)$ для довільної функції $\chi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, носій якої лежить в $\Omega_0 \cup \Gamma_0$. Позначимо також через $\mathcal{H}^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ лінійний простір усіх вектор-функцій $F := (f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{D}'(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^q$ таких, що $\chi F \in \mathcal{H}^{\varphi}(\Omega,\Gamma)$ для будь-якої вказаної вище функції χ.

Теорема 2. *Припустимо, що функція $u \in H^{(2q)}(\Omega)$ є розв'язок крайової задачі* $(A,B)u =$

F, *де* $F \in \mathcal{H}^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ *для деякого зростаючого функціонального параметра* $\varphi \in \mathrm{RO}$. *Тоді* $u \in H^{\varphi\rho^{2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Наслідок 1. *Нехай виконується умова теореми* 1 *та для деякого цілого* $k \geq 0$ *вірно*

$$\int_1^{\infty} t^{2k+n-1-4q} \varphi^{-2}(t) dt < \infty.$$

Тоді $u \in C^k(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

Ці результати отримані спільно з О. О. Мурачем.

Критерий существования функции Грина–Самойленко

Ф. А. Асроров

Киевский национальный университет имени Т. Шевченко, Киев, Украина

far@ukr.net

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(t, \varphi)x + f(t, \varphi), \tag{1}$$

в которой де $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a(t, \varphi), f(t, \varphi)$ и $P(t, \varphi)$ непрерывные по t и удовлетворяют условию Липщица по φ соответственно векторные и матричная функции, 2π-периодические по φ_v, $v = 1, .., m$, ограниченные при $t \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{T}_m$, $\mathcal{T}_m$ — m-мерный тор.

Аналогично [1], докажем необходимые и достаточные условия существования функции Грина–Самойленко

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} \Omega^t_s(t, \varphi) C(s, \varphi_x(t, \varphi)), s \leq t \\ -\Omega^t_s(t, \varphi)[E - C(s, \varphi_x(t, \varphi)) \; s > t \end{cases} \tag{2}$$

с оценкой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G(t, s, \varphi)\| \, ds \leq K < \infty. \tag{3}$$

Покажем, что эти условия формулируются в терминах знакопеременных квадратичных форм функций Ляпунова и позволяют выяснить существование как единственной функции Грина–Самойленко, так и не единственной.

Теорема. *Пусть однородная система соответствующей системы* (1) *имеет функцию Грина–Самойленко* (2) *с оценкой* (3). *Тогда существует* n*-мерная симметричная матрица* $S(t, \varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$, *удовлетворяющая условию*

$$\dot{V}(t, \varphi, x) =< [\dot{S}(t, \varphi) + S(t, \varphi)P(t, \varphi) + P^*(t, \varphi)S(t, \varphi)]x, x >\leq -\|x\|^2 .$$

1. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987.
2. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем диффререниальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – К.: Наукова думка, 1992.
3. Асроров Ф. А., Перестюк Н. А. Функция Грина–Самойленко и существование интегральных множеств линейных расширений неавтономных уравнений, Укр. мат. журн., 1994, т. 46, № 8, С. 1067–1071.

Існування інтегральної множини одного класу розширень неавтономної системи на торі

С. І. Балога
Ужгородський національний университет, Ужгород, Україна
baloga_switlana@e-mail.ua

Розглянуто систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(t, \varphi),$$

$$\dot{x} = A(t, \varphi)x + f(t, \varphi), \tag{1}$$

в якій $t \in R, x \in R^n,\ \varphi \in T^m, T^m$ — m-вимірний тор; $a(t, \varphi), f(t, \varphi)$ і $A(t, \varphi)$ — неперервні по t векторні та матрична функції відповідно, неперервні і 2π-періодичні по $\varphi_j,\ j = 1, 2, ..., m$, обмежені при всіх $t \in R, \varphi \in T^m$. Крім того, $a(t, \varphi)$ — ліпшицева по φ функція рівномірно відносно $t \in R$. Виокремлено клас рівнянь, для яких існує інтегральна множина.

Нехай $\varphi_t(\tau, \varphi)$ розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_\tau(\tau, \varphi) = \varphi$ і для всіх $\varphi \in T^m,\ \tau \in R$ існує границя $\lim\limits_{|t| \to +\infty} A(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) = A$. Крім того, матриця $A(t, \varphi)$ блочно-діагонального вигляду:

$$A(t, \varphi) = \begin{pmatrix} A_-(t, \varphi) & 0 \\ 0 & A_+(t, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Якщо дійсні частини власних чисел граничної матриці* A *відмінні від нуля*: $\mathrm{Re}(\lambda_j(A)) \neq 0$, $(j = 1, 2, ..., n)$, *причому* $\mathrm{Re}(\lambda_j(A)) < 0$, $j = 1, 2, ..., k$ *і* $\mathrm{Re}(\lambda_j(A)) > 0$, $j = k+1, ..., n$, *то для довільної неперервної і обмеженої по* $t \in R, \varphi \in T^m$, 2π*-періодичної по* φ_j, $j = 1, 2, ..., m$ *функції* $f(t, \varphi)$ *система* (1) *має інтегральну множину*

$$x = u(t, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, s, \varphi) f(s, \varphi_s(t, \varphi)) ds.$$

$G(t, s, \varphi)$ — функція Гріна–Самойленка відповідної однорідної системи.

Для слабко нелінійної системи диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(t, \varphi),$$

$$\dot{x} = F(t, \varphi, x) + A(t, \varphi)x, \tag{2}$$

в якій $a(t, \varphi)$ і $A(t, \varphi)$ такі як і в (1), $F(t, \varphi, x)$ визначена і обмежена для всіх $t \in R$, $\varphi \in T^m, x \in R^n$, неперервна, 2π-періодична по φ і рівномірно відносно $\varphi \in T^m$ задовольняє умову Ліпшиця по x, справедлива:

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді для достатньо малої сталої Ліпшиця* L *система* (2) *має інтегральну множину* $x = u(t, \varphi),\ t \in R,\ \varphi \in T^m$.

Якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A від'ємні, то система (1) має асимптотично стійку інтегральну множину

$$x = u(t, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t, s, \varphi) f(s, \varphi_s(t, \varphi)) ds.$$

1. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
2. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — К.: Наук. думка, 1990. — 272 с.

Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа

У. И. Балтаева

Ургенческий Государственный университет, Ургенч, Узбекистан

umida_baltayeva@mail.ru

Рассмотрим нагруженное уравнение [1] смешанного типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}-\frac{1-sgny}{2}u_{yy}-\frac{1+sgny}{2}u_{y}-\lambda u-\mu u(x,0)\right)=0. \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0,\ x=l,\ y=h$ при $y>0$ и характеристиками $AC: x+y=0,\ \ BC: x-y=1$ уравнения (1) при $y<0$; Ω_1 и Ω_2 — параболическая и гиперболическая части области Ω,$\lambda=\lambda_i, \mu=\mu_i$ соответственно в областях $\Omega_i\ \lambda_i,\mu_i\in R\ \ (i=1,2)$.

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω при $y\neq 0$, непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$, с непрерывной производной при переходе через отрезок AB, $u_x\,(u_y)$ непрерывна вплоть до $AA_0\cup AC(AC)$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le h, \tag{3}$$

$$[a(y)u_x(x,y)+b(y)D^{\alpha}_{0x}u(x,y)]\,|_{x=x_0}=[c(y)u_x(x,y)+d(y)D^{\alpha}_{0x}u(x,y)]|_{x=1}+e(y), \tag{4}$$

$$u(x,y)|_{AC}=\psi_1(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_1(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}, \tag{5}$$

где D^{ox}_{α} оператор дробного интегрирования [1], x_0 — произвольная фиксированная точка интервала $[0,1]$, n — внутренняя нормаль; $\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2$ — заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0),\quad \varphi_1(y)\in C^1[0,h],\quad \varphi_2(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h), \tag{6}$$

$$\psi_1(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^3\left(0,\frac{1}{2}\right),\ \ \psi_2(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right), \tag{7}$$

$$a(y),b(y),c(y),d(y),e(y)\in C^1[0,h],\ \ a^2+b^2+c^2+d^2\neq 0. \tag{8}$$

Если $\lambda_1\ge 0$ и выполнены условия (6), (7) и (8), то в области Ω существует единственное решение задачи. Однозначная разрешимость поставленной задачи доказивается с помощью теории интегральных уравнений.

Решение задачи в области Ω_2 восстанавливается как решение задачи Коши–Гурса, а в области Ω_1 как решение задачи Г [2].

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
2. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Т.: Фан, 1986. 220 с.

Дослідження періодичних розв'язків диференціально-операторного рівняння $\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), Ax(t)\right)$ за допомогою чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка

М. В. Бегун
Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Чисельно-аналітичний метод Самойленка для дослідження періодичних задач систем звичайних диференціальних рівнянь, запропонований в [1], узагальнюється на системи нелінійних диференціально-операторних рівнянь першого порядку з періодичною правою частиною, будується алгоритм для знаходження періодичного розв'язку таких систем. На точках $x = (x_1, ..., x_n),\ n < \infty$ з деякого компакту D евклідового простору та $y = (y_1, ..., y_p),\ p \leq \infty$ з деякої області Ω скінченовимірного або нескінченовимірного простору задана вектор-функція $f = col\,(f_1, ..., f_n)$, що залежить від часу, кожна координата якої $f_i(t, x, y),\ i = 1, ..., n$ неперервна по сукупності аргументів у відповідній області,періодична по часу, обмежена та задовольняє умові Ліпшица. Розглядається система диференціально-операторних рівнянь першого порядку

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), Ax(t)\right), \tag{1}$$

де $Ax(t) = y(t)$. Оператор A діє з класу $CT^n(D)$ неперервних періодичних по часу вектор-функцій $x(t)$ скінченого числа координат зі значеннями в D у клас $CT^p(\Omega)$ неперервних періодичних по часу вектор-функцій $y(t)$ скінченого або нескінченого числа координат зі значеннями в Ω, тобто $\forall x(t) \in CT^n(D) : Ax(t) \in \Omega$. Накладемо умову на оператор

$$\forall x'(t), x''(t) \in CT^n(D) : |Ax'(t) - Ax''(t)|_0 \leq R|x'(t) - x''(t)|_0, \tag{2}$$

де $R = \{r_{ij}\}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{p}$ — матриця з невід'ємними коефіцієнтами $r_{ij} \geq 0$, $|x(t)|_0 = \max\limits_{t \in [\tau, \tau+T]} |x(t)|$.

До методу послідовних періодичних наближень [2], що використовується для дослідження T-систем, внесено деякі уточнення оцінки похибки методу. Будується нескінчена послідовність періодичних функцій, заданих рекурентним співвідношенням. У випадку, коли система (1) є T-системою і виконані вказані умови на функцію f та оператор A доведена теорема, що дозволяє наближено знаходити періодичні розв'язки у вигляді послідовності періодичних функцій з наперед заданою степінню точності. Наведено алгоритм побудови періодичних розв'язків розглядуваного диференціально-операторного рівняння у вигляді послідовності періодичних функцій, дана оцінка похибки між точним і наближеним розв'язком даного рівняння.

1. Самойленко А. М. Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I, II // Укр. мат. журн. 1965. Т. 17, № 4. С. 82–93; 1966. Т. 18, № 2. С. 50–59.
2. Самойленко А. М., Ронто Н. И. Численно-аналитический метод исследования периодических решений. – Киев: Вища школа, 1976. – 184 с.

Периодические структуры феноменологического уравнения спинового горения

Е. П. Белан[1], А. М. Самойленко[2]
[1]Таврический университет, Симферополь, Украина
[2]Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
belan@crimea.edu1.com, sam@imath.kiev2.com

На окружности радиуса r рассматривается уравнение

$$\ddot{\xi} + \xi = \varepsilon[\dot{\xi}(1 - \frac{4}{3}\dot{\xi}^2) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\dot{\xi} + \frac{\beta\lambda}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\dot{\xi}], \tag{1}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1, \lambda > 0, \beta > 0, \Delta$ — одномерный оператор Лапласа. Данная задача является феноменологической моделью [1] безгазового горения на цилиндрической поверхности радиуса r. В уравнении (1) ξ — координаты точек фронта горения в движущейся системе координат, в которой фронт в среднем покоится.

В докладе рассматриваются вопросы о существовании, асимптотической форме, устойчивости бегущих волн, а также вопросы о существовании, асимптотической форме, устойчивости периодических структур, ответвляющихся от бегущих волн [2], [3].

Согласно проведенному анализу при достаточно большом ρ динамика (1) является сложной и зависит от параметра β. В частности, если $\beta < \beta^*$, $\beta^* \approx 2$, то двумерный тор периодических по времени решений, ответвляющийся от однородного предельного цикла, сохраняет устойчивость при отходе параметра ρ от бифуркационного значения. Если же $\beta > \beta^*$, то указанный двумерный тор устойчивость теряет.

Подчеркнем, что имеет место бифуркация рождения устойчивого двумерного тора периодических по времени решений (1) при потере устойчивости каждой бегущей волны.

1. Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах. Изв. вузов, сер. Радиофизика, 1982, Т. 15, № 6, С. 591–618.
2. Самойленко А. М., Белан Е. П. Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения. ДАН, 2006, Т. 406, № 6, С. 738–741.
3. Белан Е. П., Самойленко А. М. Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения. УМЖ, 2013, Т. 65, № 1, С. 21–43.

Об одномерных дискретных отображениях, генерирующих хаос в квадратичных системах ODE

В. Е. Белозеров[1], С. А. Волкова[2]
[1]Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина
[2] Украинский химико-технологический университет, Днепропетровск, Украина
belozvye@mail.ru, s.volkovav@mail.ru

Рассмотрим квадратичную 3D систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \\ 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 \\ 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где собственные числа μ и $\rho \pm \omega\sqrt{-1}$ матрицы $P = \{p_{ij}\} \in \mathbb{R}^{3\times3}, i, j = 1, ..., 3$, удовлетворяют ограничениям: $\rho \cdot \omega \neq 0$, $\mu \cdot \rho \leq 0$. (При $\mu \neq 0$ начало координат является положением равновесия типа седло-фокус.)

Введем квадратичные формы:

$$f(x,y) = b_{12}(a_{11} - 2b_{12})x^2 + b_{12}(2a_{12} - b_{22})xy + b_{12}a_{22}y^2,$$

$$g(x,y,z) = c_{13}(a_{11} - 2c_{13})x^2 + 2(c_{13}a_{12} + c_{23}b_{12} - 2c_{13}c_{23})xy + (c_{13}a_{22} + c_{23}b_{22} - 2c_{23}^2)y^2 +$$
$$+ (2c_{13}a_{13} + 2c_{23}b_{13} - c_{13}c_{33})xz + (2c_{13}a_{23} + 2c_{23}b_{23} - c_{23}c_{33})yz + (c_{13}a_{33} + c_{23}b_{33})z^2.$$

Следующая теорема обобщает аналогичную теорему, полученную в [1].

Теорема 1. *Предположим, что для системы* (1) *выполнены следующие условия*:

(a1) *квадратичные формы* $f(x,y)$ *и* $g(x,y,z)$ *отрицательно определены*;

(a2) $a_{11}(a_{11} - 2b_{12}) < 0$;

(a3) *вектор* $(\alpha, 0, 0)^T, \alpha \neq 0$, *не является собственным вектором матрицы* P;

(a4) *все положения равновесия (вырожденные и невырожденные) системы* (1) *неустойчивы; при этом, если точка* $\mathbf{0}$ *невырождена, то она является седло-фокусом.*

Тогда в системе (1) *существовует либо предельный цикл, либо предельный тор, либо присутствует сложный нерегулярный (хаотический) аттрактор.*

Рассмотрим третье уравнение системы (1):

$$\dot{z}(t) = c_{33}z^2(t) + (2c_{13}x(t) + 2c_{23}y(t) + p_{33})z(t) + p_{31}x(t) + p_{32}y(t). \tag{2}$$

Будем считать, что $x(t), y(t), z(t)$ — известные дифференцируемые функции времени. Тогда (2) является уравнением Риккати. Получение явного (при некоторых ограничениях) решения уравнения (2) позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $p \geq \gamma \geq 0$ — *произвольные числа. Предположим также, что*: *если* $p_{31} \neq 0, p_{32} \neq 0$, *то существует вещественное число* $v \neq 0$ *удовлетворяющее тождеству* $c_{33}v^2 + (2c_{13}x + 2c_{23}y + p_{33})v + p_{31}x + p_{32}y \equiv 0$; *или, если* $p_{31} = p_{32} = 0$, *то* $v = 0$.

Тогда в условиях (a1) – (a4) *теоремы* 1 *существует число* $r = r(p,q) > 0$ *такое, что одномерное отображение* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(z) \equiv \frac{rz\exp(pz - z^2)}{1 + \gamma z},$$

генерирует дискретный процесс $z_{k+1} = \alpha(z_k)$, *где* $z_k = z(t_k); k = 0, 1, ...,$ *в системе* (1), *имеющий хаотическую (в смысле Девани и Ли-Йорке) динамику.*

1. Белозеров В. Е., Волкова С. А. Хаотическая динамика в квадратичных системах с сингулярной линейной частью. Кибернетика и системный анализ, 2012, т. 48, № 4, с. 116–125.

Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка

М. А. Белозерова

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина

Marbel@ukr.net

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_i(y^{(i)}), \tag{1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[^1 \to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ $(i = 0, ..., n)$ — непрерывные функции, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — либо промежуток $[y_i^0, Y_i[^2$ либо — $]Y_i, y_i^0]$. Кроме того, предполагается, что каждая из функций φ_i является правильно меняющейся (см. [2]) при $z \to Y_i$ $(z \in \Delta_{Y_i})$ порядка σ_i, причем $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sigma_i \neq 1$.

Решение y уравнения (1) будем называть $P_\omega(\lambda_{n-1}^0)$-решением, где $-\infty \leq \lambda_{n-1}^0 \leq +\infty$, если

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ \ (i = 0, ..., n-1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y^{(n-1)}(t))^2}{y^{(n)}(t)\, y^{(n-2)}(t)} = \lambda_{n-1}^0.$$

Все правильно меняющиеся при $t \uparrow \omega$ решения уравнения (1) являются $P_\omega(\lambda_{n-1}^0)$ — решениями. Более того, $P_\omega(1)$ — решения (1) являются быстро меняющимися (см. [2]) при $t \uparrow \omega$ функциями.

Все $P_\omega(\lambda_{n-1}^0)$ — решения уравнения (1) для $\lambda_{n-1}^0 \in R \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., \frac{n-2}{n-1}\right\}$ были ранее детально исследованы в [1]. В данной работе получены необходимые и достаточные условия существования $P_\omega(\lambda_{n-1}^0)$ — решений уравнения (1) в особых случаях $\lambda_{n-1}^0 \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., \frac{n-2}{n-1}\right\}$. Также установлены неявные асимптотические формулы при $t \uparrow \omega$ для таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

[1] При $\omega > 0$ считаем, что $a > 0$.

[2] При $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ считаем $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ соответственно.

1. Bilozerova M. A., Evtukhov V. M. Asymptotic representations of solutions of the differential equation $y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod\limits_{i=0}^{n-1} \varphi_i\left(y^{(i)}\right)$// Miskolc Mathematical Notes. -– 2012. — 13, № 2. — P. 249–270.
2. E. Seneta. Regularly varying functions, Lecture Notes in Math., vol. 508, Springer–Verlag, Berlin, 1976.

О многопериодическом по части переменных решений одной системы уравнений в частных производных

А. Б. Бержанов, Г. Е. Елешова

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан,

amantay48@mail.ru

Рассматривается система уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} D_\varepsilon x &= P_1(t, \varphi, \psi)x + \mu F_1(t, \varphi, \psi, x, y, u, \mu) \\ D_\varepsilon y &= P_2(t, \varphi, \psi)y + \mu F_2(t, \varphi, \psi, x, y, \upsilon, \mu) \end{aligned} \tag{1}$$

где x, y — соответственно n, k векторы; P_1, P_2 — $n \times n$ и $k \times k$ матрицы; F_1 и F_2 — n и k векторы; $\varepsilon > 0, \mu > 0, \alpha > 0$— малые параметры, а

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + [a^0(t) + \varepsilon a_1(t, \varphi, \psi, \varepsilon)] \frac{\partial}{\partial \varphi} + [b^0(t) + \varepsilon b_1(t, \varphi, \psi, \varepsilon)] \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu} |t - t_1| K(t_1 t, \varphi, \psi, x, y, \mu) dt_1,$$

$$v = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu}|t - t_1| R(t_1 t, \varphi, \psi, x, y, \mu) dt_1,$$

K и $R-$ соответственно n, k векторы, $\nu > 0$ — const. Систему (1) применительно к параметру α назовем сингулярно-возмущенной.

Вектор-функция $\Phi(t, \varphi, \psi) \in R^{n+k}$, определенную и непрерывную в R^{1+m+r} назовем многопериодической по части переменных, если она многопериодична по t, φ с вектор-периодом $(\Theta, \omega) \in R^{1+m}$ равномерно относительно $\psi \in R^r$.

Доказано, что при определенных условиях, аналогичных [1], система (1) допускает единственное многопериодическое по части переменных решение $\Phi^*(t, \varphi, \psi)$. Это решение является интегральным многообразием смысле Боголюбова–Митропольского [2] для соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающее свойством периодичности по t и φ равномерно относительно ψ.

1. Бержанов А. Б. Многопериодическое по части переменных решение одной системы интегро-дифференциальных уравнений. Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 2004, 1, с. 223–227.
2. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973.

Про усереднення на осі в багаточастотній системі із запізненням

Я. Й. Бігун, І. В. Краснокутська

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

yaroslav.bihun@gmail.com, nicka176@yandex.ru

Метод усереднення за швидкими змінними спочатку був обґрунтований на асимптотично великому часовому проміжку В.І. Арнольдом, а згодом і в працях Є. О. Гребенікова, М. М. Хапаєва, А. М. Самойленка, Р. І. Петришина та багатьох інших математиків. Зокрема, обґрунтовано метод усереднення на півосі R_+ за умови рівномірної асимптотичної стійкості повільних змінних усередненої системи [1]. Обґрунтування методу усереднення на півосі із залученням другого методу Ляпунова здійснено М. М. Хапаєвим [2].

Не менш цікавою й важливою задачею є дослідження методу усереднення на всій осі. Для багаточастотної системи така задача розв'язана в праці Р. І. Петришина [3].

У даній роботі вивчається метод усереднення на всій осі для m-частотної системи диференціальних рівнянь із запізненням вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + B(\tau, x, x_\Delta, \varphi, \varepsilon), \tag{1}$$

де $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\Delta > 0$, $x_\Delta(\tau, \varepsilon) = x(\tau - \varepsilon\Delta, \varepsilon)$, $\varphi_\Delta(\tau, \varepsilon) = \varphi(\tau - \varepsilon\Delta, \varepsilon)$. Вектор-функція $\overline{A}$ одержується усередненням за змінними φ, φ_Δ вектор-функції A із врахуванням тотожнього резонансу частот і має вигляд

$$\overline{A}(\tau, x, y, \varepsilon) = \sum_{k+l=0} A_{kl}(\tau, x, y, \varepsilon) e^{-i(k, \omega(\tau))\Delta},$$

B_0 — середнє значення за змінними φ вектор-функції B

$$B_0(\tau, x, y, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} B(\tau, x, x_\Delta, \varphi, \varepsilon) d\varphi.$$

Нехай виконуються загальні умови гладкості вектор-функцій A, B і ω, визначник Вронського за системою функцій $\{\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau)\}$ відмінний від нуля на $\mathbb{R}$ й нормальна фундаментальна матриця системи рівнянь:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}} \overline{A}(\tau, \xi(\tau), \xi(\tau - \varepsilon\Delta), 0) z + \frac{\partial}{\partial \overline{x}_\Delta} \overline{A}(\tau, \xi(\tau, \varepsilon), \xi(\tau - \varepsilon\Delta), 0) z_\Delta$$

де $\xi(\tau, \varepsilon)$ — розв'язок рівняння:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \overline{A}(\tau, \xi, \xi_\Delta, 0)$$

задовільняє експоненціальну оцінку.

В роботі показано, що при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ $\forall(\psi, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m \times (0, \varepsilon_0]$ знайдеться така точка $x^0(\psi, \varepsilon) \in D$, що розв'язок $\{x_\tau(0, x^0(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon), \varphi_\tau(0, x^0(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon)\}$ системи (1) визначений при $\tau \in \mathbb{R}$ і виконується нерівність

$$\|x_\tau(0, x^0(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon) - \xi(\tau, \varepsilon)\| \le \sigma \varepsilon^\alpha,$$

де стала σ не залежить від ψ, ε.

1. Петришин Р. І., Похила О. М. Оцінка похибки методу усереднення на півосі для багаточастотної резонансної системи. Укр. мат. журнал, 1997, 49, № 5, С. 685–690.
2. Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986, 192 с.
3. Самойленко А. М., Петришин Р. І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – К.: Наукова думка, 2004, 474 с.

Численно-асимптотическое решение задачи управления системами в условно устойчивом случае

И. А. Бойцова

Одесский государственный экологический университет, Одесса, Украина

boitsova.irina@mail.ru

Рассмотрим задачу управления системой, которая описывается дифференциальными уравнениями с быстрыми и медленными переменными и краевыми условиями на быстрые переменные

$$\dot{x} = \varepsilon \left[f(t, x, y) + A(x) \varphi(t, u) \right], \quad x(0) = x^0,$$
$$\dot{y} = g(x, y), \quad R(y(0), y(T)) = 0,$$

Приведем алгоритм численно-асимптотического решения задачи в условно устойчивом случае с использованием метода усреднения.

1. Определим изолированное решение $y = y_0(t, x)$ уравнения $g(x, y_0(t, x)) = 0$.

2. Определим среднее $f_0(x) = \lim\limits_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int\limits_t^{t+T_0} f(s, x, y_0(s, x)) ds$, вычисленное вдоль решения вырожденного уравнения.

3. Построим усредненную задачу, если функция $\varphi(t, u)$ — 2π-периодическая:

$$\dot{z} = \varepsilon \left[f_0(z) + A(z) v \right], \quad z(0) = x^0, \quad v \in V = \frac{1}{2\pi} \int\limits_t^{t+2\pi} \varphi(s, U) ds.$$

4. В усредненной задаче перейдем к медленному времени $\tau = \varepsilon t$, $\tau \in [0, L]$

$$\frac{d\,\hat{z}}{d\tau} = f_0\left(\hat{z}\right) + A\left(\hat{z}\right) \cdot \hat{v}, \quad \hat{z}\left(0\right) = x^0.$$

5. Пусть $\hat{v}^*\left(\tau\right)$ — выбранное управление усредненной системы, а $\hat{z}^*\left(\tau\right)$ — соответствующая траектория системы. Асимптотическое управление $\bar{u}\left(t\right) \in U$ заданной системы построим по формулам:

$$\hat{v}_i^* = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \hat{v}^*\left(\varepsilon t\right) dt, \quad \bar{u}\left(t\right) = \left\{ \bar{u}_i\left(t\right) : \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \varphi\left(t, \bar{u}_i\left(t\right)\right) dt = \hat{v}_i^* \right\}.$$

Сформулированы условия, при которых траектория $\bar{x}\left(t\right)$, $\bar{y}\left(t\right)$ заданной системы, порожденная управлением $\bar{u}\left(t\right) \in U$, близка к решению $\hat{z}^*\left(\varepsilon t\right)$ усредненной системы.

Применение алгоритма проиллюстрировано на примере.

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973.
2. Плотников В. А. Метод усреднения в задачах управления. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992.
3. Бойцова И. А. Построение асимптотического решения краевой задачи с быстрыми и медленными переменными в условно устойчивом случае. Вест. ОГУ. Физ.-мат. науки, 2003, том 8, вып. 2, с. 113–120.

Інтегральні нерівності Вендрофа

С. Д. Борисенко, Т. І. Вдовенко

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна

tanyavdovenko@meta.ua

Означення. *Позначимо через* $\mathfrak{F}$ *клас неперервних функцій* $\sigma : R^2 \to R^2$, *що зодовольняють наступним умовам*:

1)$\sigma(x_1, x_2) = (\sigma_1(x_1, x_2), \sigma_2(x_1, x_2))$, де $\sigma_j : R^2 \to R, j = 1, 2$;

2)$\sigma(x_1, x_2) \leq (x_1, x_2)$;

3) $\lim_{|(x_1,x_2)| \to \infty} \sigma_j(x_1, x_2) = \infty, j = 1, 2$.

Означення. *Позначимо через* $B = \{y \in R^2 : (x_1^0, x_2^0) \leq (y_1, y_2) < (x_1^1, x_2^1)\}$.

Теорема. *Якщо дійснозначна неперервна функція* $\varphi(x_1, x_2)$ *визначена на* B *і для всіх* $(x_1, x_2) \in B$ *таких, що* $(x_1, x_2) \geq (x_1^0, x_2^0)$ *та* $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ *виконуеться інтегро-фукнціональна нерівність*:

$$\varphi(x_1, x_2) \leq n(x_1, x_2) + q(x_1, x_2) \left[\int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} f(s_1, s_2) \varphi^\alpha(\sigma(s_1, s_2))\, ds_1\, ds_2 + \right.$$

$$\left. + \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} f(s_1, s_2) \left(\int_{x_1^0}^{s_1} \int_{x_2^0}^{s_2} g(t_1, t_2) \varphi^\alpha(p(t_1, t_2))\, dt_1\, dt_2 \right) ds_1\, ds_2 \right],$$

де $f(x_1, x_2), g(x_1, x_2), n(x_1, x_2)$ *та* $q(x_1, x_2)$ *дійснозначні неперервні функції визначені на*B *і* $q(x_1, x_2) \geq 1, n(x_1, x_2) > 0$ — *неспадна на* B, σ *і* $p \in \mathfrak{F}$.

Тоді для всіх $(x_1, x_2) \in B$ *таких, що* $(x_1, x_2) \geq (x_1^0, x_2^0)$:

$$\varphi(x_1, x_2) \leq n(x_1, x_2) q(x_1, x_2) \{1 + (1 - \alpha) \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} f(s_1, s_2) [n^{\alpha-1}(s_1, s_2) q^\alpha(\sigma(s_1, s_2)) +$$

$$+\int_{x_1^0}^{s_1}\int_{x_2^0}^{s_2} g(t_1,t_2)n^{\alpha-1}(t_1,t_2)q^{\alpha}(p(t_1,t_2))\left(\frac{n(p(t_1,t_2))}{n(t_1,t_2)}\right)^{\alpha} dt_1\,dt_2]\,ds_1\,ds_2\}^{\frac{1}{1-\alpha}}, 0<\alpha<1;$$

$$\varphi(x_1,x_2)\le n(x_1,x_2)q(x_1,x_2)\{1+(1-\alpha)\int_{x_1^0}^{x_1}\int_{x_2^0}^{x_2} f(s_1,s_2)[n^{\alpha-1}(s_1,s_2)q^{\alpha}(\sigma(s_1,s_2))+$$

$$+\int_{x_1^0}^{s_1}\int_{x_2^0}^{s_2} g(t_1,t_2)n^{\alpha-1}(t_1,t_2)q^{\alpha}(p(t_1,t_2))\left(\frac{n(p(t_1,t_2))}{n(t_1,t_2)}\right)^{\alpha} dt_1\,dt_2]\,ds_1\,ds_2\}^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \alpha>1.$$

При умові, що

$$\int_{x_1^0}^{x_1}\int_{x_2^0}^{x_2} f(s_1,s_2)[n^{\alpha-1}(s_1,s_2)q^{\alpha}+$$

$$+\int_{x_1^0}^{s_1}\int_{x_2^0}^{s_2} g(t_1,t_2)n^{\alpha-1}(t_1,t_2)q^{\alpha}(p(t_1,t_2))\left(\frac{n(p(t_1,t_2))}{n(t_1,t_2)}\right)^{\alpha} dt_1\,dt_2]\,ds_1\,ds_2<\frac{1}{\alpha-1}.$$

1. O. Akinyele. On Gronwall-Bellman-Bihary Type Integral Inequalities in Several Variables with Retardation // J. Math. Appl., 104(1984), 1–26.
2. A. M. Samoilenko, S. D. Borysenko, E. Laserra, G. Matarazzo. Wendroff Type Integro-sum Inequalities and Applications // Math. Notes 3 (2), 2002, 123–132.

Асимптотические методы Маслова в дифференциальных уравнениях

Д. Е. Булычев

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

lunix2003@mail.ru

Асимптотические методы Маслова, позволяющие строить квазиклассические решения уравнения Шредингера, применимы к уравнениям с малым параметром при операторе дифференцирования [1]. В простейшем случае это уравнение вида:

$$i\epsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\left(-i\epsilon\frac{\partial}{\partial x},x\right)\psi,\quad \epsilon\to 0 \tag{1}$$

Имеются и более сложные уравнения, которые можно исследовать методами Маслова:

$$i\epsilon\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial t}=H\left(-i\epsilon\frac{\partial}{\partial x},x,-i\frac{\partial}{\partial y},y\right)\psi(x,y,t) \tag{2}$$

Такое уравнение в физике описывает систему, квазиклассическую по координатам x и квантовую по координатам y.

Чтобы применить методы Маслова к конкретным задачам, следует сначала привести возникающие в задаче уравнения к виду (1) или (2), сделав координаты и время безразмерными. Тогда, если возникающий безразмерный параметр ϵ много меньше единицы, методы Маслова можно применять.

С помощью данных методов исследовано дифференциальное уравнение, возникающее в теории оптических решеток:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+W_0\cos(a\xi)+\frac{\xi^2}{2}\right)\psi \tag{3}$$

В двух качественно разных случаях $a \ll 1$, $W_0 \lesssim a^{-2}$ и $a \gg 1$, $W_0 \lesssim a^2$ применяется простой и операторнозначный метод комплексного ростка Маслова. В первом случае рассматривается подстановка вида [2]:

$$\psi(z,\tau) = e^{\frac{i}{\epsilon}S(\tau)}e^{\frac{i}{\epsilon}P(\tau)(z-Q(\tau))}f\left(\frac{z-Q(\tau)}{\sqrt{\epsilon}},\tau\right) \tag{4}$$

Второй метод является аналогом метода комплексного ростка Маслова в точке и его применение приводит к задаче на собственные значения. Рассматривается такая же подстановка, но с дополнительным аргументом y в функции ψ и f. Это как раз и приводит к тому, что уравнение (3) будет описывать систему квазиклассическую по переменной z и квантовую по переменной y.

Используя методы Маслова для решения дифференциальных уравнений с малым параметром, возникающих в физике, можно легко получить соотношения, описывающие набег фазы S со временем и показывающие, как изменяется форма волнового пакета f со временем.

1. Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и в квантовой теории поля. – Москва: УРСС, 2000.
2. Маслов В. П., Шведов О. Ю. Комплексный метод ВКБ в пространстве Фока. Докл. РАН, 1995, Т. 340, № 1, с. 42–47.

Біфуркації в моделі фазових осциляторів з притягуючими та відштовхуючими зв'язками

О. Бурилко[1], Я. Казанович[2], Р. Борисюк[2,3]

[1]Інститут математики НАНУ, Київ, Україна

[2]Інститут математичних проблем біології РАН, Пущино, Росія

[3]Університет, Плімут, Великобританія

burilko@imath.kiev.ua, kazanovichyakov@gmail.com, r.borisyuk@plymouth.ac.uk

Ми розглядаємо узагальнення класичної моделі Й. Курамото глобально зв'язаних фазових осциляторів з двома типами взаємодії між елементами. Така модель була запропонована Х. Даідо [1] та викликала значний інтерес в зв'язку з можливістю різноманітних застосувань в природознавстві. Зокрема, в роботах Х. Хонг та С. Строгатца детально досліджувались синхронізаційні властивості груп елементів при термодинамічному граничному переході та при різних розподілах власних частот осциляторів. В роботі [2] було застосовано теорію Ватанабе-Строгатца до системи з ідентичними власними частотами, редуковано її до системи малої розмірності та описано різноманітні типи атракторів, що виникають внаслідок конкуренції між притягуючими та відштовхуючими елементами. Ми досліджуємо деяке узагальнення системи, що розглядалась в [2], а саме, вивчаємо модель з двома типами взаємодії та фазовим зсувом частот. Модель описується системою N диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \omega_i - \tfrac{K_1}{N}\textstyle\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_i-\theta_j-\alpha),\ \theta_i \in \mathcal{H}_1, \\ \dot{\theta}_l &= \omega_l - \tfrac{K_2}{N}\textstyle\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_l-\theta_j-\alpha),\ \theta_l \in \mathcal{H}_2. \end{aligned} \tag{1}$$

де $\theta_i \in \mathbb{T}^1$ — фазові змінні, ω_i — власні частоти осциляторів, $K_1 > 0$, $K_2 < 0$ — параметри порядку, α — параметр фазового зсуву. В моделі конкурують дві групи елементів:

$\mathcal{H}_1$ — конформісти (conformists) та $\mathcal{H}_2$ — нонконформісти (contrarians). Осцилятори першої зі згаданих груп намагаються повністю синхронізуватись, осцилятори другої групи намагаються розподілити фази таким чином, щоб загальне середнє поле стало нульовим. Конкуренція між цими двома групами призводить до дуже цікавої і несподіваної динаміки, що згідно з [2] може описувати певні процеси в соціології та фізиці. Систему (1) можна редукувати до системи в фазових змінних $\varphi_i = \theta_1 - \theta_i$, $i = \overline{1, N-1}$. Для цієї системи доведено теорему про локалізацію положень рівноваги у випадку, описаному в [2], а саме, при $\alpha = 0$. Для такої системи також показано існування не вказаних в [2] атракторів різних типів, які, зокрема, можуть бути хаотичними. Проведено біфуркаційний аналіз для більш загальної системи з будь–яким фазовим зсувом. Було описано інваріантні многовиди, що відповідають кластерам різних груп в моделі та многовид з нульовим параметром порядку. Побудовано двопараметричні біфуркаційні діаграми для систем малих розмірностей. Найцікавішими у випадку ненульового фазового зсуву є гетероклінічні біфуркаційні переходи та біфукрації корозмірності 2, що виникають внаслідок певних симетрій в системі. Показано, що малі збурення фазового параметру суттєво впливають на поведінку конкуруючих груп. Також встановлено існування квазіперіодичних та хаотичних атракторів в системі.

1. H. Daido. Strange waves in coupled–oscillator arrays: Mapping approach. Phys Rev. Lett., 1886, 68, 1073.
2. H. Hong and S. H. Strogatz. Conformists and contrarians in a Kuramoto model with identical natural frequencies. Phys Rev. E, 2011, 84, 046202.

Про матрицю Гріна для системи рівнянь Колмогорова з одновимірними групами виродження

І. В. Буртняк, Г. П. Малицька

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

bvanya@meta.ua

Розглядаємо систему рівнянь

$$\partial_t u_\nu(t,x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} x_j \partial_{x_{j+1}} u_\nu(t,x) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=0}^{2b} a_k^{r\nu}(t) \partial_{x_1}^k u_r(t,x), \tag{1}$$

$$\nu = 1, ..., n, \quad n_0 > 1, \quad n \in N, \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad b \in N,$$

$$u_\nu(t,x)|_{t=\tau} = u_{\nu_0}(x), \quad x \in R^{n_0}, \tag{2}$$

де $\partial_t w_\nu(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{2b} \sum\limits_{r=1}^{n} a_k^{r\nu}(t) \partial_{x_1}^k w_r(t,x)$, рівномірно параболічна система в сенсі Петровського для $\forall t \in [0,T]$, $a_k^{r\nu}(t)$ — комплекснозначні функції, неперервні для $\forall t \in [0,T]$, $u_{\nu 0}(x)$ — достатньо гладкі фінітні функції.

Теорема. *Існує матриця Гріна задачі* (1), (2):

$$G(t,x;\tau,\xi) = (t-\tau)^{-k_0} \Omega(t,\tau; (x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2b}, (x_2-\xi_2+$$

$$+x_1(t-\tau))(t-\tau)^{-(2b+1)/2b}, ..., (x_{n_0} - \xi_{n_0} + x_{n_0-1}(t-\tau) + ...+$$

$$+x_1(t-\tau)^{n_0-1}((n_0-1)!)^{-1})(t-\tau)^{-\frac{2b(n_0-1)+1}{2b}}),$$

$\Omega(t, \tau; z_1, ..., z_{n_0})$ — *ціла функція аргументів* $z_1, ..., z_{n_0}$, *порядку росту* q *при комплексних значеннях аргументів і такого ж порядку спадання при дійсних значеннях. Для її похідних правильні оцінки*

$$|D_x^m G(t, \tau; x + iy; \tau, \xi)| \leq C_m (t-\tau)^{-k_m} \exp\{-c_0 \sum_{j=1}^{n_0} [|x_j - \xi_j +$$

$$+ \sum_{l=1}^{j-1} x_{j-l} (t-\tau)^l (l!)^{-1}|^q (t-\tau)^{-\frac{2b(j-1)+1}{2b-1}} + c_j |y_j|^q (t-\tau)^{-\frac{2b(j-1)+1}{2b-1}}]\},$$

$$y \in R^{n_0}, \quad |m| = |m_1| + ... + |m_{n_0}|.$$

$$c_0 > 0, \quad C_m > 0, c_j > 0, \quad t > \tau,$$

$$k_0 = \frac{bn_0^2 + n_0(b-1)}{2b}, \quad k_m = k_0 + \sum_{j=1}^{n_0} m_j ((j-1) + \frac{1}{2b}),$$

де сталі C_m, c_0, c_j *залежать від* $\sup |a_k^{r\nu}(t)|$, *характеру неперервності* $a_{2b}^{r\nu}(t)$, *сталої параболічності* $\delta, q = \frac{2b}{2b-1}$.

1. Малицька Г. П. Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для еліптично-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією // Вісн. нац. у-ту "Львівська політехніка". – 2000. № 411. – С. 21–228.

Виживання та руйнування інваріантних торів однієї гамільтонової системи в процесі зростання параметра збурення

Ю. Є. Вакал

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

iuliia.vakal@gmail.com

Дана робота присвячена дослідженню ефекту руйнування частини торів при проходженні параметром збурення певної межі і водночас виживання тих торів, які несуть квазіперіодичні рухи з частотами, що погано апроксимуються раціональними числами.

Розглядається залежна від двох параметрів $\varepsilon \in (0, 1)$ та $\lambda := \frac{\omega_2}{\omega_1} \in (0, 1) \backslash Q$ гамільтонова система з гамільтоніаном спеціального вигляду

$$H(y, \varphi; \varepsilon, \lambda) = y_1 + \lambda y_2 + h(\varphi_1, \varphi_2; \varepsilon, \lambda),$$

де $(y_1, y_2, \varphi_1 | \bmod 2\pi, \varphi_2 | \bmod 2\pi)$ — канонічні координати, ε — малий параметр збурення, ω_1, ω_2 — довільні сталі, які визначають вектор частот (ω_1, ω_2) руху на відповідному інваріантному торі системи,

$$h(\varphi_1, \varphi_2; \varepsilon, \lambda) := \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\cos(p_k(\lambda)\varphi_1 - q_k(\lambda)\varphi_2)}{\operatorname{sign}[p_k(\lambda) - \lambda q_k(\lambda)][p_k(\lambda) + q_k(\lambda)]}.$$

Тут $p_k(\lambda), q_k(\lambda)$ — елементи k-го підхідного дробу $\frac{p_k(\lambda)}{q_k(\lambda)} = [a_1(\lambda), a_2(\lambda), \ldots, a_k(\lambda)]$ для зображення числа λ у вигляді ланцюгового дробу

$$\lambda = [a_1(\lambda), a_2(\lambda), \ldots] = \frac{1}{a_1(\lambda) + \frac{1}{a_2(\lambda) + \cdots}}.$$

Основний результат складає наступна теорема.

Теорема. *Існує множина $B \subset (0,1)$ мірою Лебега 1 з такою властивістю: якщо $\lambda \in B$ і*

$$0 \leqslant \varepsilon < \frac{1}{\gamma} \approx 0.305266806,$$

де $\gamma := \exp\left(\frac{\pi^2}{12\ln 2}\right) \approx 3.275822921$ — константа Хінчіна–Леві, то фазовий простір системи з гамільтоніаном $H(y, \varphi;\ \varepsilon, \lambda)$ є об'єднанням неперервних кронекерівських інваріантних торів; а якщо $\lambda \in B$ і $\varepsilon > \frac{1}{\gamma}$, то зазначена система не має жодного неперервного інваріантного тору, і всі розв'язки необмежені.

Існує множина $E \subset (0,1)$, яка складається з чисел, що погано апроксимуються раціональними числами, і яка має такі властивості:
1) міра Лебега множини E дорівнює 0;
2) розмірність Хаусдорфа множини E перевищує 0.5312805;
3) якщо $\lambda \in E$, то при $0 \leqslant \varepsilon < \sqrt{2}-1 \approx 0.414213562$ фазовий простір системи з гамільтоніаном $H(y, \varphi;\ \varepsilon, \lambda)$ є об'єднанням неперервних кронекерівських інваріантних торів.

Наслідок. *Для значення золотого перерізу $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, яке найгірше апроксимується раціональними числами, інваріантні тори зберігаються при ε, яке задовольняє наступну нерівність:*

$$0 \leqslant \varepsilon < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618033988.$$

Устойчивые периодические решения двумерной периодической системы дифференциальных уравнений с гомоклиническим решением

Е. В. Васильева
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
ekvas1962@mail.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) \tag{1}$$

где вектор X непрерывен по (t,x) и r раз непрерывно дифференцируем по x, $1 \leq r < \infty$, кроме того, вектор-функция X — ω-периодична по $t: X(t+\omega, x) = X(t,x)$, $\omega > 0$.

Предполагается, что система (1) имеет гиперболическое ω-периодическое решение $x = \varphi(t)$. Пусть, как обычно, $W^s(t)$, $W^u(t)$ — устойчивое и неустойчивое многообразия решения $\varphi(t)$. Предполагается, что пересечение $W^s(0) \cap W^u(0)$ не сводится к точке $\varphi(0)$ и любая точка $w \in W^s(0) \cap W^u(0)$, кроме точки $\varphi(0)$, изолирована в $W^s(0) \cap W^u(0)$. Решение $\psi(t)$ системы (1) с начальными данными $t = 0$, $x = w$, где $w \in W^s(0) \cap W^u(0)$ есть гомоклиническое к $\varphi(t)$ решение. Предполагается, что $W^s(0)$ и $W^u(0)$ пересекаются нетрансверсально.

Из работ [1–3] следует, что при определенном способе касания $W^s(0)$ и $W^u(0)$ все существующие однообходные периодические решения, лежащие в окрестности гомоклинического решения, неустойчивы. Показано, что при иных условиях, наложенных на характер касания $W^s(0)$ и $W^u(0)$, существуют системы, правая часть которых является r раз непрерывно дифференцируем по x, $1 \leq r < \infty$, имеющие бесконечное число однообходных устойчивых периодических решений с отделенными от нуля характеристическими показателями. Обсуждается проблема различных способов касания $W^s(0)$ и $W^u(0)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, грант 13-01-00624).

1. Иванов Б. Ф. Устойчивость траекторий, не покидающих окрестность гомоклинической кривой. Дифференциальные уравнения, 1979, том 15, С. 1409–1419.
2. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I. Мат. сб., 1972, том 88, С. 475–492.
3. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. II. Мат. сб., 1973, том 90, С. 1539–1579.

Задача Коши для уравнения типа Янушаускаса

В. Г. Вишняков

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

vvg89@mail.ru

Всюду далее предполагается, что $u = u(x_1, \ldots, x_n, z) = u(X, z)$. в пространстве J^{n+1} рассмотрим задачу Коши следующего вида (указанное ниже уравнение при $n = 2$, $G = 0$ рассматривалось в [2])

$$\begin{cases} n^n \dfrac{\partial^n u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} + \dfrac{\partial^n u}{\partial z^n} = G(X, z) \\ \left[\dfrac{\partial^k u}{\partial z^k}\right]_{z=0} = 0,\ k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

здесь G — достаточно «хорошая» функция.

Теорема. *Решение данной задачи Коши дается формулой*

$$u(X, z) = \frac{1}{(2\pi i)^n (n-1)!} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_0^z \frac{\tau^{n-1} G(t_1, \ldots, t_n, z-\tau)}{(t_1 - x_1) \cdots (t_n - x_n)} \times$$

$$\times {}_nF_{n-1} \left[\begin{array}{cccc|} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{n+1}{n} & \frac{n+2}{n} & \ldots & \frac{2n-1}{n} \end{array} - \frac{z^n}{(t_1 - x_1) \cdots (t_n - x_n)} \right] d\tau\, dt_1 \ldots dt_n,$$

где ${}_nF_{n-1}$ — обобщенная гипергеометрическая функция и внешний интеграл берется по границе такого множества, содержащего начало координат, внутри которого разложение функции $G(t_1, \ldots, t_n, z-\tau)$ в ряд Лорана в окрестности точки X не содержит членов с отрицательными степенями.

1. Шалагинов С. Д. Интегральные представления решений полигармони- ческого уравнения в комплексном пространстве. – Деп. в ВИНИТИ, 2002, № 1557-В2002, 12 с.
2. Янушаускас А. И. Аналитическая теория эллиптических уравнений. – Новосибирск: Наука, 1979.
3. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука

Про побудову асимптотичного розв'язку крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з виродженням

М. Б. Віра

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, Ніжин, Україна

VyraMaryna@mail.ru

Доповідь присвячена побудові асимптотичних розв'язків крайової задачі для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь виду

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon),$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(T,\varepsilon) = d(\varepsilon),$$

в якій $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $t \in [0;T]$; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий параметр, h — натуральне число; $A(t,\varepsilon), B(t,\varepsilon)$ — $(n\times n)$-матриці, d — l-вимірний вектор-стовпець, $f(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор-стовпець; M, N — матриці зі сталими елементами розмірністю $l\times n$.

Окремо розглядаються випадки неповного виродження матриці при похідних (матриця $B(t,0)$ є виродженою, але $B(t,\varepsilon)$ залишається невиродженою при досить малих $\varepsilon > 0$) і повного ($B(t,\varepsilon) = B(t)$ і $\det B(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0;T]$) виродження матриці при похідних.

Виходячи з методів асимптотичного аналізу сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями, розроблених у працях А. М. Самойленка, М. І. Шкіля, В. П. Яковця [1], запропоновано метод побудови асимптотичних розв'язків даної крайової задачі [2], [3].

Побудовано формальні розв'язки даної крайової задачі і знайдено умови, за яких вони мають асимптотичний характер; виведено асимптотичні оцінки для побудованих розв'язків; розроблено алгоритм знаходження коефіцієнтів відповідних асимптотичних розвинень у явному вигляді. Розглянуто випадки, коли гранична в'язка матриць $A(t,0) - \lambda B(t,0)$ має як простий так і кратний спектр. Досліджено особливості побудови розв'язків у так званому критичному випадку, коли гранична в'язка матриць має нульове власне значення.

1. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
2. В. П. Яковець, М. Б. Віра. Про побудову асимптотичних розв'язків двоточкових крайових задач для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 272–286.
3. М. Б. Віра. Двоточкова крайова задача для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра головного оператора // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 19–28.

Вироджені нелінійні диференціальні рівняння з імпульсною дією

Є. С. Войтушенко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

I_ Voitushenko@ukr.net

За припущенням, що породжуюча вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми [1], розглянуто імпульсну задачу [2] для слабконелінійних вироджених диференціальних систем рівнянь з малим параметром [3, 4] вигляду:

$$\begin{array}{c} B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + \varepsilon Z(x,t,\varepsilon), t \neq \tau_i \\ \Delta J_i\, x|_{t=\tau_i} = B_i x(\tau_i - 0) + b_i, t, \tau_i \in [a,b], i = 1, ..., p \end{array} \qquad (1)$$

де $A(t), B(t)$ — $(n \times n)$- вимірні матриці, компоненти яких є дійсними достатню кількість разів неперервно диференційованими на $[a, b]$ функціями:$A(t), B(t) \in C^{3q-1}[a,b]$; $f(t) \in C^{q-1}[a,b]$ — n-мірна вектор-функція; $x = x(t) = col(x_1(t), ..., x_n(t))$; $\det B(t) = 0$, $\forall t \in [a,b]$; $Z(x,t,\varepsilon)$ — нелінійна по x n-вимірна вектор-функція, неперервно диференційована по x в околі породжуючого розв'язку і неперервна по t, ε:

$$Z(\cdot,t,\varepsilon) \in C^1[||x - x_0|| \le \beta];\ Z(x,\cdot,\varepsilon) \in C^{q-1}[a,b];\ Z(x,t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0];$$

B_i — $(m_i \times n)$-вимірні сталі матриці, $(i = 1, ..., p)$;J_i − $(m_i \times n)$-вимірні сталі матриці $(i = 1, ..., p)$; $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$; $-\infty < a < \tau_1 < ... < \tau_i < ... < \tau_p < b < \infty, i = 1, ..., p$.

Розглянуто критичний випадок, коли відповідна породжуюча імпульсна задача має нетривіальні розв'язки $x_0(t, c_r)$. Знайдено умову існування і алгоритм побудови розв'язку

$$x = x(t,\varepsilon) : x(\cdot,\varepsilon) \in C^1([a,b]\backslash\{\tau_i\}), x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$$

імпульсної задачі (1), що перетворюється при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків $x_0(t, c_r) = x(t, 0)$ породжуючої імпульсної задачі [5]

$$\begin{array}{c} B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), t \neq \tau_i \\ \Delta J_i\, x|_{t=\tau_i} = B_i x(\tau_i - 0) + b_i, t, \tau_i \in [a,b], i = 1, ..., p \end{array} \qquad (2)$$

який називається породжуючим розв'язком імпульсної задачі (1).

У роботі отримано необхідна та достатня умови існування розв'язків. Запропонована збіжна ітераційна процедура знаходження розв'язків та встановлений зв'язок між необхідною та достатньою умовами.

1. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диферен-ціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища школа, 2000. – 294 с.
2. А. М. Самойленко, М. О. Перестюк. Диференціальні рівняння з імпульсною дією. – Київ: Вища школа, 1987.
3. A. A. Boichuk and A. M. Samoilenko. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. – VSP, Utrecht-Boston, 2004. – 317 p.
4. Бойчук О. А., Шегда Л. М. Бифуркация решений вырожденных нётеровых краевых задач // Дифференциальные уравнения – 2011. – № 4.
5. Boichuk Alexander, Ruzickova Miroslava, Langerova Martina, Voitushenko Evgenij. Systems of singular differential equations with pulse action // Advances in Difference Equations (in press).

Крайова задача для безтипного диференціально-операторного рівняння у комплексній області

І. І. Волянська, В. С. Ільків
Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна
i.volyanska@mail.ru, ilkivv@i.ua

У роботі вивчається неоднорідне диференціальне рівняння з оператором узагальненого диференціювання $B = z\dfrac{\partial}{\partial z}$, що діє на функції комплексної змінної z в області $\mathcal{S} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Встановлено умови однозначної розв'язності нелокальної крайової задачі

$$\sum_{s_0+s_1 \le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = f, \tag{1}$$

$$\mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = 0, \tag{2}$$

де $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_{n,0} = 1$, $u = u(t,z)$ — шукана функція, а $f = f(t,z)$ — задана функція змінної z. Степені оператора B визначено формулами $B^0\psi = \psi$, $B^s\psi = B(B^{s-1}\psi)$ при $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Задача досліджується у шкалах просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{S})\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{H}_q(\mathcal{S})$ — гільбертів простір функцій $\psi = \psi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k$, норма яких обчислюється за формулою $\|\psi\|_q = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q} |\psi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tilde{k} = \sqrt{1+k^2}$, а $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$, $n \in \mathbb{Z}_+$ — банахів простір функцій $u(t,z)$ таких, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t) z^k$, $r = 0,1,\ldots,n$ для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S})$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{H_q^n(\mathcal{D})} = \sum_{r=0}^{n-1} \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{H_{q-r}(S)}$$

Розглядувана задача у випадку багатьох операторів узагальненого диференціювання (за відповідними просторовими змінними $z_1, z_2, \ldots, z_p$) є некоректною за Адамаром, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку [1,3]. У випадку однієї комплексної змінної, навпаки, показано коректність за Адамаром цієї задачі; відповідні знаменники не є малими і оцінюються знизу деякими додатними сталими. Доведено теорему єдиності та встановлено умови існування розв'язку задачі у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$. Подібні результати для однорідного рівняння і неоднорідних умов знайдено в роботі [2].

1. Ільків В. С., Пташник Б. Й. *Зображення та дослыдження розв'язків нелокальної задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними* // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, № 2. – С. 184–194. // Диференціальні рівняння та їх застосування: тези допов. конф. (Ужгород, 27–29 вересня 2012 р.). – Ужгород, 2012. – С. 37.
2. Ільків В. С., Страп Н. І., Волянська І. І. Нелокальна крайова задача для рівняння з оператором диференціювання $z\partial/\partial z$ у комплексній області // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2012. – 10. – С. 15–26.

3. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

Задача Коші для узагальненого рівняння Фоккера–Планка

І. В. Гап'як

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

igapyak@gmail.com

В доповіді розглядаються основи кінетичного опису еволюції системи багатьох частинок, яка складається з виділеної пружної кулі і оточення нефіксованої кількості пружних куль. Досліджується проблема математичного обґрунтування кінетичного рівняння для функції розподілу виділеної частинки, а саме, рівняння Фоккера—Планка у випадку сингулярного потенціалу взаємодії.

Для початкових станів, які визначаються одночастинковою функцією розподілу виділеної частинки та послідовністю функцій розподілу оточення, в просторі послідовностей інтегрованих функцій доведено еквівалентність початкової задачі для ієрархії ББГКІ і початкової задачі для узагальненого рівняння Фоккера–Планка та послідовності явно визначених функціоналів від розв'язку такого рівняння (маргінальних функціоналів стану) [1]. Доведення цього твердження ґрунтується на побудованому не за теорією збурень розв'язку задачі Коші для ієрархії ББГКІ системи пружних куль з однією виділеною кулею та сформульваних перетвореннях для кумулянтів груп операторів, які за структурою є аналогом кластерних розкладів кумулянтів груп операторів системи скінченого числа пружних куль.

В просторі інтегрованих функцій побудовано розв'язок задачі Коші для узагальненого рівняння Фоккера–Планка та для відповідних початкових даних із цього простору доведено теорему про існування сильного і слабкого розв'язку [2].

Досліджено зв'язок між узагальненим рівнянням Фоккера–Планка та рівнянням для функції розподілу виділеної пружної кулі в марківському наближенні.

1. Гап'як І. В., Герасименко В. І. Узагальнене рівняння Фоккера–Планка для газу Енскоґа. Математичний вісник НТШ, 2012, Т. 9., С. 23–43.
2. Gapyak I. V., Gerasimenko V. I. On microscopic origin of the Fokker-–Planck kinetic evolution of hard spheres. Preprint, 2012, arXiv:1208.1647. – 15 p.

Единственность решения краевой задачи для одного сингулярного параболического уравнения с интегральным условием первого рода

И. Б. Гарипов, Р. М. Мавлявиев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

ilnur_garipov@mail.ru, mavly72@mail.ru

Пусть $G_T = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t \leq T\}$ — прямоугольная область в координатной плоскости Oxt.

В области G_T рассмотрим параболическое уравнение с оператором Бесселя

$$L_B u \equiv u_t - B_x u = 0,$$

где $B_x = x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}(x^k\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ — оператор Бесселя, $0 < k < 1$.

Рассматривается задача о нахождении функции $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C^{1,0}_{x,t}(\overline{G}_T) \cap C^{2,1}_{x,t}(G_T), \tag{1}$$

$$L_B u = 0, \quad (x,t) \in G_T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^l u(x,t)x^k dx = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где функция $\varphi(x)$ задана, и выполняется условие согласования

$$\int\limits_0^l \varphi(x)x^k dx = 0. \tag{6}$$

Гиперболическое уравнение с оператором Бесселя

$$u_{tt} - B_x u = 0$$

с нелокальным интегральным условием (6) изучено в работе [1].

Лемма. *Если выполняется условие согласования* (6) *то задачи* (1) – (5) *и* (1) – (4),

$$u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

эквивалентны.

Теорема. *Задача* (1) – (5) *не может иметь более одного решения.*

1. Бейлин С. А. Об одной нелокальной задаче с интегральным условием. Матем. заметки ЯГУ, 2004, Т. 11, № 2, С. 22—29.

Диференціальні рівняння функцій, породжених зростаючими факторіальними степенями

Т. П. Гой, Р. А. Заторський

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

tarasgoy@yahoo.com, romazz@rambler.ru

Нехай $n^{\overline{m}} = n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m-1)$ — зростаючий факторіальний степінь m з кроком 1, $n^{\underline{m}} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$ — спадний факторіальний степінь m з кроком -1 ($n^{\overline{0}} = n^{\underline{0}} = 1$).

Класичні трансцендентні функції e^x, $\sin x$, $\cos x$ задаються як степеневі ряди із звичайними факторіалами, які можна розглядати як спадні факторіальні степені ($n! = n^{\underline{n}}$). Замінивши у відомих степеневих розвиненнях цих функцій спадні факторіальні степені відповідними зростаючими факторіальними степенями, приходимо до нових функцій з дещо аналогічними властивостями.

За аналогією з відомими степеневими рядами

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\underline{n}}}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\underline{2n}}} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\underline{2n+1}}},$$

розглянемо функції $\operatorname{Exp} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Sin} x$, які означені при допомозі зростаючих факторіальних степенів за формулами

$$\operatorname{Exp} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\overline{n}}}, \quad \operatorname{Cos} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\overline{2n}}}, \quad \operatorname{Sin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}.$$

Теорема 1. *Для всіх $x \geq 0$ справджуються співвідношення*

$$\operatorname{Exp} x = 1 + \sqrt{\pi x}\, e^{\frac{x}{4}} \Phi\Big(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\Big),$$

$$\operatorname{Cos} x = 1 + 2\sqrt{x}\,\Big(\cos\tfrac{x}{4}\, S\Big(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\Big) - \sin\tfrac{x}{4}\, C\Big(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\Big)\Big),$$

$$\operatorname{Sin} x = 2\sqrt{x}\,\Big(\cos\tfrac{x}{4}\, C\Big(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\Big) + \sin\tfrac{x}{4}\, S\Big(\tfrac{\sqrt{x}}{2}\Big)\Big),$$

де $\Phi(p)$ — функція помилок (функція Лапласа), $S(p)$, $C(p)$ — інтеграли Френеля:

$$\Phi(p) = \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^p e^{-t^2} dt, \quad S(p) = \int_0^p \sin t^2 dt, \quad C(p) = \int_0^p \cos t^2 dt.$$

Якщо $x < 0$, то в усіх формулах теореми 1 потрібно замінити $\sqrt{x}$ на $i\sqrt{|x|}$.
Теорема 2. *Функції $\operatorname{Exp} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Sin} x$ є розв'язками відповідно таких задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь:*

$$4xy' - (x+2)y = x - 2, \quad y(0) = 1;$$

$$16x^2y'' - 16xy' + (x^2+12)y = 12 - x^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$$

$$16x^2y'' - 16xy' + (x^2+12)y = -4x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Побудовані графіки функцій $\operatorname{Exp} x$, $\operatorname{Cos} x$, $\operatorname{Sin} x$. Встановлені деякі співвідношення між цими функціями. Зокрема, справджується формула $\operatorname{Exp}(ix) = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x$, аналогічна до формули Ейлера, наслідком якої є

$$\operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Sin}^2 x = \operatorname{Exp}(ix) \cdot \operatorname{Exp}(-ix).$$

Неоднорідні системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією

І. А. Головацька
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
holovatska.iv@gmail.com

Розглядається питання про існування і побудову розв'язків неоднорідної системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у фіксований момент часу:

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds = f(t), \quad t\epsilon[a,b], \tag{1}$$

$$\Delta E_i x\Big|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}, \quad (i = 1, ..., p, \quad \tau_i \in (a,b)). \tag{2}$$

Припускається, що система (1) розв'язна [2], а $E_i,\ S_i$ — $(k_i \times n)$-вимірні матриці, γ_i — k_i-вимірний вектор-стовпчик констант; $det(E_i + S_i) \neq 0$, тобто роз'язок системи визначається однозначним продовженням через точку розриву. Задачі типу (1), (2) можуть розглядатися як внутрішні крайові задачі ("interface BVP's"). Для того, щоб показати цей зв'язок, введено $\ell x(\cdot)$ — k-вимірний лінійний обмежений векторний функціонал виду $\ell := col(\ell_1, ..., \ell_p) : D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to R^k,\ \ell_i : D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I) \to R^{k_i},\ (i = 1, ..., p)$ і отримано запис імпульсної умови (2) у вигляді крайової умови:

$$\ell x(\cdot) = \gamma \in R^k, \quad k := k_1 + k_2 + ... + k_p, \tag{3}$$

де $\gamma = col(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{k_i}) \in R^k$. Існування розв'язку "interface BVP's" (1), (3) суттєво залежить від побудованої сталої матриці $Q := col(-S_1 X_{r_1}(\tau_1), ..., -S_p X_{r_1}(\tau_p))$ — $k \times r_1$-вимірної, де $X_{r_1}(t),\ D$ відомі матриці [2], $r_1 = m + n - \mathrm{rank} D$.

Теорема. *Нехай* $\mathrm{rank} Q = n_2 \leq \min(k, r_1)$. *Тоді однорідна задача* (1), (2) *має* r_2 $(r_2 = r_1 - \mathrm{rank} Q)$ *лінійно незалежних розв'язків*:

$$x(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_{r_2}} c_{r_2},\ \forall c_{r_2} \in R^{r_2}.$$

Неоднорідна задача (1), (2) *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*:

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_{d_2}} (\gamma - \ell F(\cdot)) = 0. \tag{4}$$

При виконанні умов (4) *задача* (1), (2) *має* r_2*-параметричну сім'ю розв'язків*:

$$x(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} P_{Q_{r_2}} c_{r_2} + \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ (\gamma - \ell F(\cdot)) + F(t),\ \forall c_{r_2} \in R^{r_2},$$

визначених у наступному класі вектор-функцій:

$$x(t) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I),\ \dot{x}(t) \in L_2[a,b],\ t \in [a,b],\ \tau_i \in (a,b).$$

Тут $\tilde{b},\ \Psi(t),\ \Psi_0(t)$ відомі матриці [2]; $d_1 = m - \mathrm{rank} D,\ d_2 = k - \mathrm{rank} Q;\ \ P_D(P_{D^*})$ та $P_Q(P_{Q^*})$ — ортопроектори на ядро, відповідно, матриць $D(D^*)$ та $Q(Q^*)$. Матриця $P_{D_{r_1}}(P_{D^*_{d_1}})$ складається з повної системи $r_1(d_1)$ лінійно незалежних стовпчиків (рядків) матриці $P_D(P_{D^*})$. Матриця $P_{Q_{r_2}}(P_{Q^*_{d_2}})$ будується аналогічно [3]. Для доведення даного факту використовується відома теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1] та теорія псевдообернених за Муром–Пенроузом матриць [3].

1. А. М. Самойленко, М. О. Перестюк. Диференціальні рівняння з імпульсною дією. – Київ: Вища школа, 1987.
2. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея. Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Укр. мат. журн., 1996, 48, № 11, 1576–1579.
3. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – VSP, Utrecht – Boston. – 2004. – 317 p.

Розв'язність задачі Коші для рівномірно параболічного рівняння порядку $2b$ з дробовою похідною за часовою змінною у просторах узагальнених функцій

В. В. Городецький[1], Я. М. Дрінь[2]
[1]Чернівецький національний університет, Чернівці, Україна
[2]Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці, Україна
drin_jaroslav@i.ua

Порівняно недавно в працях А. Н. Кочубея [1, 2, 3] розпочато дослідження задачі Коші для рівняння
$$D_t^{\alpha} u = Au, \quad \alpha \in (0,1), \tag{1}$$
що містить регуляризовану дробову похідну Рімана–Ліувілля по t та A — замкнутий лінійний оператор у банаховому просторі, або еліптичний диференціальний оператор другого порядку з неперервними і обмеженими дійсними коефіцієнтами. Двоточкова за часом задача для рівняння дифузії дробового порядку досліджена в [4], де знайдено інтегральне зображення розв'язку з крайовими функціями із класу Діні. Опис дослідження задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь дробового порядку наведено в [5].

Основні результати. 1. Для рівняння (1) з диференціальним оператором A довільного порядку $2b$, $b \in \mathbb{N}$ і нескінченно диференційовними по просторових змінних коефіцієнтами побудовано фундаментальний розв'язок (ф.р.) і доведено, що він належить одному із просторів нескінченно диференційовних функцій типу S (визначених в [6]).

2. Сформульована задача Коші для рівняння вигляду (1) з початковою функцією із відповідного простору узагальнених функцій типу S'. Така постановка задачі є природною, адже початкова функція може мати особливості в одній або кількох точках і допускати регуляризацію в певних просторах узагальнених функцій.

3. Доведена розв'язність задачі Коші і встановлено зображення розв'язку у вигляді $u(t,x) = \langle f, Z(t,x,\cdot)\rangle$, де Z — ф.р., $f \in X'$. Тут X' — клас узагальнених початкових функцій, для яких розв'язок $u(t,\cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ при кожному $t > 0$, а відповідну початкову умову $u(t,\cdot)$ задовольняє в просторі X'.

4. Доведено, що розв'язок володіє властивістю локального покращення збіжності: якщо узагальнена функція f збігається на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}^n$ з неперервною функцією g, то на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$ розв'язок задачі Коші $u(t,\cdot)$ збігається до g при $t \to +0$ рівномірно відносно x.

1. Кочубей А. Н. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка. Дифференц. уравнения, 1989, **23**, 1359–1368.
2. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка. Дифференц. уравнения, 1990, **26**, 485–492.
3. Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д. Уравнения одномерной фрактальной диффузии. Доповіді НАН України, 2003, **12**, 1–16.

4. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958

Коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь із псевдобесселевими операторами

В. В. Городецький, О. В. Мартинюк, Р. І. Петришин
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
alfaolga@rambler.ru, r.petryshyn@chnu.edu.ua

Останнім часом велика увага приділяється дослідженню нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними. До таких задач належать і нелокальні багатоточкові за часом задачі. Загальне означення нелокальних умов та їх класифікація були запроваджені А. М. Нахушевим [1]. На доцільність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач уперше вказав О. О. Дезін [2]. Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (В. К. Романко, А. Х. Мамян, С. Г. Крейн, М. І. Матійчук, Б. Й. Пташник, В. І. Чесалін, О. А. Самарський та ін.). Одержані важливі результати щодо побудови розв'язків та коректної розв'язності таких задач, досліджені питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У роботі побудовано та досліджено властивості фундаментального розв'язку нелокальної m-точкової ($m \geq 1$) за часом задачі для еволюційних рівнянь, що містять псевдобесселеві оператори вигляду $F^{-1}_{B_\nu}[aF_{B_\nu}]$, де F_{B_ν}, $F^{-1}_{B_\nu}$ — пряме і обернене перетворення Бесселя, a — символ оператора. Встановлено коректну розв'язність задачі у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу розподілів. Дослідження таких задач з крайовими умовами в тих чи інших просторах узагальнених функцій є природним, оскільки граничні функції можуть мати особливості в одній або декількох точках. Якщо ці особливості степеневого порядку, то такі функції допускають регуляризацію у просторах узагальнених функцій скінченного порядку типу розподілів Соболєва–Шварца. Якщо ж порядок особливостей вищий за степеневий, то ці функції є узагальненими функціями нескінченного порядку. Тут знайдено клас X' узагальнених граничних функцій, для яких розв'язок $u(t,\cdot)$ багатоточкової задачі зображується у вигляді згортки граничної функції з фундаментальним розв'язком цієї задачі, який є елементом простору X основних функцій, при цьому розв'язок має ті ж властивості, що і фундаментальний розв'язок, зокрема $u(t,\cdot) \in X$ при кожному $t \in (0, T]$, а відповідну крайову умову $u(t,\cdot)$ задовольняє у просторі X'.

1. Нахушев А. М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1985. – 21, №1. – С. 92–101.
2. Дезин А. А. Операторы с первой производной по «времени» и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – 31. №1. – С. 61–86.

Про обмежені та сумовні зі степенем p розв'язки різницевого рівняння з цілочисельним аргументом

М. Ф. Городній[1], **А. В. Сиротенко**[2]
[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
[2]Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна
gorodnii@yandex.ru, antonsyrotenko86@gmail.com

Нехай B — комплексний банахів простір, $A : D(A) \to B$ — замкнений оператор з областю визначення $D(A) \subset B$. Відомо, що при фіксованому $p \in [1, \infty]$ різницеве рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + y_n, \quad n \in Z, \tag{1}$$

має для довільної сумовної зі степенем p (обмеженої при $p = \infty$) послідовності $\{y_n\} \subset B$ єдиний сумовний зі степенем p розв'язок $\{x_n\}$ тоді і тільки тоді, коли для спектра $\sigma(A)$ оператора A виконується умова

$$\sigma(A) \cap \{z \in C : \ |z| = 1\} = \varnothing. \tag{2}$$

У випадку, коли умова (2) не виконується, знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб рівняння (1) мало єдиний сумовний зі степенем p розв'язок для кожної сумовної зі степенем p послідовності $\{y_n\}$, яка належить деякому інваріантному відносно оператора A лінійному многовиду $U \subset B$.

Формально самоспряжені квазідиференціальні оператори і крайові задачі

А. С. Горюнов
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
goriunov@imath.kiev.ua

В доповіді розглядаються квазідиференціальні оператори, породжені у гільбертовому просторі $L_2([a, b], \mathbb{C})$ формально самоспряженими квазідиференціальними виразами Шина–Цеттла довільного порядку на скінченному інтервалі. Для таких операторів побудовані граничні трійки, що відповідають мінімальним симетричним операторам. За їх допомогою дається опис всіх максимальних дисипативних, максимальних акумулятивних та самоспряжених розширень мінімального оператора в просторі $L_2([a, b], \mathbb{C})$, а також всіх його узагальнених резольвент в термінах крайових умов канонічного виду.

Також отримано регуляризацію двочленних формальних диференціальних виразів довільного порядку m з узагальненими функціями порядку $\leq m/2$ в коефіцієнтах, яка дозволяє визначити відповідні оператори як квазідиференціальні за Шином–Цеттлом.

Результати отримані спільно з В. Михайлецем. Вони опубліковані в роботах [1–4].

1. A. Goriunov, V. Mikhailets. Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials, Math. Notes, 2010, 87, no. 2, 287–292.
2. A. Goriunov, V. Mikhailets. Regularization of singular Sturm–Liouville equations, Methods Funct. Anal. Top., 2010, 16, no. 2, 120–130.
3. A. Goriunov, V. Mikhailets. Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives, Ukr. Math. J., 2012, 63, no. 9, 1361–1378.
4. A. Goriunov, V. Mikhailets, K. Pankrashkin. Formally self-adjoint quasi-differential operators and boundary-value problems, Electron. J. Diff. Equ., 2013, **2013**, no. 101, 1–16.

О применении компьютерной алгебры в проблемах гомографической динамики

Е. А. Гребеников, Н. И. Земцова

Вычислительный центр РАН, Москва, Россия

e-greben@yandex.ru, zemni@yandex.ru

Известно, что гамильтоновы дифференциальные уравнения космической динамики при определенных условиях, наложенных на геометрические и динамические параметры модели, допускают гомографические решения в смысле Винтнера [1–3]. Также хорошо известно [4], что всякое гомографическое решение ньютоновой проблемы n тел порождает новую динамическую модель — ограниченную проблему $(n+1)$-тел, состоящую в исследовании всевозможных движений бесконечно малой массы в поле притяжения n гравитирующих масс. Качественные исследования ограниченной ньютоновой проблемы $(n+1)$ тел сводятся, прежде всего, к нахождению стационарных решений ее дифференциальных уравнений и выяснению их устойчивости в первом приближении и в смысле КАМ-теории.

Для решения вышеизложенных задач нами предложен алгоритм компьютерного моделирования в системе Mathematica и написан комплекс соответствующих программ [5–7]. Данный алгоритм состоит из следующих этапов:

1) нахождение новых гомографических решений;

2) нахождение стационарных решений дифференциальных уравнений ограниченной задачи;

3) исследование линейной устойчивости стационарных решений, в тех случаях, когда это возможно;

4) исследование устойчивости стационарных решений по Ляпунову;

5) численные исследования свойств положений равновесия;

6) анимация графической информации.

1. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. – Москва: Наука, 1967.
2. Гребеников Е. А. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел. Мат.моделирование, 1998, Т. 10. N. 8. С. 75–80.
3. Elmabsout B. Sur l'existence de certaines configurations d'equilibre relatif dans le probleme des n corps. J. Celaestial Mech. And Dynamical Astr., 1988, V. 4. N. 1. P. 131–151.
4. Гребеников Е. А. Математические проблемы гомографической динамики. – Москва: МАКС Пресс, 2010.
5. Д. Козак-Сковородкин. Применение компьютерной системы Mathematica в качественных исследованиях ньютоновой проблемы многих тел. – Москва: РУДН, 2005.
6. Е. А. Гребеников, Л. Гадомский, Н. И. Земцова, М. Якубяк. Анимация графической информации в ограниченных ньютоновых задачах многих тел. Препринт. – Москва: Изд-во ВЦ РАН, 2006.
7. Н. И. Земцова. Качественные исследования ньютоновой проблемы многих тел методами компьютерной алгебры. Препринт. – Москва: Изд-во ВЦ РАН, 2010.

Про одне матричне диференціальне рівняння типу Ляпунова та монотонні лінійні розширенння

А. Л. Гречко
Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна
and.grechko@gmail.com

Розглядається лінійне розширення над компактною базою B: $\pi^t(b,x) = (\varphi^t(b), \Phi(b,t)x) : B \times R^n \times R \to B \times R^n$, де X — скінченновимірний векторний простір, B — метричний компакт, $\varphi^t(b)$ — неперервний потік на B, $\Phi(b,t)$ — коцикл. Позначимо X^+ — довільний додатній конус в X та нагадаємо, що лінійне розширення π^t є строго монотоним [2], якщо $\Phi(b,t)u_0 \in intX^+$, $\forall u_0 \in X^+$. В доповіді розглядається лінійне розширення, яке задається ситемою звичайних диференціальних рівнянь [1]:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi \in B,\ x \in R^n,\ A(\varphi) \in C^0(B), a(\varphi) \in C_{lip}(B)$. Встановлено, що за умови строгої монотонності лінійного розширення (1) матричне диференціальне рівняння типу Ляпунова

$$\dot{S} = SA^* + AS + \mu\langle E \cdot S\rangle E \tag{2}$$

має одновимірний инваріантний многовид. Показується, що асімтотична стійкість тривіального розв'язку квазілінійного збурення лінійного розширення (1) зводиться до існування в конусі додатніх квадратичних форм єдиного розв'язку неоднорідного рівняння (2) при $\mu \to 0$. Також розглядаються якісні властивості лінійних розширень (1) за умови монотонності матричного диференціального рівняння Рікатті.

1. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 303 с.
2. Smith H. Monotone dynamical systems. An introduction to the theory of competitive and cooperative system. – AMS, Math.Surv.Monogr., Providence, 1995. – Vol. 11. – 254 p.

Про існування обмежених розв'язків одного класу нелінійних диференційних рівнянь

І. М. Грод
Тернопільський національний педагогічний університет ім. Володимира Гнатюка, Тернопіль, Україна
igrod@ukr.net

Одним із важливих питань теорії диференціальних рівнянь є питання існування обмежених на $\mathbb{R}$ розв'язків диференціальних систем [1,2]. На сьогоднішній день достатньо вивчені лінійні системи виду $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$ де $A(t), f(t) \in \mathbb{C}^0(R)$. Зокрема, в роботі [1] отримані необхідні і достатні умови того, що система має єдиний обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок при будь якому $f(t) \in \mathbb{C}^0(R)$. В випадку коли A постійна матриця, це рівносильно тому, що для її спектра $\sigma(A)$ справедливе співвідношення $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \neq 0\}$. Системи, які мають таку властивість називають ще регулярними на оси $\mathbb{R}$ [1].

Для нелінійних систем вигляду $\frac{dx}{dt} = A(x)x + f(t)$, де $A(x)$ неперервна і обмежена на $\mathbb{R}$ матрична функція, виконання співвідношення $\sigma(A(x)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda \neq 0\}$, як показують приклади, не гарантує існування обмеженого на $\mathbb{R}$ розвя'зку. А тому цікавим є знаходження додаткових умов, які б забезпечили існування таких розв'язків.

Розглянемо більш загальну задачу, а для цього введемо деякі позначення.

Нехай $\mathbb{C}^0$ — банахів простір обмежених і неперервних на всій осі $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ із значеннями в скінченно вимірному банаховому просторі $\mathbb{E}$ з нормою $\|x(t)\|_{\mathbb{C}^0} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathbb{E}}$ і $\mathbb{C}^1$ — банахів простір всіх тих функцій $x \in \mathbb{C}^0$, для кожної з яких $\frac{dx}{dt} \in \mathbb{C}^0$, з нормою $\|x\|_{\mathbb{C}^1} = \max\left\{\|x\|_{\mathbb{C}^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{\mathbb{C}^0}\right\}$. Через $A(x)$ позначимо неперервну на $\mathbb{E}$ функцію із значеннями в $L(\mathbb{E},\mathbb{E})$, де $(L(\mathbb{E},\mathbb{E})$ — банахів простір всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathbb{E}$.

Розглядається нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x + f(t). \tag{1}$$

Для отримання основних тверджень вводиться в розгляд допоміжний оператор $L_y : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$, що визначається рівністю:

$$(Lx_y)(t) = \frac{dx}{dt} - A(y(t))x(t), t \in \mathbb{R},$$

де $y \in \mathbb{C}^0$.

Теорема. *Припустимо, що функція $A(x)$ в (1) така, що виконуються умови*:

1) для кожного $y \in \mathbb{C}^0$ оператор $L_y : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$ має обернений неперервний $(L_y)^{-1} : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$.

2) $\sup\limits_{y\in\mathbb{C}^0} \|(L_y)^{-1}\|_{\mathbb{L}(C^0,C^1)} < +\infty$ *Тоді для кожної функції $f(t) \in \mathbb{C}^0$, диференціальне рівняння* (1) *має хоча б один обмежений розв'язок $x = \overline{x}(t)(\overline{x}(t) \in \mathbf{C}^1)$.*

1. Mitropolsky Yu., Samoilenko A., Kulik V. Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems // Taylor & Francis Inc, London, 2003.
2. Слюсарчук В. Е. Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Матем. заметки. – 1987. – 42, № 2. С. 262–267.

Конвергенція в системах різницевих рівнянь

В. Я. Данілов[1], В. В. Могильова[2]

[1]Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ, Україна

[2]Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна

danilov-vy@ukr.net, ostanzh@gmail.com

В евклідовому просторі розглядається система різницевих рівнянь

$$y_{n+1} - y_n = \triangle y_n = f_n(y_n), \tag{1}$$

тут $f_n(y_n) = f(n, y_n)$ — d-мірна вектор функція, $y_n \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{Z}$.

Означення. *Скажемо, що система* (1) *має властивість конвергенції, якщо*

1. Існує єдиний її розв'язок η_n, визначений і обмежений при $n \in \mathbb{Z}$, тобто:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\eta_n| < \infty;$$

2. Розв'язок η_n асимптотично стійкий в цілому, тобто для довільного розв'язку $y_n(n_0, y)$, $y_n(n_0, y_0) = y_0$ системи (1) *виконується властивість:*

$$\lim_{n\to\infty} [y_n(n_0, y) - \eta_n] = 0.$$

Встановлюються умови конвергентності системи типу (1).

Теорема 1. *Нехай система* (1) *має вигляд:*

$$y_{n+1} - y_n = Ay_n + f_n, \tag{2}$$

де A *— постійна* $(d \times d)$*-матриця і* $f_n = f_n$ *— вектор функція.*
Тоді при виконанні умов:
1. $\| E + A \| < 1$;
2. існує $M > 0$*, що* $| f_n | < M$*,* $n \in \mathbb{Z}$
система (2) *має властивість конвергенції, причому:*

$$\eta_n = \sum_{k=-\infty}^{n} (E + A)^{n-k} f_{k-1}$$

представляє собою єдиний обмежений розв'язок системи (2).

Відносно конвергентності нелінійних систем (1) справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*
1. існує $R > 0$*, що при* $| y | \leq R$ $| y + f_n(y) | \leq R$*, при довільному* $n \in \mathbb{Z}$*;*
2. функція $f(n, y_n)$ *диференційована по* y *при* $y_n \in \mathbb{R}^d$ *і*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \| E + \frac{\partial f_n}{\partial y}(y) \| < 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді система (1) *має властивість конвергенції.*

1. Данілов В. Я., Ковальчук Т. В. Конвергенція в системах різницевих рівнянь // Динамические системы. – 2012. –Т. 2 (30), № 1–2. – С. 33–40.
2. Станжицький О. М., Ткачук А. М. Дисипативність розв'язків диференціальних рівнянь та відповідних їм різницевих рівнянь. // Укр. мат. журнал. – 2005. – Т. 57, № 7. – С. 989–996.
3. Станжицький О. М., Ткачук А. М. Про зв'язок між властивостями розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь. // Укр. мат. журнал. – 2006. – Т. 58, № 9. – С. 1249–1256.

Інваріантні тори однієї коливної системи

А. В. Дворник
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
a.dvornyk@gmail.com

Розглядається система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = [(\lambda + \varepsilon g(x, \varphi))H + \varepsilon f(x, \varphi)E]x, \ \frac{d\varphi}{dt} = \nu + \varepsilon h(x, \varphi). \tag{1}$$

Тут $H = \operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_{n_1})$, H_k — матриці розмірності 2×2, $H_k^2 = -E$, E — одинична матриця відповідної розмірності, функції $g(x, \varphi)$, $f(x, \varphi)$ та $h(x, \varphi)$ достатньо гладкі за $x \in \mathbb{R}^{2n_1}$, $\varphi \in \mathbb{R}^{n_2}$ та 2π-періодичні за φ, $\lambda_1, \ldots \lambda_{n_1}$ та $\nu_1, \ldots \nu_{n_2}$ — додатні числа з частотним базисом ω. Під множенням матриці $A = \operatorname{diag}(A_1, \ \ldots, \ A_{n_1})$, де $A_1, \ \ldots, \ A_{n_1}$ мають розмірність 2×2, на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^{n_1}$ мається на увазі вираз $A\alpha = \alpha A = \operatorname{diag}(\alpha_1 A_1, \ldots, \alpha_{n_1} A_{n_1})$.

Знайдено умови на функції $g(x,\varphi)$, $f(x,\varphi)$ та $h(x,\varphi)$, при яких система (1) приводиться заміною змінних до системи вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F_1(y), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon F_2(y). \tag{2}$$

Квазістатичним положенням рівноваги системи (2) відповідають інваріантні тори системи (1), характер стійкості яких співпадає з характером стійкості квазістатичних положень рівноваги.

1. Самойленко А. М. Асимптотический метод исследования m-частотных колебательных систем. Укр. мат. журн., 1998, 50, № 10, С. 1366 – 1387.
2. Дворник А. В. Асимптотичне дослідження слабконелінійної багаточастотної коливної системи. Нелінійні коливання, 2010, 13, № 3, С. 314 – 327.

Об одном определении общего решения линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

Д. С. Джумабаев

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

dzhumabaev@list.ru

На $[0,T]$ рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

где $A(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$.

Хорошо известна роль общего решения в теории краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Общее решение зависит от произвольного вектора $c \in R^n$ и сводит вопрос разрешимости линейной краевой задачи к разрешимости некоторого линейного алгебраического уравнения.

Для линейного обыкновенного дифференциального уравнения общее решение существует при любой правой части и оно состоит из общего решения однородного и одного частного решения неоднородного дифференциального уравнения.

В отличие от дифференциального уравнения интегро-дифференциальное уравнение имеет решение не при любой правой части $f(t)$. Одним из основных способов нахождения общего решения линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма является метод А. И. Некрасова [1]. В этом методе интегральный член предполагается правой частью дифференциального уравнения и используя его общее решение составляется промежуточное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Если это уравнение однозначно разрешимо, то метод позволяет получить общее решение уравнения (1).

Однако, как показано в [2] однозначная разрешимость промежуточного интегрального уравнения не является необходимым условием существования решения интегро-дифференциального уравнения (1). Тем самым метод А. И. Некрасова позволяет найти общее решение только для определенного класса уравнении (1).

Возникает вопрос: Нельзя ли дать новое определение общего решения уравнения (1), которое существует для любой функции $f(t)$ и при выполнении условии метода А.И.Некрасова совпадает с известным определением общего решения.

В сообщений этот вопрос исследуется на основе метода и результатов [2]. Дано новое определение общего решения уравнения (1). Основой определения служат разбиение интервала и решения специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений с параметрами, соответствующие этому разбиению. В отличие от известного определения здесь произвольными могут быть несколько вводимых параметров размерности n.

1. Некрасов А. И. Об одном классе линейных интегро–дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ, – 1934. вып. 190. – С.1–25.
2. Джумабаев Д. С. Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50, №7. – С.1209–1221.

Коректна розв'язність задачі Коші для параболічних систем типу Шилова

І. М. Довжицька

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

ira_nezvanova@mail.ru

Розглядається клас систем диференціальних рівнянь із частинними похідними порядку p вигляду

$$\partial_t u(t;x) = \{P_0(t;i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x)\}u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0,T]} := (0;T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_m)$,

$$P_0(t;i\partial_x) := \left(P_0^{lj}(t;i\partial_x) := \sum_{|k|_* \le p} a_{0,k}^{lj}(t) i^{|k|_*}\partial_x^k\right)_{l,j=1}^m,$$

$$P_1(t,x;i\partial_x) := \left(P_1^{lj}(t,x;i\partial_x) := \sum_{|k|_* \le p_1} a_{1,k}^{lj}(t;x) i^{|k|_*}\partial_x^k\right)_{l,j=1}^m,$$

в яких відповідна система

$$\partial_t u(t;x) = P_0(t;i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2}$$

є параболічною за Шиловим з показником параболічності h, $0 < h \le p$, і невід'ємним родом μ $(0 \le \mu \le 1)$ [1].

Для таких систем за певних умов на параметр p_1 і коефіцієнти системи (1) у [2] побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші $Z(t,x;\tau,\xi)$ та досліджено її основні властивості, зокрема, встановлено, що елементи цієї матриці стосовно кожної просторової змінної x і ξ належать до простору $S_{1-\frac{\mu}{p_0}}$ Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є.

Для системи (1) задається початкова умова

$$u(t;\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in \mathbb{S}'_{1-\frac{\mu}{p_0}}, \quad \mu \ge 0, \tag{3}$$

яка розуміється як слабка збіжність у просторі $S'_{1-\frac{\mu}{p_0}}$, тобто

$$\langle u(t;\cdot), \varphi(\cdot)E\rangle \underset{t\to+0}{\longrightarrow} \langle f, \varphi(\cdot)E\rangle \quad (\forall \varphi \in S_{1-\frac{\mu}{p_0}}),$$

де $\mathbb{S}'_\alpha$ — топологічно спряжений простір з $\mathbb{S}_\alpha$, $\mathbb{S}_\alpha$ — векторний аналог відповідного простору S_α, а E — одинична матриця порядку m.

Встановлено існування звичайного розв'язку системи (1), який у зазначеному сенсі задовольняє початкову умову (3), та досліджено його гладкість. А саме, обґрунтовано правильність наступного твердження.

Теорема. *Нехай $f \in \mathbb{S}'_{1-\frac{\mu}{p_0}}$, тоді відповідна задача Коші (1), (3) є коректно розв'язною, її розв'язок диференційовний за змінною t, нескінченно диференційовний за змінною x і зображується формулою*

$$u(t;x) = \langle f, Z(t,x;0,\cdot)\rangle, \quad (t;x) \in (0;T] \times \mathbb{R}^n$$

(тут кутовими дужками $\langle,\rangle$ позначено дію узагальненої функції на основну).

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
2. В. А. Літовченко, І. М. Довжицька. Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами. Український математичний вісник, 2010, том 7, с. 516–552.

Асимптотика решений дифференциальных уравнений, асимптотически близких к линейным

В. М. Евтухов

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина

emden@farlep.net

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) y L(y), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $L : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная и медленно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0. Здесь в силу определения медленно меняющейся функции (см., например, [1])

$$\lim_{y \to Y_0} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1 \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0.$$

Ввиду этого условия наибольший интерес для изучения представляют решения уравнения (1), определенные в левой окрестности ω, со следующими свойствами

$$y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0. \tag{2}$$

При их исследовании следует учитывать, что имеет место (см. [1]) асимптотическое соотношение $L(y) \sim |y|^{o(1)}$ при $y \to Y_0$, т.е. ситуация, когда уравнение (1) является "асимптотически близким" к линейному. Кроме того, каждое из таких решений является строго монотонным вместе с производными до порядка $n-1$ включительно в некоторой левой окрестности ω и поэтому существуют конечные или равные $\pm\infty$ пределы $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) \quad (k = \overline{1, n-1})$.

Решение y уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ — решением, где $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и наряду с (2) удовлетворяет следующим условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty \end{cases} \quad (k = \overline{1, n-1}), \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_0.$$

По своим асимптотическим свойствам множество всех $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ — решений распадается на $n+2$ непересекающихся подмножеств, соответствующих различным значениям λ_0.

Для каждого из возможных типов $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ — решений уравнения (1) получены необходимые и достаточные условия их существования, а также асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ — решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

В частном случае, когда $L(y) \equiv 1$ (случай линейного уравнения), установленные результаты дополняют результаты из [2] (Гл.1, §6, стр. 175–194).

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985.
2. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1990.

Конвергентность нелинейных систем непрямого управления в окрестности программного многообразия

С. С. Жуматов

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

sailau.math@mail.ru

Рассматривается задача построения систем непрямого управления, подверженных внешним воздействиям, по заданному $(n-s)$-мерному программному многообразию $\Omega(t) \equiv \omega(t,x) = 0$ [1–2], которая сводится к исследованию качественных свойств относительно вектор-функции ω, следующей системы

$$\dot{\omega} = -A\omega - HB\xi - Hg(t), \ \dot{\xi} = \varphi(\sigma), \ \sigma = P^T\omega - Q\xi, \ H = \frac{\partial \omega}{\partial x}. \tag{1}$$

где $B \in R^{n\times r}, \ P \in R^{s\times r}, (Q > 0) \in R^{r\times r}$ — матрицы, $x \in R^n$ — вектор состояния объекта, $g \in R^s$ — вектор внешних возмущений, $\omega \in R^s$-вектор $s \le n$, $\xi \in R^r$ — вектор управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющий условиям

$$\varphi(0) = 0 \wedge 0 < \sigma^T\varphi \le \sigma^T K\sigma. \tag{2}$$

В пространстве R^n выделим область $G(R) = \{(t,x) : t \in I \wedge \|\omega(t,x)\| \le \rho < \infty\}$. В [3–4] получены условия конвергентности нелинейных систем, относительно нулевого положения равновесия. В рассматриваемой работе мы исследуем условия конвергентности в окрестности программного многообразия.

Определение. *Будем говорить, что программное многообразие $\Omega(t)$ обладает свойством экспоненциальной конвергенции относительно вектор-функции ω при $t \to \infty$, если в области* (3) *существуют $N > 0, \alpha > 0$ такие, что выполняется*

$$\|z_1(t) - z_2(t)\| \le N \exp[-\alpha(t - t_0)]\|z_1(t_0) - z_2(t_0)\|. \tag{3}$$

для любой $z(t_0, x_0)$ и $\varphi(\sigma)$ удовлетворяющей условиям, где $\|z\|^2 = \|\omega\|^2 + \|\xi\|^2$.

Теорема. *Пусть система (1) асимптотически устойчива относительно вектор-функции ω при нелинейной функции $\varphi(\sigma)$ удовлетворящей условиям (2) существуют диагональные матрицы $L_0, L_1 = L_1^T, L_2, \beta$, кроме того $\beta > 0$, такие что*

$$l_s^{-1} V_0 exp[\alpha_1(t - t_0)] \le z^2 \le l_1^{-1} V_0 exp[\alpha_1(t - t_0)] \tag{4}$$

и для любого $t > t_0$ выполняется (3). Тогда программное многообразие обладает свойством экспоненциальной конвергенции относительно вектор-функции ω.

Здесь l_1, l_s некоторые комбинации наименьших и наибольших корней соответствующих характеристических уравнений.

1. Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. Прикл. Мат. и мех. 1952. Т. 16. Вып. 6. С. 653–670.
2. Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения. Вестник Российского ун-та Дружбы народов, 1994. № 1. С. 5–21.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
4. Якубович В. А. Методы теории абсолютной устойчивости // Методы исследования нелинейных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1975. С. 74–180.

Псевдообернений оператор до інтегрального оператора Фредгольма з виродженим ядром у гільбертовому просторі

В. П. Журавльов

Житомирський національний агроекологічний університет, Житомир, Україна

vfz2008@ukr.net

Нехай $\mathbf{H}_1$ — дійсний гільбертовий простір, $\mathcal{I}$ — скінченний проміжок, $z(t)$ — функція зі значеннями в гільбертовому просторі $\mathbf{H}_1$, вимірна у сенсі Бохнера [1], така, що $\int_a^b \|z(t)\|^2_{\mathbf{H}_1} dt < \infty$. Тоді простір таких функцій буде гільбертовим. Позначимо його $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$.

Розглянемо побудову псевдооберненого оператора до інтегрального оператора

$$(Lz)(t) := z(t) - M(t) \int_a^b N(s) z(s) ds, \tag{1}$$

де оператор-функції $M(t) = \{m_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ та $N(t) = \{n_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{\infty}$ задовольняють умовам

$$\int_a^b \sum_{i,j=1}^{\infty} m_{ij}^2(t) dt = M_0^2 < \infty, \quad \int_a^b \sum_{i,j=1}^{\infty} n_{ij}^2(t) dt = N_0^2 < \infty,$$

при виконанні яких інтегральний оператор (1) діє з гільбертового простору $\mathbf{L}_2(\mathcal{I}, \mathbf{H}_1)$ в себе.

Нехай оператор $D = I_{\mathbf{B}_1} - A$, $(A = \int\limits_a^b N(t)M(t)\,dt)$ — узагальнено оборотний. Тоді існують ортопроектори $P_{N(D)} : \mathbf{H}_1 \to N(D)$, $P_{N(D^*)} : \mathbf{H}_1 \to N(D^*)$ та обмежений узагальнено-обернений оператор D^-, а вектор-стовпці оператор-функцій $X(t) = M(t)P_{N_0(D)}$; $\Phi(t) = N^*(t)P_{N_0(D^*)}$ є повними системами лінійно-незалежних вектор-функцій, які складають базиси нуль-просторів $N(L)$ та $N(L^*)$ інтегральних операторів L та L^*, відповідно, де $P_{N_0(D)}$ та $P_{N_0(D^*)}$ звуження операторів $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$ на підпростори $N_0(D)$ та $N_0(D^*)$, які породжені системами лінійно-незалежних вектор-стовпців матриць-ортопроекторів $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$, відповідно.

Позначимо $\tilde{\alpha}^{-1} = P_{N_0(D)}\alpha^{-1}P^*_{N_0(D)}$, $\tilde{\beta}^{-1} = P^*_{N_0(D^*)}\beta^{-1}P_{N_0(D^*)}$, де $\alpha = \int\limits_a^b X^*(t)X(t)dt$, $\beta = \int\limits_a^b \Phi^*(t)\Phi(t)dt$ — самоспряжені оборотні обмежені зліченновимірні матриці Грама.

Теорема. *Нехай D — нормально розв'язний оператор. Тоді оператор*

$$\begin{gathered}(L^+f)(t) = f(t) + M(t)D^-\int\limits_a^b N(s)f(s)ds - M(t)\tilde{\alpha}^{-1}\int\limits_a^b M^*(s)f(s)ds + \\ + M(t)\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-1}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds - N^*(t)\tilde{\beta}^{-1}\int\limits_a^b N(s)f(s)ds\end{gathered} \tag{2}$$

є єдиним обмеженим псевдооберненим [2] *оператором до інтегрального оператора* (1).

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
2. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalised inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV. – 317 p.

Два підходи до побудови оптимальних числових методів другого порядку

В. М. Заяць

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

zvm01@rambler.ru

У програмах комп'ютерного аналізу коливних систем з високою добротністю, для яких перехідні процеси є тривалими [1], виникає проблема між складністю різницевого алгоритму та його точністю. Як правило, використовують методи не вище другого порядку складності або їх комбінації. Зокрема, часто застосовують метод трапецій [1, 2], різницева формула якого має вигляд (1). У роботі [3] запропоновано врахування поправок наступної точки дискретизації не на середині кроку h, а в момент часу коли вклади явного і неявного методів Ейлера є еквівалентними. В результаті отримано нову різницеву формулу (2).

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1}), \tag{1}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2 \cdot h \cdot \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{f}_{n+1}}{(\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1})}. \tag{2}$$

Оскільки за побудовою формули (2) вклад кожного з методів Ейлера не перевищує половини віддалі між $\mathbf{x}_n$і $\mathbf{x}_{n+1}$, то метод (2) дає гарантоване обмеження на величину похибки дискретизації на кожному кроці та забезпечує її додатність.

Враховуючи, що похибка методу (2) і методу трапецій (1) мають протилежні знаки, можна провести їх арифметичне усереднення, тим самим зменшити величину похибки. Застосовуючи на першій половині кроку формулу (2), а на другій формулу (1), на k-ій ітерації отримуємо різницеву комбінацію k-го роду (ККР):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a_k \cdot h \cdot \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{f}_{n+1}}{(\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1})} + a_{k+1} \cdot h \cdot (\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1}), \tag{3}$$

$$\text{де} \quad a_k = \frac{2^k - (-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1}}; \quad a_{k+1} = \frac{2^{k+1} + (-1)^k}{3 \cdot 2^{k+1}}.$$

Очевидно, з ростом k величини коефіцієнтів a_k і a_{k+1} зменшуються, що приводить до зменшення похибки дискретизації. З метою безпосереднього отримання аналітичного виразу, для якого похибка дискретизації в першому наближені відсутня, знайдемо координати точок, що відповідають перетину дотичних, проведених в двох сусідніх n і n+1 точках дискретизації. В результаті отримуємо оптимальну комбінацію числового методу другого порядку, для якої похибка дискретизації відсутня:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + {}^{h}\!/_{2}(\mathbf{f}_n + h \cdot \mathbf{f}_{n+1}). \tag{4}$$

За алгоритмічною складністю (4) простіший методу (3) і несуттєво поступається методу (1), забезпечуючи при цьому мінімальну похибку вирахувань, пов'язану лише з точністю подання чисел в середовищі вирахувань. Зазначимо, що отримані різницеві формули (3), (4) для дискретизації неперервних систем володіють властивістю А–стійкості, що унеможливлює нагромадження похибки дискретизації при тривалих перехідних процесах, які характерні для динамічних систем з високою добротністю.

1. Заяц В. М. Ускоренный поиск установившихся режимов в высокочастотных автогенераторах с длительными переходными процессами. – 1993.– № 3. – С. 26–32.

2. Петренко А. І. Числові методи в інформатиці. К.: Видавництво BHV, 1999.– 450 с.

3. Заяць В. М. Побудова комбінованих різницевих методів другого порядку // Зб. праць наук. техн. конф. "Обчислювальні методи і системи перетворення інформації", Львів, 7-8 жовтня 2011. – ФМІ НАНУ. – 2011. – С. 34–36.

О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Е. Зернов, И. В. Келюх

Южноукрианский национальный педагогический университет имени К. Д. Ушинского

user85085@mail.ru

В докладе рассматриваются задачи Коши вида:

$$\alpha_1(t)\, x_1'(t) = f_1(t, x(g(t)), x'(h(t))), \tag{1}$$

$$\alpha_2(t)\, x_2'(t) = f_1(t, x(g(t)), x'(h(t))), \tag{2}$$

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \tag{3}$$

где $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}^2$ — неизвестная функция, $x=col\,(x_1,x_2)$, $\alpha_i:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывные функции, $i\in\{1,2\}$,

$$\lim_{t\to+0}\alpha_i(t)=0, i\in\{1,2\}, \lim_{t\to+0}\frac{\alpha_1(t)}{\alpha_2(t)}=0,$$

$f_i:D\subset\mathbb{R}$ — непрерывные функции, $D\subset(0,\tau)\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, $g:(0,\tau)\to(0,+\infty)$, $h:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — непрерывные функции, $g(t)\le t,\ h(t)\le t,\ t\in(0,\tau)$.

Решением задачи (1) – (3) называется непрерывно дифференцируемая функция $x:(0,\rho)\to\mathbb{R}^2\quad(0<\rho\le\tau)$, которая удовлетворяет уравнениям (1), (2) при всех $t\in(0,\rho)$ и при этом

$$\lim_{t\to+0}x_i(t)=0,\quad i\in\{1,2\}.$$

Приводятся достаточные условия, при выполнении которых у задачи (1) – (3) существует непустое множество решений $x:(0,\rho)\to\mathbb{R}^2$ ($\rho\le\tau$ — достаточно мало) и исследовано асимптотическое поведение каждого из этих решений при $t\to+0$.

О решениях некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной неизвестной функции

А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина

Южноукрианский национальный педагогический университет имени К. Д. Ушинского, Одесса, Украина

Военная академия, Одесса, Украина

yuliak@te.net.ua

Рассматриваются задачи Коши вида

$$F(t,x(t),x'(t))=0,\ x(0)=0, \tag{1}$$

где $F:D\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, $D\subset(0,\tau)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}, x:(0,\tau)\to\mathbb{R}$ — неизвестная функция. Решением задачи (1) называется непрерывно дифференцируемая функция $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}\,(\rho\le\tau)$, которая тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при всех $t\in(0,\rho)$ и, кроме того $x(t)\to0$ при $t\to+0$.

Формулируются достаточные условия, при которых задача (1) имеет непустое множество решений с определенными асимптотическими свойствами при $t\to+0$. Обсуждается вопрос о количестве таких решений. При анализе задач вида (1) используются методы качественной теории дифференциальных уравнений.

Існування оптимального керування для деяких класів систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією

Г. С. Зима

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

anna.zyma@mail.ru

Розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу $\{t_i\}$:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=A(t,x)+B(t,x)u,t\ne t_i\\ \triangle\, x|_{t=t_i}&=g_i(x)w_i\end{aligned} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$C(u,w) = \int_0^T [A^0(t,x) + B^0(t,u)]dt + A^1(x(t_1),...,x(t_N),t_1,...,t_N) + \\ + B^1(w_1,...,w_N,t_1,...,t_N) \to inf, \tag{2}$$

де $T > 0$ фіксоване, $t \in [0,T]$, $t_i \in (0,T]$, $N = N(T) < \infty$ — кількість моментів імпульсної дії на $(0,T]$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, U — замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^m$, $w_i(i = \overline{1,N}) \subset V$, V — замкнена опукла множина в $\mathbb{R}^r$. Функції $A(t,x), B(t,x)$ вважаються неперервними за сукупністю змінних $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $g_i(x)$ — неперервні за $x \in \mathbb{R}^n$ та задовольняють за змінною x умову лінійного росту.

A^0, B^0, A^1, B^1 — неперервні за сукупністю змінних, причому $A^0 \geq 0, A^1 \geq 0$, а B^0 та B^1 задовольняють умови:

1) $B^0(t,u)$ — опукла по u та $B^0(t,u) \geq a|u|^p$ для деяких $a > 0$ і $p > 1$;

2) $B^1(w_1,...,w_N,t_1,...,t_N) \geq a(\mid w_1 \mid^p + ... + \mid w_N \mid^p)$.

Допустимими для задачі (1), (2) вважаються керування $u = u(t)$ та вектори $w_1,...,w_N$, що

а) $u(t) \in L_p(0,T], u(t) \in U, t \in [0,T]$;

б) $w_i \in V\ i = 1,...,N$.

Теорема. *При зроблених припущеннях задача оптимального керування* (1), (2) *має розв'язок в класі допустимих керувань.*

Про еліптичні системи в розширеній соболєвській шкалі

Т. М. Зінченко

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

djanta@ukr.net

Доповідь присвячена застосуванням функціональних просторів узагальненої гладкості до еліптичних систем диференціальних рівнянь. Ці простори утворюють розширену соболєвську шкалу $\{H^\varphi : \varphi \in \mathrm{RO}\}$, в якій показником гладкості служить функціональний параметр $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, що є RO–змінною функцією на $+\infty$ в сенсі В. Авакумовича. Розширена соболєвська шкала на $\mathbb{R}^n$ складається з гільбертових просторів Л. Хермандера

$$H^\varphi(\mathbb{R}^n) := \left\{ w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) :\ \|w\|_\varphi^2 := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, |(Fw)(\xi)|^2\, d\xi < \infty \right\}$$

і означається на гладких компактних многовидах стандартним чином.
Тут $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$, а Fw є перетворення Фур'є розподілу w. Якщо $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^\varphi =: H^{(s)}$ є простір Соболєва порядку s. Позначимо $\rho(t) := t$ при $t \geq 1$.

Нехай Γ — нескінченно гладкий замкнений (тобто компактний і без краю) многовид розмірності $n \geq 1$. На Γ розглядається еліптична за Дуглісом-Ніренбергом система

$$\sum_{k=1}^{p} A_{j,k} u_k = f_j, \quad j = 1,\dots,p, \quad \Leftrightarrow \quad Au = f. \tag{1}$$

Тут $A_{j,k}$ — скалярні лінійні диференціальні оператори на Γ. Їх коефіцієнти належать класу $C^\infty(\Gamma)$, а порядки задовольняють умову $\operatorname{ord} A_{j,k} \leq l_j + m_k$, де $l_1,\dots,l_p$ і $m_1,\dots,m_p$ є числа Дугліса–Ніренберга. Відображення $u \mapsto Au$ задає лінійний обмежений оператор

$$A : \bigoplus_{k=1}^{p} H^{\varphi\rho^{m_k}}(\Gamma) \to \bigoplus_{j=1}^{p} H^{\varphi\rho^{-l_j}}(\Gamma) \quad \text{для кожного} \quad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{2}$$

Для оператора (2) встановлені наступні результати [1]:

- теорема про те, що він є нетеровим з індексом, незалежним від φ;
- апріорна оцінка розв'язку системи (1);
- теорема про локальну регулярність розв'язку;
- нова достатня умова неперервності похідних компонент розв'язку.

В розширеній соболєвській шкалі досліджені також рівномірно еліптичні системи в $\mathbb{R}^n$ та еліптичні системи з параметром. Ці результати отримані спільно з О. О. Мурачем [2–4].

1. Зинченко Т. Н. Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале. Доп. НАН України, 2013, № 3, 14–20.
2. Зинченко Т. Н., Мурач А. А. Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера. Укр. мат. журн., 2012, Т. 64, № 11, 1477–1491 (arXiv:1202.6156).
3. Зинченко Т. Н., Мурач А. А. Эллиптические системы с параметром в расширенной соболевской шкале. Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 2012, Т. 9, № 2, 180–202.
4. Murach A. A., Zinchenko T. Parameter–elliptic operators on the extended Sobolev scale. Methods Funct. Anal. Topology, 2013, V. 19, no. 1, 29–39 (arXiv:1212.0759).

О глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия

А. О. Игнатьев

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина

aoignat@mail.ru

Классический метод функций Ляпунова для исследования асимптотической устойчивости предполагает существования определенно-положительной функции Ляпунова, производная которой в силу системы дифференциальных уравнений возмущенного движения определенно-отрицательна. Однако в приложениях часто встречаются системы, для которых возможно построить определенно-положительную функцию, производная которой является не определенно-отрицательной, а лишь неположительной. Именно для таких систем Е.А.Барбашиным и Н. Н. Красовским [1] получен эффективный критерий асимптотической устойчивости для случая автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем, используя эту идею, аналогичные теоремы были доказаны для периодических и почти периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2, 3], для систем функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием [4], для стохастических дифференциальных уравнений [5], для дифференциальных включений [6], для диффененциальных уравнений в банаховом пространстве [7] и для исследования устойчивости относительно части переменных [8]. Во всех перечисленных работах существенным было то, что производная вспомогательной определенно-положительной функции была неположительной. В настоящем докладе не предполагается неположительность производной вспомогательной функции (она может быть знакопеременной).

1. Н. Н. Барбашин, Е. А. Красовский. Об устойчивости движения в целом. Доклады АН СССР, 86 (6), 146–152, 1952.
2. Н. Н. Красовский. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, Москва, 1959.

3. А. О. Игнатьев. Некоторые обобщения теоремы Барбашина - Красовского. Математическая физика, 34, 19–22,1983.
4. A. O. Ignatyev. On the asymptotic stability in functional differential equations. Proceedings of the American Mathematical Society, 127 (6), 1753–1760, 1999.
5. O. A. Ignatyev and V. Madrekar. Barbashin - Krasovskii theorem for stochastic differential equations. Proceedings of the American Mathematical Society, 138 (11), 4123–4128, 2010.
6. Е. Л. Панасенко, Е. А. Тонков. Распространение теорем Е.А.Барбашина и Н.Н.Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы. Труды института математики и механики УрО РАН, 15 (3), 185–201, 2009.
7. G. Q. Xu and S. P. Yung. Lyapunov stability of abstract nonlinear dynamic system in Banach space. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 20, 105–127, 2003.
8. O. A. Ignatyev. On equiasymptotic stability with respect to part of the variables. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 63, 821–824, 1999.

О взаимодействиях колебательных систем с учетом дробных связей

М. Илолов[1], Х. С. Кучакшоев[2]
[1]Институт Математики им. А. Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан
[2]Российско–Таджикский (Славянский) Университет, Душанбе, Таджикистан
ilolov.mamadsho@gmail.com, bassidkhol@mail.ru

Методы дробной или фрактальной динамики и различные их приложения к конкретным задачам теории нелинейных колебаний, радиофизике и радиолокации изучены и опубликованы в целом ряде монографий и журнальных статей различных авторов(см. напр. [1], [2]).

Данная работа посвящена анализу влияния дробной связи на процессы взаимодействия автогенератора типа Ван-дер-Поля с нелинейным резонатором. Такие системы с учетом запаздывания сил связи, но с производными целого порядка, подробно изучены в монографии [3]. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и уравнения с дробными порядками производных и нужные нам свойства таких уравнений изложены в [4]. Отметим, что в работе [5] введено понятие фрактального осциллятора.

Система уравнений, посредством которой описывается взаимодействие фрактального автогенератора с фрактальным резонатором, имеет вид

$$\begin{gathered} D^2u(t) + u(t) = \varepsilon(1 - u^2(t))Du(t) + \varepsilon D^\alpha v(t), \\ D^2v(t) + (1+\varepsilon\gamma)v(t) = -2\varepsilon\lambda Dv(t) - \varepsilon b v^3(t) + \varepsilon D^\alpha u(t), \end{gathered} \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, $\varepsilon\gamma = \dfrac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1}, \omega_1,\ \omega_2$ — собственные частоты генератора и резонатора, соответственно, $\lambda = 1 + \dfrac{\varepsilon\gamma}{\omega_1}, b > 0$.

Здесь D означает операцию дифференцирования по t, $D^\alpha, 0 < \alpha < 1$ — дробная производная, определенная по формуле

$$D^\alpha\omega(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha}[\omega(t)],$$

где левосторонний интеграл Лиувилля порядка $1-\alpha$ равен

$$I^{1-\alpha}[\omega(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{t} \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau,$$

$\Gamma(x)$ — гамма функция аргумента x.

Решение системы (1) найдено с помощью дробного обобщения асимптотического метода Боголюбова–Митропольского.

1. Зайцев В. В., Карлов А. В. Нелинейный резонанс с фрактальной емкостью. Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия, 2012, № 6 (97), с. 136–142.
2. Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. – М. "Университетская книга", 2005.
3. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – Москва: Наука, 1969.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. Н. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
5. Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики. Письма в ЖТФ, 2004, т. 30, с. 33–37.

Об одной локальной задаче управления хаотическими системами

М. Илолов, А. А. Эльназаров

Институт Математики им. А. Джураева АН РТ, Душанбе, Таджикистан

ilolov.mamadsho@gmail.com

Хаотические системы можно рассматривать как подобласть более общих нелинейных колебательных систем. В работах А. М. Самойленко и его учеников (см. напр. [1]) в развитии идей Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского разработан новый метод функции Грина задачи об инвариантных торах для различных классов систем дифференциальных уравнений с помощью которого стало возможным найти условия сохранения диофантных торов для достаточно малых значений параметра ε. В то же время во многих нелинейных физических и нелинейно-механических системах возникают ситуации, когда необходимо найти оценку малости ε. Например, в работе [2] при помощи метода ренормализации групп для системы уравнений с функцией Гамильтона

$$H(p,x,t) = \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon(cosx + cos(x-t)) \tag{1}$$

было выяснено, что при $\varepsilon \geq 0,02759$ более не существуют инвариантные КАМ торы. Физический смысл этого разрушения состоит в том, что устойчивость системы нарушается и происходит диффузия в фазовом пространстве. Данное явление выражает хаотическое поведение системы. Чтобы управлять этой системой к гамильтониану (1) нужно добавлять так называемый "управляющий" член u, причем у модифицированного гамильтониана существует инвариантный тор.

Авторы настоящего доклада рассматривают задачу локального управления для возмущенной системы уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) + \varepsilon X_1(x), \tag{2}$$

где $X_1(x)$ удовлетворяет условиям, при которых инвариантное тороидальное многообразие невозмущенной системы

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x)$$

сохраняется при достаточно малых ε. При этом предполагается, что существует некоторое критическое значение $\varepsilon = \varepsilon_c \ll 1$, при котором инвариантный тор системы (2) разрушается. Задача состоит в нахождении необходимых условий на "управляющий" вектор $u(x,\varepsilon)$, так чтобы система

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) + \varepsilon X_1(x) + u(x,\varepsilon)$$

имела инвариантное тороидальное многообразие $x = f(x,\varepsilon)$ где $\varepsilon \in (\varepsilon_c, \varepsilon_c+\delta)$, и δ является достаточно малым положительным числом [3].

1. Самойленко А. М., Илолов М. Инвариантные торы дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Укр. матем. журн., 1998, т. 44, с. 93–100.
2. Shinbrot T., Gregory C., Ott E. and Yorke J. A. Using small perturbations to control chaos, Nature, 1993, v. 363, p. 411.
3. Илолов М., Эльназаров А. А. Проблемы управления в системах с хаотическим поведением траекторий. Докл. АН РТ. 2006, т. 49, с. 895–900.

Нелокальна крайова задача для диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами у багатовимірній комплексній області

В. С. Ільків, Н. І. Страп

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

ilkivv@i.ua, n.strap@mail.ru

В циліндричній області $D^p = [0,T] \times \mathcal{S}^p$, де $\mathcal{S}$ однозв'язна область проколотої комплексної площини, тобто $\mathcal{S} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $T > 0$, $p \geq 2$, розглянуто задачу з нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{s_0+|s|\leq n} a_{s_0,s} B^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = f, \tag{1}$$

$$\mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\bigg|_{t=T} = \varphi_m, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

де $s = (s_1,\ldots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $a_{s_0,s} \in \mathbb{C}$, $a_{n,0} = 1$, $\mu \in \mathbb{C}$, $u = u(t,z)$ — шукана функція, а $\varphi_0 = \varphi_0(z)$, $\varphi_1 = \varphi_1(z)$, $\ldots$, $\varphi_{m-1} = \varphi_{m-1}(z)$, $f = f(t,z)$ — задані функції, $z = (z_1,\ldots,z_p)$. Оператор $B = (B_1, B_2, \ldots, B_p)$ складений з операторів узагальненого диференціювання $B_j \equiv z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, степені яких визначено формулами $B_j^0 u \equiv u$, $B_j^l u = B_j(B_j^{l-1} u)$ $(j = 1,\ldots,p,\ l = 1,\ldots,n)$.

Розглядувана задача є некоректною за Адамаром у шкалі просторів $\{H_q(\mathcal{S}^p)\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $H_q(\mathcal{S}^p)$ — гільбертів простір функцій $\psi = \psi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \psi_k z^k$ зі скалярним добутком $(\psi,\varphi)_{H_q(\mathcal{S}^p)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{2q} \psi_k \overline{\varphi}_k$, де $z^k = z_1^{k_1}\ldots z_p^{k_p}$, $\widetilde{k} = \sqrt{1 + k_1^2 + \ldots + k_p^2}$, а її роз'язність залежить від малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку. Для розв'язання проблеми малих знаменників використовуємо метричний підхід [1,3] і вважаємо, що коефіцієнти рівняння $a_{s_0,s}$ та параметр μ належать деяким комплексним кругам.

У роботі встановлено достатні умови існування та необхідні і достатні умови єдиності розв'язку задачі у просторі $H_q^n(\mathcal{D}^p)$, де $H_q^n(\mathcal{D}^p)$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ — банахів простір функцій

$u = u(t,z)$ таких, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(r)}(t) z^k$ для кожного $t \in [0,T]$ належать до просторів $H_{q-r}(\mathcal{S}^p)$, $r = 0,1,\ldots,n$, відповідно і неперервні за t у цих просторах. Норму у просторі $H_q^n(\mathcal{D}^p)$ визначає формула: $\|u\|^2_{H_q^n(\mathcal{D}^p)} = \sum\limits_{r=0}^{n} \max\limits_{[0,T]} \left\| \dfrac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{H_{q-r}(\mathcal{S}^p)}$.

1. Ільків В. С. Розв'язність нелокальної задачі для систем рівнянь з частинними похідними зі зсувами аргументів // Науковий вісник Ужгородського універсистету. – 2010. – Вип. 4. – С. 72–85.
2. Ільків В. С., Страп Н. І., Волянська І. І. Нелокальна крайова задача для рівняння з оператором диференціювання $z\partial/\partial z$ у комплексній області // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2012. – 10. – С. 15–26.
3. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

О собственных значениях одной задачи для уравнения четного порядка

Б. Ю. Иргашев

Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан

bahrom irgashev@inbox.ru

В области $\Omega = \{(x,y):\ 0<x<a,\ 0<y<b\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv L_0[u] + q(x,y)\,u = \lambda u, \tag{1}$$

где $L_0[u] = (-1)^n D_x^{2n} u - D_y^2 u$, функция $q(x,y) \ge 0$ — кусочно-гладкая и ограниченна. Для уравнения (1) исследуем следующую спектральную задачу.

Задача S . Найти те значения λ при которых уравнение (1) имеет нетривиальное решение из класса $C_{x,y}^{2n,2}(\Omega) \cap C_{x,y}^{(2n-1),(1)}\left(\overline{\Omega}\right)$ с граничными условиями

$$\frac{\partial^{2i} u}{\partial x^{2i}}(0,y) = \frac{\partial^{2i} u}{\partial x^{2i}}(1,y) = 0,\ i = \overline{0,(n-1)}, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,1) = 0. \tag{3}$$

Отметим, что в случаи $n = 1$ уравнение (1) имеет многочисленные приложения в квантовой механике, поэтому различные задачи для этого уравнения рассмотрены во многих работах. Мы в наших исследованиях использовали методы из работ [1], [2]. Полученые результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Справедливы следующие утверждения и соотношения :*

1. *Собственные функции задачи соответствующие различным собственным значениям взаимно ортогональны*;

2. *Собственные значения вещественны и положительны*;

3. $N(\lambda) = \frac{ab}{2n\pi^2} \lambda^{\frac{n+1}{2n}} B\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}+1\right)\left(1 - O\left(\lambda^{-\frac{1}{2n}}\right)\right)$, *где* $N(\lambda)$ *число собственных значений не превосходящих* λ; $B(x,y)$ — *бета-функция* ;

4. $\lambda_k \sim \left(\frac{2n\pi^2 k}{B\left(\frac{1}{2n},\,2\right)ab}\right)^{\frac{2n}{n+1}}, k \to +\infty;$

5. *Система собственных функций* $\{u_k(x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* S *полна в* L_2;

6. *При увеличении функции* $q(x,y)$ *собственные значения не убывают.*

1. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. В 2-х т., том 1. – Москва: Иностранная литература, 1961 г.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. В 2-х т., том 1. – Москва: Иностранная литература, 1951 г.

Дискретные динамические системы с соленоидальными базисными множествами

Н. В. Исаенкова, Е. В. Жужома
Нижегородский государственный педагогический университет им. Козьмы Минина, Нижний Новгород, Россия
nisaenkova@mail.ru, zhuzhoma@mail.ru

Определение. Диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, удовлетворяющий аксиоме A Смейла, замкнутого n-многообразия M^n принадлежит *классу* SV, если существует вложенное в M^n *базовое многообразие* $\mathcal{B}^n \overset{\text{def}}{=} S^1 \times D^{n-1}$ такое, что ограничение $f|_{\mathcal{B}^n} \overset{\text{def}}{=} F$ является диффеоморфизмом $F : \mathcal{B}^n \to F(\mathcal{B}^n) \subset \mathcal{B}^n$ на свой образ, удовлетворяющим условиям:
1) $F(t,z) = (g(t), w(t,z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}$, где $g : S^1 \to S^1$ — неособый $(Dg \neq 0)$ C^1 эндоморфизм степени $d \geq 2$;
2) при фиксированном $t \in S^1$ преобразование $w|_{\{t\}\times D^{n-1}} : \{t\} \times D^{n-1} \to \mathcal{B}^n$ является равномерно сжимающим C^1 вложением $\{t\} \times D^{n-1} \to int\,(\{g(t)\} \times D^{n-1})$, т.е. существуют константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие, что $diam\ (F^k(\{t\} \times D^{n-1})) \leq C\lambda^k diam\ (\{t\} \times D^{n-1})$, $\forall k \in N$.

Для $F \in SV$ пересечение $\cap_{k\geq 0} F^k(\mathcal{B}^n) \overset{\text{def}}{=} Sol$ является соленоидом. Следующая теорема описывает возможные базисные множества в $Sol \subset \mathcal{B}^n$.

Теорема. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм из класса SV. Тогда неблуждающее множество $NW(f) \cap \mathcal{B}^n$ содержит ровно одно нетривиальное базисное множество Λ, которое есть либо — одномерный растягивающийся аттрактор, и тогда $\Lambda = Sol$, либо — нульмерное базисное множество, и тогда $NW(f) \cap \mathcal{B}^n$ состоит из Λ, конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек. Обе возможности реализуются.*

Авторы благодарят РФФИ, грант 12-01-00672-а, за финансовую поддержку.

Об одном методе решения краевой задачи для линейного гиперболического уравнения с интегральными краевыми условиями

С. С. Кабдрахова
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
S_Kabdrachova@mail.ru

На $\bar{\Omega} = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается полупериодическая краевая задача для линейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,t)u + f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$\int_0^T \Big[P_2(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial x} + P_1(x,\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau} + P_0(x,\tau)u(x,\tau)\Big]d\tau = \phi(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где функции $A(x,t)$, $B(x,t)$, $C(x,t)$, $f(x,t)$, $P_i(x,t)$, $i=0,1,2$ непрерывны на $\bar{\Omega}$, функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и функция $\phi(x)$ непрерывна на $[0,\omega]$.

Пусть $C(\overline{\Omega})$ — пространство непрерывных на функций $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$. Для функции при фиксированном введем норму $\|u\|_C=\max\limits_{\overline{\Omega}}|u(x,t)|$.

Решением задачи (1)–(3) называется функция $u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$ которая имеет частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}\in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\in C(\overline{\Omega})$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2),(3).

В работах [1–2] были получены достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи для систем гиперболических уравнений с интегральными краевыми условиями. В интегральном условии (3) присутствовали так же значения искомой функции на характеристиках $t=0$, $t=T$. На основе метода параметризации и корректной разрешимости краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений и корректной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений установлены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости нелокальной краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений.

В настоящем сообщений на основе метода модификации ломаных Эйлера [3] построен алгоритм нахождения приближенного решения, получены признаки однозначной решимости краевой задачи (1)–(3) и установлены оценки обеспечивающие сходимость модификации метода ломаных Эйлера к решению исходной задачи.

1. Асанова А. Т. О краевой задаче для систем гиперболических уравнений с нелокальным интегральным условием //Матем. журнал, Алматы – 2006. – Т. 6, №4(22). – С. 17–25.
2. Asanova A. T., Dzhumabaev D. S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations//Journal Mathematical Analysis and Applications, – 2013, №402. – С. 167–178.
3. Кабдрахова С. С. Об оценках сходимости модификации метода ломаных Эйлера решения линейной полупериодической краевой задачи для гиперболического уравнения // Математический журнал, Алматы. – 2008. Т. 8, № 2 (28). – С. 55–62.

О классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством автоморфизмов трехцветных графов

С. Х. Капкаева

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, Саранск, Россия

kapkaevasvetlana@yandex.ru

В 1973 году М. Пейкшото [4] ввел понятие различающего графа, сопоставляемого потоку Морса — Смейла на ориентируемой поверхности, и сформулировал теорему о том, что этот граф является полным топологическим инвариантом.

В 1985 – 1987 годах В. З. Гринесом и А. Н. Безденежных была получена топологическая классификация градиентно-подобных каскадов на ориентируемых поверхностях (см. книгу [1], где имеется подробное изложение и ссылки).

В работе [3] А. А. Ошемков и В. В. Шарко заметили, что различающий граф Пейкшото является полным топологическим инвариантом лишь для потоков Морса – Смейла без замкнутых траекторий. Каждому такому потоку они поставили в соответствие трехцветный граф. Проверка изоморфности двух таких графов оказалась значительно проще, чем проверка изоморфности различающих графов.

В настоящем докладе рассматривается класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса – Смейла $f : M^2 \to M^2$, удовлетворяющих следующим условиям: 1. $W^s_p \cap W^u_q = \emptyset$ для любых различных седловых периодических точек p, q; 2. ограничение диффеоморфизма f на неустойчивое многообразие $W^u(p)$ сохраняет его ориентацию для любой седловой периодической точки p.

Аналогично работе [3], каждому диффеоморфизму f из класса G ставится в соответствие трехцветный граф $T(f)$ и автоморфизм S_f, индуцированный диффеоморфизмом f на этом графе.

Теорема. *Для того чтобы диффеоморфизмы f и f' были топологически сопряжены необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм η графов $T(f)$ и $T(f')$, сопрягающий автоморфизмы графов, то есть $S'_{f'} = \eta S_f \eta^{-1}$.*

Заметим, что если неблуждающие множества диффеоморфизмов f и f' состоят только из неподвижных точек, то, в силу [2], проблема сопряженности этих диффеоморфизмов сводится к проверке изоморфности их графов.

Автор выражает благодарность В. З. Гринесу за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

1. Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. – НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований. – Ижевск, 2011. – 424 с.
2. Капкаева С. Х. О топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством трехцветного графа. Журнал СВМО. 2012. Т. 14, № 4, 34–43.
3. Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях. Математический сборник, Т. 8, 1998, 93–140.
4. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds. Dynamical systems. Academic Press. New York, 1973, 389–419.

Глобальні атрактори системи реакції-дифузії з негладкою функцією взаємодії

О. В. Капустян[1], П. О. Касьянов[2], Х. Валеро[3]
[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
[2]Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна
[3]Університет Мігуеля Ернандеса, Ельче, Іспанія
alexkap@univ.kiev.ua, kasyanov@i.ua, jvalero@umh.es

В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$ розглядається задача

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + h(x), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $u = u(t,x) = (u^1(t,x), ..., u^N(t,x))$ є шукана вектор-функція, $f = (f^1, ..., f^N)$, $h = (h^1, ..., h^N)$ задані, матриця a має додатню симетричну частину $\frac{1}{2}(a + a^*) \geq \beta I$, $\beta > 0$,

$$h \in (L^2(\Omega))^N, \quad f \in C(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N),$$

існують константи $C_1, C_2 > 0,\ \gamma_i > 0,\ p_i \geq 2,\ i = \overline{1, N}$ такі, що $\forall\ v \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^N |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i - 1}} \leq C_1(1 + \sum_{i=1}^N |v^i|^{p_i}), \quad \sum_{i=1}^N f^i(v)v^i \geq \sum_{i=1}^N \gamma_i |v^i|^{p_i} - C_2. \tag{2}$$

Параболічна система (1) називається системою реакції-дифузії і охоплює багато відомих систем (система Гінзбурга–Ландау, дифузійна система Лотки–Вольтерра та інші). Якщо вектор-функція f є неперервно диференційовною і f' задовольняє додаткові умови, то добре відомо [1], що задача (1) породжує напівгрупу, яка має компактний глобальний атрактор в фазовому просторі $H = (L^2(\Omega))^N$, структура якого визначається повними траєкторіями, що входять або виходять з множини стаціонарних розв'язків (1). При загальних умовах (2), коли не гарантується єдиність розв'язку задачі Коші, динаміка розв'язків (1) може бути описана в термінах властивостей глобального атрактору многозначної напівгрупи (м-напівпотоку), існування якого доведено в [2]. Метою роботи є описати структуру глобального атрактору в цьому випадку. Нехай $\mathbb{F}$ — множина всіх повних траєкторій, $\mathbb{K}$ — множина всіх обмежених повних траєкторій, $\mathfrak{R}$ — множина стаціонарних розв'язків (1). Означимо множини

$$M^-(\mathfrak{R}) = \{z : \exists \gamma(\cdot) \in \mathbb{K},\ \gamma(0) = z,\quad \mathrm{dist}_H(\gamma(t), \mathfrak{R}) \to 0,\ t \to +\infty\},$$

$$M^+(\mathfrak{R}) = \{z : \exists \gamma(\cdot) \in \mathbb{F},\ \gamma(0) = z,\quad \mathrm{dist}_H(\gamma(t), \mathfrak{R}) \to 0,\ t \to -\infty\}.$$

В роботі доведено, що глобальний атрактор м-напівпотоку, породженого слабкими розв'язками (1), співпадає з замиканням множини $M^-(\mathfrak{R})$ в H. Також доведено, що в класі регулярних розв'язків (1) глобальний атрактор відповідного м-напівпотоку співпадає з $M^{\pm}(\mathfrak{R})$. За додаткових знакових умов на f та для $h \in (L^\infty(\Omega))^N$ встановлено обмеженість глобального атрактору в просторі $(L^\infty(\Omega))^N$.

1. M. I. Vishik, V. V. Chepyzhov. Attractors for equations of mathematical physics. – Providence: AMS, 2002.
2. M. Z. Zgurovsky, P. O. Kasyanov, O. V. Kapustyan, J. Valero, N. V. Zadoyanchuk. Evolution inclusions and variation inequalities for earth data processing III. Long-time behavior of evolution inclusions solutions in Earth data analysis. – Berlin: Springer, 2012.

Про зв'язок між існуванням періодичних розв'язків різницевих та відповідних їм диференціальних рівнянь

О. В. Карпенко[1], **В. І. Кравець**[2]

[1]Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна

[2]Таврійський державний агротехнологічний університет, Мелітополь, Україна

OlyaKare@gmail.com

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{1}$$

де $X(t, x)$ періодична функція по t з перідом ω, тобто

$$X(t + \omega, x) = X(t, x)$$

при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$ — область з простору $\mathbb{R}^d$, та відповідна до (1) система різницевих рівнянь

$$x^h_{k+1} = x^h_k + hX(kh, x^h_k), \tag{2}$$

де $x^h_k = x^h(kh)$, $h > 0$ — крок різницевого рівняння. Даний крок виберемо $h = \frac{\omega}{m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Вважаємо також, що $X(t,x)$ в своїй області визначення неперервно-диференційовна за сукупністю змінних і обмежена разом зі своїми частинними похідними так, що існує стала $C>0$:

$$| X(t,x) | + \left|\frac{\partial X(t,x)}{\partial t}\right| + \left\|\frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\right\| \leq C,$$

де $t\in\mathbb{R}$, $x\in D$. Тут $\frac{\partial X}{\partial x}$ — відповідна матриця Якобі.

Нехай при деякому $h=h_0=\frac{\omega}{m_0}$, $m_0\in\mathbb{N}$ система (2) має періодичний розв'язок. Знайдено умови, що при цьому гарантують існування періодичного розв'язку у системи (1).

О почти периодических по части переменных решении одной системы в частных производных в широком смысле

К. К. Кенжебаев, А. Б. Бержанов, К. А. Абдикаликов

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

amantay48@mail.ru

Рассматривается система квазилинейных уравнений в частных производных

$$\begin{gathered} D^x_\varepsilon \equiv \left(\tfrac{\partial}{\partial t} + a(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon)\tfrac{\partial}{\partial\varphi} + b(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon)\tfrac{\partial}{\partial\psi}\right)x = \\ = P(t,\varphi,\psi)x + \mu\{Q(t,\varphi,\psi,x,\mu) + \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu|t-t_1|}R(t_1,t,\varphi,\psi,x,\mu)dt_1\}, \end{gathered} \tag{1}$$

где a,b —соответственно m и k —векторы; x,Q,R — n-векторы; P — $n\times n$-матрица; ε,μ —положительные параметры; $\nu>0$ — const.

Вектор-функцию $f(t,\varphi,\psi)$ назовем почти периодической по части переменных функцией, если она почти периодична по t,φ равномерно относительно $\psi\in E^k$.

Известно, что классическое решение $x(t,\varphi,\psi)$ является непрерывно дифференцируемым. Если решение $x(t,\varphi,\psi)$ системы (1) обладает меньшей гладкостью то оно называется обобщенным решением системы (1).

В данной работе по методике [1] строится почти периодическое по части переменных решение системы (1) в широком смысле по Фридрихсу [2]. Если входные данные системы (1) обладают нужной гладкостью, то построенное решение в широком смысле является и классическим решением системы (1).

1. Кенжебаев К. К., Бержанов А. Б., Бекбауова А. У. Многопериодическое по части переменных решение одной системы гиперболического типа // Известия НАН РК, Серия физ.-мат. – 2004, 3, – С. 39–43.
2. Рожденственский Б. А., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 607 с.

Усреднение систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием

О. Д. Кичмаренко, М. Л. Карпычева

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина

olga.kichmarenko@gmail.com, m.karpblcheva@gmail.com

Рассмотрим систему дискретных уравнений с переменным запаздыванием

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot f\left(i, x_i, x_s\right), \quad x_0 = x^0,$$

где $x_i \in D \subset R^n$ — текущее состояние системы, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $f\left(i, x_i, x_s\right)$ — заданная вектор-функция, $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$, $L = const$, $E\left(a\right)$ — целая часть числа a, $s \in I_s = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., i\}$ определяет момент влияния переменного запаздывания на текущее состояние системы.

Пусть равномерно относительно q и $\xi^1,\ \xi^2 \in D$ существует предел

$$f_0\left(\xi^1, \xi^2\right) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} f\left(\ j,\ \xi^1,\ \xi^2\right),$$

где целочисленное значение $h\left(\varepsilon\right)$ обладает свойствами

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h\ \left(\varepsilon\right) = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon \cdot h\ \left(\varepsilon\right) = 0.$$

Заданной системе уравнений поставим в соответствие усредненную систему

$$y_{i+1} = y_i + \varepsilon \cdot f_0\left(i, y_i, y_s\right), \quad y_0 = x^0,$$

решение которой ищется на том же промежутке времени, что и решение исходной системы, учитывая тот же момент запаздывания.

Однако метод усреднения позволяет получить решение, проводя вычисления с достаточно большим шагом $h\left(\varepsilon\right)$, уменьшая количество проводимых вычислений. При этом момент запаздывания s определяется принадлежностью некоторому промежутку с номером m в новом времени. Усредненную систему в этом случае запишем в виде

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \varepsilon h \cdot f_0\left(\xi_k, \xi_m\right), \quad \xi_0 = x^0, \quad s \in \left[mh,\ (m+1)\,h\right),$$

$$\gamma_i = \xi_k + \frac{(i-kh)\left(\xi_{k+1} - \xi_k\right)}{h}, \quad i \in \left[kh,\ (k+1)\,h\right),$$

где $k \in I_k = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N_k\}$, $N_k = E\left(\frac{L}{h\varepsilon}\right)$, $m \in I_m = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., k\}$.

Формулируются условия, гарантирующие близость решений заданной и усредненной систем. Рассматриваются соответствующие примеры, в которых оценивается близость решений заданной и усредненной систем на асимптотически большом промежутке времени.

1. Плотников В. А., Плотникова Л. И., Яровой А. Т. Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления. Нелинейные колебания, 2004, том 7, № 2, 241–254.
2. Кичмаренко О. Д., Карпычева М. Л. Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием. Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. 2012, вип. 23, № 2, 76–85.
3. Кичмаренко О. Д., Карпычева М. Л. Усреднение периодических управляемых систем с постоянным запаздыванием на дискретном времени. Вестник Одесского национального университета. Математика и механика. 2012, том 17, вып. 1–2, 54–69.

Однокрокове степеневе інтегрування сингулярно-збурених задач Коші для систем диференціальних рівнянь

А. А. Кіндибалюк, М. М. Притула
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
a.kindybaluk@mail.ru, mykola.prytula@gmail.com

При розв'язувані початково-крайових задач для параболічних рівнянь приходять до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку [1].

Як правило, такі системи належать до класу жорстких систем [2]. Питання стійкості схем для сингулярно збурених задач виходить на перший план та відіграє головну роль в аналізі ефективності та точності інтегрування за часовою змінною.

Для забезпечення безумовної стійкості можна застосовувати неявні схеми інтегрування, проте у випадку однокрокових схем порядок збіжності є тільки першим. Схема інтегрування Кранка–Ніколсона має другий порядок збіжності, проте для забезпечення монотонності схеми, необхідно дотримуватись обмеження на крок дискретизації у часі.

Схеми експоненціального інтегрування [1] не передбачають обмеження на крок дискретизації, проте у випадку системи рівнянь необхідно обчислювати матричну експоненту, що є головним недоліком схеми експоненціального інтегрування.

Нами запропоновано альтернативний підхід до інтегрування жорстких систем диференціальних рівнянь, які використовують властивості степеневих базисних функцій.

Запропоновану методику застосуємо до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння вигляду

$$\begin{cases} \textit{задано функцію } f = f(t) \textit{ та коефіцієнт } \sigma = const \\ \textit{знайти функцію } u = u(t) \textit{ таку, що} \\ u'(t) + \sigma u(t) = f(t) \ \forall t \in (0, T]. \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

Домноживши праву та ліву частину рівняння задачі (1) на деяку тестову функцію, отримаємо однокрокову рекурентну схему

$$\left(\alpha + \frac{\sigma \Delta t}{2}\right) u_{m+1} = \left(\alpha - \frac{\sigma \Delta t}{2}\right) u_m + \Delta t f_{m+1/2}. \tag{2}$$

Схема (2) апроксимує диференціальне рівняння

$$\alpha u'(t) + \sigma u(t) = f(t), \quad \forall t \in (0, T].$$

При значені параметра стабілізації $\alpha = \frac{\sigma\Delta t}{2} \coth\left(\frac{\sigma\Delta t}{2}\right)$ схема співпадає зі схемою експоненціального інтегрування.

При виборі параметра $\alpha > \frac{\sigma\Delta t}{2}$ схема є стійка та монотонна. Якщо параметр стабілізації вибрати, наприклад $\alpha = \frac{\sigma\Delta t}{2} \coth\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$, то при забезпеченні монотонності схеми немає необхідності обчислювати матричну експоненту у випадку системи диференціальних рівнянь.

1. Q. Nie, Y.-T. Zhang, R. Zhao. Efficient semi-implicit schemes for stiff systems. J. Comput. Physics, 2006, 214, 521–537.
2. Hans Görg Ross, Martin Stynes, Lutz Tobiska. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection – Diffusion – Reaction and flow problems. – Berlin Heidelberg: Springer – Verlag, 2008. – 598 p.

Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь

І. І. Клевчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

klevchuk@yandex.ru

Розглядається система:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= f(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \\ \varepsilon \tfrac{dy}{dt} &= G(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \end{aligned} \qquad (1)$$

де ε — малий додатний параметр, Δ — фіксоване додатне число, $x \in R^m$, $y \in R^n$. Припустимо, що для всіх $t \in R$, $x \in R^m$ рівняння $G(t, x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(t, x)$, причому функція $\varphi(t, x)$ та її похідні по t і x до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені, функцій $f(t, x, y, z)$, $h(t, x, y, z)$, $G(t, x, y, z)$, $P(t, x, y, z)$ та їх частинні похідні по t, x, y, z до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $|y - \varphi(t, x)| \le \rho$, $|z - \varphi(t, x)| \le \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(t, x, y, z)$ у точці $y = \varphi(t, x)$, $z = \varphi(t, x)$ відносно y, z, одержимо $G(t, x, \varphi(t, x) + y, \varphi(t, x) + z) = B_1(t, x)y + B_2(t, x)z + G_1(t, x, y, z)$, причому при досить малому ρ для $|y| \le \rho$, $|z| \le \rho$ виконується нерівність: $|G_1(t, x, y, z)| \le K(|y|^2 + |z|^2)$, $K > 0$.

Нехай всі корені характеристичного рівняння: $det(B_1(t, x) + B_2(t, x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$ лежать у півплощині $Re\lambda \le -2\alpha < 0$.

Тоді інтегральний многовид системи (1) можна зобразити у вигляді:

$$y_t = \varphi(t, x) + g(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

де

$$g(t, x, \varepsilon) = \varepsilon[B_1(t, x) + B_2(t, x)]^{-1}[(E + \Delta B_2(t, x))(\partial\varphi/\partial t + \partial\varphi/\partial x \times$$

$$\times f(t, x, \varphi(t, x), \varphi(t, x))) - P(t, x, \varphi(t, x), \varphi(t, x))] +$$

$$+\theta[\partial\varphi/\partial t + \partial\varphi/\partial x f(t, x, \varphi(t, x), \varphi(t, x))],$$

$$-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0.$$

Це зображення інтегрального многовиду застосовується до дослідження умов існування гомоклінічних точок відображення Пуанкаре для системи (1) з періодичними коефіцієнтами [1]. Метод усереднення застосовується до дослідження періодичних розв'язків консервативної системи з малим запізненням. Друге наближення в методі усереднення застосовано до дослідження стійкості системи слабко зв'язаних осциляторів із запізненням. Одержано достатню умову стійкості (нестійкості) лінійної системи диференціально-різницевих рівнянь [2]. Для дослідження стійкості нелінійних систем на многовиді застосовується метод нормальних форм.

1. Клевчук І. І. Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням. Укр. мат. журн., 2002, 54, С. 563–567.
2. Перестюк М. О., Клевчук І. І. Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь. Нелінійні коливання, 2013, 16, С. 94–104.

Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений

А. М. Клопот

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса, Украина

emden@farlep.net

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}), \tag{1}$$

где $n \geq 2$, $\alpha_k \in \{-1; 1\}$ $(k = \overline{1, m})$, $p_k : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m})$ — непрерывные функции, $\varphi_{kj} : \triangle_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m};\ j = \overline{0, n-1})$ — непрерывные и правильно меняющиеся при $y^{(j)} \longrightarrow Y_j$ функции порядков σ_{kj}, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\triangle_{Y_j}$ — односторонняя окрестность Y_j, Y_j равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Согласно определению правильно меняющейся функции (см. Сенета Е. [1], Гл. 1, п. 1.1, стр. 9–10) имеют место представления

$$\varphi_{kj}\left(y^{(j)}\right) = \left|y^{(j)}\right|^{\sigma_{kj}} L_{kj}\left(y^{(j)}\right) \qquad (k = \overline{1, m};\ j = \overline{0, n-1}),$$

где $L_{kj} : \Delta_{Y_j} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывные и медленно меняющиеся при $y^j \to Y_j$ функции, т. е. такие, для которых при любом $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_{kj}\left(\lambda y^{(j)}\right)}{L_{kj}\left(y^{(j)}\right)} = 1 \qquad (k = \overline{1, m};\ j = \overline{0, n-1}).$$

Решение y уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_{n-1}^0)$ — решением, где $-\infty \leq \lambda_{n-1}^0 \leq +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$y^{(k-1)}(t) \in \Delta_{Y_{k-1}} \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k-1)}(t) = Y_{k-1} \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda_{n-1}^0.$$

Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования у дифференциального уравнения (1) всех возможных типов $P_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_{n-1}^0)$ — решений, а также асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно.

В частном случае двучленного уравнения вида

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y)$$

аналогичные результаты ранее были получены в [2].

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. — Москва: Наука, 1985.
2. Евтухов В. М., Самойленко А. М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – т. 47, № 5. – С. 628–650.

Система диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу і точкою звороту

І. Г. Ключник

Кіровоградський державний педагогічний університет ім.Володимира Винниченка, Кіровоград, Україна

klyuchnyk.i@mail.ru

Використовуючи асимптотичний метод інтегрування, запропонований в [1] для системи диференціальних рівнянь, отриманої в [2], одержаний асимптотичний метод інтегрування для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу і точкою звороту.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу вигляду

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} = (A_0(x) + \varepsilon A_1(x))y(x,\varepsilon) + (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))y((1-\varepsilon^2\Delta)x,\varepsilon), \tag{1}$$

де $y \in R^2$; $A_0(x)$, $A_1(x)$, $B_0(x)$, $B_1(x)$ — (2×2)-голоморфні матриці за дійсною змінною x при $|x| \le x_0$; ε — малий дійсний параметр; Δ — додатна стала.

Припустимо виконання умов:

1) визначник матриці $\det C_0(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, і $C_0(x) = A_0(x) + B_0(x)$;

2) $\det C_0(0) = 0$ і $C_0(0)$ подібна жордановій формі $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\frac{d}{dx}(detC_0(x))|_{x=0} \neq 0$.

Теорема. *Нехай матриці $A_i(x)$, $B_i(x)$, $i = 0,1$ голоморфні при $|x| \le x_0$, $x \in R$, і можна вказати ε_0 таке, що виконуються нерівності*

$$\|A_i(x)\|_0 \le \alpha_i,\ \|B_i(x)\|_0 \le \beta_i,\ i = 0,1,\ \varepsilon_0(\beta_0 + \varepsilon_0\beta_1)\Delta x_0 e^{\varepsilon_0(\alpha_0+\varepsilon_0\alpha_1)\Delta x_0 + 1} < 1,$$

а також справедливі умови 1–3. Тоді при $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, $x \in R$ кожен розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} = C(x,\varepsilon)y(x,\varepsilon),$$

є розв'язком системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу (1). *Знайдеться матриця $C(x,\varepsilon)$ така, що: $C(x,\varepsilon) = C_0(x) + \varepsilon C_1(x) + \ldots + \varepsilon^k C_k(x) + \varepsilon^{k+1}C_{k+1}(x,\varepsilon)$. Матриці $C_i(x)$, $C_{k+1}(x,\varepsilon)$, $i = \overline{0,k}$, голоморфні при $|x| \le x_0$ і $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ має неперервну похідну за змінною ε при $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_n(x)$ є рівномірним при $|x| \le x_0$ асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ матриці $C(x,\varepsilon)$, і має місце нерівність*

$$\|C(x,\varepsilon) - \sum_{n=0}^{k} C_n(x)\varepsilon^n\| \le M|\varepsilon|^{k+1},\ |x| \le x_0,\ |\varepsilon| \le \varepsilon_0,$$

де $M = \sup\|C_{k+1}(x,\varepsilon)\|$ при $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$.

1. Самойленко А. М. Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. Укр. мат. журн., 2002, Т. 54, № 11. С. 1505– 1516.
2. Ключник І. Г., Завізіон Г. В. Про асимптотичне інтегрування сингулярно збуреної системи лінійних диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу. Нелінійні коливання, 2010, Т. 13, № 2. С. 161–176.

Феномен буферности: сценарии накапливания аттракторов в динамических системах

А. Ю. Колесов[1], Н. Х. Розов[2]
[1]ЯрГУ им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
[2]МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
kolesov@uniyar.ac.ru, fpo.mgu@mail.ru

Говорят, что в некоторой динамической системе, зависящей от параметров, наблюдается феномен буферности, если в фазовом пространстве этой системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать сосуществование любого a priori фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т. д.).

Начало изучения феномена буферности положила работа А. А. Витта [1]. Последующие исследования показали, что буферность представляет собой универсальное нелинейное явление, возникающее в математических моделях радиофизики, механики, экологии, нелинейной оптики, теории горения и т. д. Поэтому весьма актуальна проблема изучения возможных сценариев накапливания аттракторов в различных динамических системах. К настоящему времени известны четыре таких сценария: механизм Витта, а также тьюрингский, гамильтонов и гомоклинический механизмы.

Механизм Витта является наиболее распространенным и типичным. В его изучение, помимо авторов работ [2] – [7], существенный вклад внесли Ю. С. Колесов и некоторые другие российские математики, а также украинские математики А. М. Самойленко и Е. П. Белан [8] — [10]. Пусть в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия динамической системы имеет место критический случай счетного числа чисто мнимых собственных значений, а при изменении входящего в эту систему параметра происходит последовательное смещение точек спектра в правую комплексную полуплоскость. Тогда, как установлено в [1] – [6], чаще всего в такой системе наблюдается феномен буферности в простейшем его варианте: происходит неограниченное накапливание устойчивых циклов, причем каждый отдельно взятый цикл рождается из нулевого состояния равновесия неустойчивым, а затем обретает устойчивость, подрастая по амплитуде.

Тьюрингский механизм отличается от механизма Витта по существу лишь тем, что каждый индивидуальный цикл (или состояние равновесия) при изменении параметра сначала обретает устойчивость, а затем снова ее теряет. Таким образом, общее число аттракторов увеличивается, а их состав постоянно обновляется. Как показано в [5], данная ситуация реализуется в системах типа реакция-диффузия при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии и может возникать и в системах с запаздыванием (при неограниченном увеличении времени запаздывания). В частности, она наблюдается в модели “брюсселятор” А. Тьюринга (отсюда и название — тьюрингский механизм).

Описанные сценарии накапливания аттракторов характерны только для систем с бесконечномерным фазовым пространством. В конечномерных же системах простейшим механизмом возникновения буферности является *гамильтонов сценарий*, описанный в [5] – [7] для двумерных отображений и для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, близких к двумерным гамильтоновым. Рассмотрим гамильтонову или консервативную (не меняющуюся при обращении времени) систему обыкновенных дифференциальных уравнений с полутора или более степенями свободы. Известно, что хаотические движения в них сосуществуют со счетным числом «островков устойчивости», примыкающих к эллиптическим состояниям равновесия или циклам. Пусть, далее, наша система возмущена малыми добавками, обеспечивающими ее диссипативность. Тогда некоторые из упомянутых состояний равновесия или циклов могут стать асимптотически устойчивыми, причем количество таковых может неограниченно увеличиваться при стремлении возмущений к нулю. А это и означает, что в рассматриваемой системе наблюдается явление буферности, механизм возникновения которого уместно назвать гамильтоновым.

В случае обыкновенных дифференциальных уравнений существуют и другие, значительно более сложные механизмы накапливания устойчивых циклов; эти механизмы условно можно назвать *гомоклиническими*. Среди большого количества результатов для систем с гомоклиническими структурами остановимся лишь на трех, имеющих непосредственное отношение к феномену буферности.

Первый результат установлен И. М. Овсянниковым и Л. П. Шильниковым. Рассмотрим C^r-гладкую ($r \geq 4$) систему обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$ и предположим, что у нее существует изолированное состояние равновесия O с характеристическими корнями $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$, $\gamma > 0$, $\omega \neq 0$, $\lambda_3 > 0$. Предположим, далее, что имеется гомоклиническая к O траектория. Тогда при $\sigma_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_1 + \lambda_3 > 0$, $\sigma_2 = 2\mathrm{Re}\,\lambda_1 + \lambda_3 < 0$ в классе таких систем плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических движений.

Второй, аналогичный, результат, принадлежит Ньюхаусу. Пусть p — гиперболическая седловая неподвижная точка C^r-диффеоморфизма f в $\mathbb{R}^2$, для которого $\det f'(p) < 1$, а устойчивое и неустойчивое многообразия точки p касаются в некоторой точке. Тогда в сколь угодно малой C^r-окрестности f существует диффеоморфизм $\widetilde{f}$, имеющий бесконечно много устойчивых периодических орбит.

Третий результат, принадлежащий Н. К. Гаврилову и Л. П. Шильникову, заключается в том, что появлению или исчезновению точки гомоклинического касания предшествуют каскады бифуркаций типа седло-узел. При этих бифуркациях рождаются пары циклов — устойчивый и неустойчивый, причем количество устойчивых периодических движений за счет подходящего выбора бифуркационных параметров может быть сделано сколь угодно большим. Конкретные примеры, в которых реализуется этот сценарий возникновения буферности: уравнение Дуффинга с малой диссипацией и малым периодическим внешним воздействием; уравнение колебаний маятника с малым затуханием и вибрирующей точкой подвеса.

Упомянем, что реализуемость феномена буферности в автогенераторах с отрезком длинной линии в цепи обратной связи была подтверждена экспериментально — см. [2], [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00384а и № 12-01-00155а).

1. Витт А. А. Распределенные автоколебательные системы // Журн. технич. физики. 1934. Т. 4, № 1. С. 144–157.
2. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М.: Наука, 1998. (Тр. МИАН, Т. 222).
3. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Явление буферности в резонансных системах гиперболических уравнений // УМН. 2000. Т. 55, вып. 2(332). С. 95–120.
4. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 153–207.
5. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.
6. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Явление буферности в нелинейной физике // Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 112–182.

7. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Явление буферности в системах, близких к двумерным гамильтоновым // Тр. Ин–та матем. и мех. УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 109–140.
8. Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Ж. матем. физики, анализа, геометрии. 2005. Т. 1, № 1. С. 3–34.
9. Самойленко А. М., Белан Е. П. Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения // ДАН (Украина). 2006. Т. 406, № 6. С. 738–741.
10. Самойленко А. М., Белан Е. П. Вращающиеся волны феноменологического уравнения спинового горения // ДАН (Украина). 2008. Т. 421, № 6. С. 749–753.

Гіперболічні крайові задачі в обмежених кусково-однорідних циліндричних областях

І. М. Конет

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський, Україна

konet51@ukr.net

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D = \big\{(t,r,\varphi,z)|t>0; r \in <a;b>; \varphi \in [0;2\pi); z \in I_n^+ \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1};l_j),$$

$$l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1}, l_{n+1} = l < +\infty\big\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) + a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t,r,\varphi,z); z \in I_j; j = \overline{1,n+1}$$

з відповідними початково-крайовими умовами та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right)u_k - \left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1,n}; j = 1,2.$$

Стосовно проміжку $<a;b>$ розглянуто випадки:
1) $<a;b>=(0;+\infty)$;
2) $<a;b>=(R_0;+\infty), R_0>0$;
3) $<a;b>=(0;R), R<+\infty$;
4) $<a;b>=(R_0;R)$.

Інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків досліджуваних початково-крайо-вих задач одержано методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна). Побудовані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків коливних процесів у кусково-однорідних середовищах.

Багатопараметричне ітеративне агрегування для рівнянь з нелінійними операторами

М. І. Копач[1], А. Ф. Обшта[2], Б. А. Шувар[2]

[1]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

[2]Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

kopachm2009@gmail.com

Диференціальні та інтегральні рівняння, в яких описуються математичні моделі в прикладних науках, при практичній реалізації замінюють дискретними аналогами. Цими аналогами є системи лінійних та нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.

Методи ітеративного агрегування, як способи декомпозиції систем лінійних алгебраїчних рівнянь високої розмірності часто використовуються в математичній економіці (див, наприклад, [1])при розв'язуванні рівнянь міжгалузевого балансу, в задачах управління проектами та ін. Переважна більшість математичних досліджень цих методів для лінійного рівняння $x = Ax + b$ стосується найпростішого однопараметричного методу, який описується за допомогою формули

$$x^{(n+1)} = \frac{(\varphi, b)}{(\varphi, x^{(n)} - Ax^{(n)})}\, Ax^{(n)} + b,$$

яку можна подати у такому вигляді

$$x^{(n+1)} = \frac{(\varphi, x^{(n+1)})}{(\varphi, x^{(n)})}\, Ax^{(n)} + b.$$

При цьому серед інших припущень постулюються вимоги, щоб оператор A, який діє в банаховому просторі E з конусом додатніх елементів, був стискуючим і додатнім, та щоб вільний член b та агрегуючий функціонал φ були додатніми (див, наприклад, [2], стор. 155–158).

В цьому повідомленні пропонуємо алгоритм багатопараметричного ітеративного агрегування для нелінійного рівняння $x = Fx$ з оператором $F : E \to E$ вигляду $F = \sum\limits_{i=1}^{N} F_i$. Ітераційний процес описуємо за формулою

$$x^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\varphi_i, x^{(n+1)})}{(\varphi_i, x^{(n)})}\, F_i x^{(n)},$$

де лінійні неперервні функціонали φ_i не обов'язково повинні бути додатніми, а оператори F_i можуть не бути стискуючими та додатніми і монотонними. Отримані достатні умови збіжності грунтуються на використаному для лінійних рівнянь в [3] підході до побудови і дослідження багатопараметричних агрегаційно-ітеративних методів (див. також [4]).

1. Леонтьєв В. В, Форд Д. Экономика и математические методы. — М.: Наука, 1972.
2. Красносельський М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. -– М.: Наука, 1985.
3. Шувар Б. А. О сходимости многопараметрических вариантов метода итеративного агрегирования. Вестник Львовского политехнического института, 1989, Т. 232, с. 140–142.
4. Шувар Богдан, Обшта Анатолій, Копач Михайло. Декомпозиція лінійних операторних рівнянь за допомогою методів ітеративного агрегування. Математичний вісник НТШ, 2012, Т. 9, с. 384–398.

Динамика стационарных структур в параболическом уравнении со сдвигом

А. А. Корнута

Таврический национальный университет, Симферополь, Украина

korn_57@mail.ru

Исследование оптических структур в нелинейном интерферометре с преобразованием поворота в двумерной обратной связи приводит к параболическому уравнению на окружности $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ [1]:

$$\begin{gathered} \partial_t u + u = \mu\partial_{xx}u + L\,\mathrm{T}_h u + (\mathrm{T}_h u)^3, \\ u(x+2\pi, t) = u(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 2\pi, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathrm{T}_h u = u(x+h,t)$, h — угол поворота поля, $\mu > 0$, L — параметры. Рассмотрим случай $h = \pi$.

Уравнение (1) в соболевском пространстве $H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ 2π-периодичных функций порождает динамическую систему. Данное уравнение имеет нулевое стационарное решение, которое при $\mu > -1 - L$ является экспоненциально устойчивым.

Переход параметра μ значений $\mu_k = \frac{-L-1}{k^2}$, $k = 1, 3, \ldots$ приводит к изменению характера устойчивости нулевого решения. При $\mu = \mu_1$ тривиальное решение становится неустойчивым. В результате этой бифуркации от него ответвляются две непрерывные по μ устойчивые ветви пространственно неоднородных стационарных точек $\pm\varphi_1(x,\mu)$.

При $\mu = \mu_k$, $k = 3, 5, \ldots$ каждый раз на порядок увеличивается индекс неустойчивости нулевого решения. В результате от нуля ответвляется пара непрерывных по μ стационарных ветвей $\pm\varphi_k(x,\mu)$ с индексом неустойчивости $\frac{k-1}{2}$.

Бифуркационный анализ, основанный на методе центральных многообразий, позволяет получить асимптотическое представление для стационарных структур $\varphi_k(x,\mu)$ и ответить на вопрос об их устойчивости в окрестности бифуркационного значения параметра $\mu = \mu_k$.

Для исследования динамики стационарных структур $\varphi_k(x,\mu)$ при отходе параметра μ от соответствующего значения μ_k строится иерархия упрощённых моделей исходной задачи [2, 3].

Анализ упрощённых моделей приводит к следующим заключениям. Для $0 < \mu < -1 - L$ ветвь $\varphi_1(x,\mu)$ — устойчива. Ветвь $\varphi_3(x,\mu)$ рождается неустойчивой с индексом неустойчивости 1. При прохождении параметра μ значения $\mu^*(N)$ имеет место бифуркация рождения из $\varphi_3(x,\mu)$ однопараметрического орбитально устойчивого семейства стационарных решений.

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. В: Новые принципы оптической обработки информации. –М: Физматлит 1990.
2. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Структуры и хаос в нелинейных средах. –М: Физматлит, 2007.
3. Белан Е. П. Оптическая буферность стационарных структур. Кибернетика и системный анализ, 2008, 44, №5, с. 61–75.

Існування і побудова розв'язків крайових задач для вироджених диференціальних систем з імпульсною дією

І. І. Король

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

korol.ihor@gmail.com

Розглядаються системи диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t, \tau_i \in [a,b], \tag{1}$$

та імпульсною дією вигляду

$$\Delta x|_{t=\tau_i} \equiv x(\tau_i + 0) - x(\tau_i) = B_i x(\tau_i) + b_i, \quad det(\mathbb{E} + B_i) \neq 0. \tag{2}$$

де $A(t)$, $B(t)$ — $(n \times n)$-вимірні матриці, $A(t), B(t) \in C^m[a,b]$, де $m > r$, $r = max(rankB(t), t \in [a,b])$, $dimker\big(B(t)\frac{d}{dt} + A(t)\big) < \infty$, $t \in [a,b]$, $rankB(t) = n - r = const$ $\forall t \in [a,b]$, $r > 0$; вектор-функція $f(t)$ та $(n \times n)$-матриці $A(t)$, $B(t)$ достатньо гладкі, $a \leq \tau_1 < \ldots < \tau_p < b$, $p < \infty$.

На підставі аналізу структури загального розв'язку [2, 3] вироджених диференціальних систем (1) та теорії імпульсних систем [4], для вироджених диференціальних систем (1) з імпульсною дією (2) встановлено обмеження на імпульсні умови, при яких існує розв'язок при $t \in [a,b]$, знайдено вигляд загального розв'язку, встановлено необхідні та достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Також встановлено необхідні та достатні умови існування періодичних розв'язків відповідної однорідної виродженої імпульсної системи.

Крім того, як у некритичному, так і в критичному випадках встановлено необхідні та достатні умови існування та побудовано розв'язки, які задовольняють загальні лінійні функціональні умови

$$lx(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{n_1},$$

де l — лінійний m-вимірний вектор-функціонал над простором неперервних на $[a,b]$ вектор-функцій: $\ell : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{n_1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{n_1}$ — сталий вектор.

1. Campbell S. L., Petzold L. R. Canonical forms and solvable singular systems of differential equations. SIAM J. Algebr. Discrete Methods, 1983, № 4, P. 517–521.
2. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища школа, 2000.
3. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Москва: Наука, 2003.
4. Перестюк Н.А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007.

Концепция интеллектуального управления на нано-уровне процессами кристаллизации металлического расплава

Ю. Г. Кривонос, В. Г. Писаренко, И. А. Варава, Ю. В. Писаренко

Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

jvpisarenko@gmail.com, ivanvarava@rambler.ru

Моделирование процессов кристаллизирующегося расплава металла при управляющем импульсном воздействии на него требует развития методов системного анализа, учитывающих процессы энергомассопереноса на макро- и нано-уровне [1]–[6]. Один из подходов методов статистической физики ведет к построению решения для нелинейных интегродифференциальных уравнений типа уравнений Больцмана [7] или системы Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ) [8], которая для N атомов принимает вид системы для s-частичных функций распределения $f_s\,(t, \Omega_1, ..., :\Omega_\mathrm{s}, \Omega_\mathrm{j})$:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} v_i \cdot \partial f_s/\partial r_i + \sum_{i=1}^{s} F_i^b \cdot \partial f_s/\partial p_i + \sum_{i,j=1}^{s} F_{ij} \partial f_s/\partial p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} (s-N) \partial/\partial p_i \int F_{i,s+1} f_{s+1} d\Omega_{s+1}. \tag{1}$$

Каждая s-частичная функция распределения $f_s\,(t, \Omega_1, ..., :\Omega_\mathrm{s}, \Omega_\mathrm{j})$ зависит от значений времени t и координат точки $(s+1)$–мерного фазового пространства, образованного координатами и скоростями $(x_1, v_1) \equiv \Omega_1, ..., (x_s, v_s) \equiv \Omega_s, (x_j, v_j) \equiv \Omega_j$, каждая пара $_{(x_i, v_i)}$ — значение трех пространственных координат x_i и трех координат скорости v_i для $_i$-го атома. В правой части (1) F_{ij} - известный функционал, зависящий от функций распределения $_{f_1, ..., f_s}$. При $s = 1, 2, ..., N$, получим цепочку уравнений - или иерархию ББГКИ. Для системы (1) пока получены модельные решения для разреженных газов. Необходимо учитывать иерархию масштабов времени и вероятностей перехода между стадиями процессов тепломассопереноса на мезо-, микро- и наноуровнях [9], [10]. Использование разновидности метода Монте-Карло позволило в работе [11] выполнить моделирование процессов эпитаксиального напыления атомных слоев на кристаллическую подлож ку с заданной симметрией решетки. В модели «решеточного газа» в [12] смоделирована методом Монте-Карло спонтанная кристаллизация однокомпонентных и бинарных расплавов. Для построения модели управляемой кристаллизации расплава металла с применением варианта метода Монте-Карло, необходимо учесть присутствие атомов примесных металлов, процессов релаксации кинетической энергии локальных струй в расплаве, релаксацию поступательной и вращательной энергии атомов.

1. Ефимов В. А. Разливка и кристаллизация стали. – Москва: Металлургия, 1976, 551 с.
2. Ефимов В. А., Эльдарханов А. С. Физические методы воздействия на процессы затвердевания сплавов. – Москва: Металлургия, 1995, 272 с.
3. Бабаскин Ю. З., Шипицын С. Я., Кирчу И. Ф. Конструкционные и специальные стали с нитридной фазой. – Киев: Наукова думка, 2005, 372 с.
4. Либовиц Дж. Л., Монтролл Е. У. (Ред.). Неравновесные явления: Уравнение Больцмана. Пер. с англ. – Москва: Мир, 1986, 272 с.
5. Писаренко В. Г, Чайковский О. И., Бойко А. Г. Информационные модели кристаллизации стальных расплавов. – Москва: Астра, 2005, 84 с.
6. Шипицын С. Я., Бабаскин Ю. З., Писаренко В. Г., Дубоделов В. И., Золотарь Н. Я., Смульский А. А., Фикссен В. Н., Короленко Д. Н. Повышение эффективности внепечной обработки сталей модифицированием азотом. Процессы литья, 2006, № 1, С. 30–39.
7. Боголюбов Н. Н. Избранные туды в трех томах. Том 2. – Киев: Наукова думка, 1970, 522 с.
8. Алексеев Б. В. Математическая кинетика реагирующих газов. – Москва: Наука, 1982, 424 с.

9. Струминский В. В. О решении цепочки уравнений кинетической теории газов. ДАН СССР, 1966, том 169, №1, С.58-61.
10. Писаренко В. Г. Моделирование субмолекулярных кластеров в гетерожидкостях. – Москва: Астра, 2008, 104 с.
11. Зверев А. В., Неизвестный И. Г., Шварц Н. Л., Яновицкая З. Ш. Моделирование процессов эпитаксии, сублимации и отжига в трехмерном приповерхностном слое кремния. Физика и техника полупроводников, 2001, том 35, вып. 9, С. 1067–1074.
12. Овруцкий А. М., Расщупкина М. С., Рожко А. А. Моделирование спонтанной кристаллизации металлов. Металлофизика и новейшие технологии, 2006, том 28, № 3, С. 281–293.

Задача з інтегральними умовами за часом для факторизованого еволюційного оператора зі сталими коефіцієнтами

А. М. Кузь, Б. Й. Пташник

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

kuz.anton87@gmail.com, ptashnyk@lms.lviv.ua

В області $D^p = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x \in \mathbb{R}^p\}$ розглядається задача про знаходження майже періодичного за x розв'язку такої задачі:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)[u] := \prod_{j=1}^{n_1}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_j^2\Delta\right)\prod_{j=1}^{n_2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_j^2\Delta + c_j^2\right)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in D^p, \tag{1}$$

$$U_j[u] := \alpha_j u(t_j,x) + \beta_j\int_0^T t^{r_j}u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \quad n_1 + 2n_2 = n, \tag{2}$$

де a_j, b_j, c_j — додатні числа, $\Delta = \sum_{q=1}^{p}\partial^2/\partial x_q^2$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $r_q > r_s$, $q > s$, $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n \leqslant T$; функції $\varphi_j(x)$ — майже періодичні зі спектром $M_p = \{\mu_k = (\mu_{k_1},\ldots,\mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p \mid \mu_{-k} = -\mu_k, k \in \mathbb{Z}^p\}$ таким, що існують додатні сталі d_1, d_2, σ, що $d_1|k|^\sigma \leqslant |\mu_k| \leqslant d_2|k|^\sigma$, де $|z| = |z_1| + \cdots + |z_p|$, $z \in \mathbb{R}^p$.

Задача (1), (2) є, взагалі, умовно коректною, а її розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої використано метричний підхід [1].

Нехай $u_{jk}(t) = \exp(\lambda_{jk}t)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ — фундаментальна система розв'язків рівняння $L(d/dt, i\mu_k)[y] = 0$, де $\lambda_{jk} = -a_j^2\|\mu_k\|^2$, $j \in \{1,\ldots,n_1\}$, $\lambda_{n_1+j,k} = -i\left(b_j^2\|\mu_k\|^2 + c_j^2\right)^{1/2}$, $\lambda_{n_1+n_2+j,k} = i\left(b_j^2\|\mu_k\|^2 + c_j^2\right)^{1/2}$, $j \in \{1,\ldots,n_2\}$, $\|\mu_k\|^2 = \sum_{q=1}^{p}\mu_{k_q}^2$. Позначимо: $\tilde{t} = (t_1,\ldots,t_n)$, $\Delta(\mu_k,\tilde{t},T) = \det\|U_q[u_{jk}]\|_{q,j=1}^n$; $W_B^{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ — простір, отриманий шляхом поповнення простору скінченних сум $v(x) = \sum_{\mu_k \in M_p} v_k\exp(i\mu_k,x)$, $(\mu_k,x) = \sum_{q=1}^{p}\mu_{k_q}x_q$, за нормою $\|v;W_B^{\alpha,\beta}\| = \left(\sum_{\mu_k\in M_p}|v_k|^2(1+|\mu_k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|\mu_k|^2)\right)^{1/2}$; $C^h([0,T],W_B^{\alpha,\beta})$ — простір функцій $u(t,x)$ таких, що при фіксованому $t \in [0,T]$ $d^ju(t,\cdot)/dt^j \in W_B^{\alpha,\beta}$, $j \in \{0,1,\ldots,h\}$, із нормою $\|u;C^h([0,T],W_B^{\alpha,\beta})\| = \sum_{j=0}^{h}\max_{t\in[0,T]}\|d^ju(t,\cdot)/dt^j;W_B^{\alpha,\beta}\|$.

Теорема 1. *Для того, щоб задача (1), (2) мала не більше одного майже періодичного за x із спектром M_p розв'язку у просторі $C^n([0,T],W_B^{\alpha,\beta})$, необхідно і достатньо, щоб $\Delta(\mu_k,\tilde{t},T) \neq 0$ для всіх $\mu_k \in M_p$.*

Теорема 2. *Нехай виконується умова теореми 1 та існують додатні сталі η, ν такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M_p$ виконується нерівність $|\Delta(\mu_k,\tilde{t},T)| > (1+|\mu_k|)^{-\eta}\exp(-\nu|\mu_k|^2)$. Якщо $\varphi_j(x) \in W_B^{q_1,q_2}$, $q_2 = \nu + \beta$,*

$q_1 = = \eta + 2n + \tilde{r}(j) + \alpha$, $\tilde{r}(j) = r_{2n_2+1} + \cdots + r_n$, $j \leqslant 2n_2$, $\tilde{r}(j) = r_{2n_2} + \cdots + r_n - r_j$, $2n_2 < j \leqslant n$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *то існує розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $C^n([0,T], W_B^{\alpha,\beta})$, *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$ *та зображується рядом* $u(t,x) = u_{\vec{0}}(t) + \sum_{\mu_k \in M_p \setminus \{\vec{0}\}} \left(\sum_{l,j=1}^{n} \Delta_{lj}(\mu_k, \tilde{t}, T) \Delta^{-1}(\mu_k, \tilde{t}, T) \varphi_{lk} u_{jk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x)$, де $\Delta_{lj}(\mu_k, \tilde{t}, T)$ — *алгебричне доповнення елемента* l*-го рядка та* j*-того стовпця в* $\Delta(\mu_k, \tilde{t}, T)$, φ_{lk} — *коефіцієнти Фур'є функції* $\varphi_l(x)$, $l \in \{1, \ldots, n\}$.

Доведено, що нерівність з умов теореми 2 виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\tilde{t} \in [0,T]^n$ для певних η та ν, які визначаються через вихідні дані задачі (1), (2).

1. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наукова думка, 2002. – 416 с.

Регулярність лінійних розширень динамічних систем

Кулик В. Л.
Сілезський технічний університет, Глівіце, Польща
viktor.kulyk@ukr.net

Розглядаються питання пов'язані з властивістю регулярності і слабої регулярності систем диференціальних рівнянь вигляду ${d\varphi}/{dt} = a(\varphi)$, ${dx}/{dt} = P(\varphi)x$, де функції $a(\varphi), P(\varphi)$ відповідної гладкості, визначені на торі T_m, $x \in R^k$. В припущенні, що записана система має безліч різних $n \times n$-вимірних функцій Гріна-Самойленка, розглядаються можливості доповнення її до системи трикутного вигляду відносно нормальних змінних $x \in R^k$, яка уже матиме єдину $2n \times 2n$-вимірну функцію Гріна–Самойленка. Обговорюються задачі, які при цьому виникають. Досліджуючи можливість перетворення систем блочно-трикутного вигляду відносно нормальних змінних $x \in R^k$ до блочно-діагонального вигляду, приходимо до системи матрично-диференціальних рівнянь. ${dX}/{dt} = A(\varphi)X - XB(\varphi) + H(\varphi)$, ${d\varphi}/{dt} = a(\varphi)$, де $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ — квадратні матриці розмірів відповідно $n \times n$ і $p \times p$, елементами яких є неперервні дійсні функції, визначені на торі T_m. Досліджується питання існування інваріантного тору $X = U(\varphi) \in C'(T_m; a)$ записаних вище матрично-диференціальних систем при кожній фіксованій матриці $H(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Позначимо $\Omega_\tau^t(\varphi; A)$, $\Omega_\tau^t(\varphi; B)$ нормовані фундаментальні матриці розв'язків відповідних лінійних систем з параметрами ${dy_1}/{dt} = A(\varphi_t(\varphi))y_1$, ${dy_2}/{dt} = B(\varphi_t(\varphi))y_2$.
Має місце наступне твердження.
Теорема. *Нехай виконується одна із наступних оцінок*

$$\left\|\Omega_t^0(\varphi; A)\right\| \cdot \left\|\Omega_0^t(\varphi; B)\right\| \leq K \exp\{-\gamma t\} \ , \quad t \geq 0 \ ,$$
$$\left\|\Omega_t^0(\varphi; A)\right\| \cdot \left\|\Omega_0^t(\varphi; B)\right\| \leq K \exp\{\gamma t\} \ , \quad t \leq 0 \quad , \quad K, \gamma = const > 0,$$

тоді матрично-диференціальних система має єдиний інваріантний тор $X = U(\varphi)$ *при кожній фіксованій матриці* $H(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Причому, при виконанні першої з оцінок инваріантний тор записується у вигляді

$$X = U(\varphi) = -\int_0^{+\infty} \Omega_\sigma^0(\varphi; A) H(\varphi_\sigma(\varphi)) \left[\Omega_0^\sigma(\varphi; B)\right]^T d\sigma,$$

а при виконанні другої із оцінок тор має вигляд

$$X = U(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_{\sigma}^{0}(\varphi; A)\, H(\varphi_{\sigma}(\varphi))\, [\Omega_{0}^{\sigma}(\varphi; B)]^{T}\, d\sigma.$$

Розділення змінних X при спрощенні відповідних систем з матрицями $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ обговорюється в доповіді. Інтегральний вигляд інваріантних торів, а також їх існування при змінах матриць A, B обговорюється в доповіді.

1. Mitropolsky Yu., Samoilenko A. Kulik V. Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems// Taylor & Francis Inc, London, 2003.
2. Кулик В. Л, Кулик А. Н., Степаненко Н. В. Дополнение слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных // Математический журнал. Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39). – С. 74–86.

Про деякі класи регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі

Кулик Г. М.

Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ganna_1953@ukr.net

Розглядається питання існування єдиної функції Гріна–Самойленка для деяких класів систем диференціальних рівнянь вигляду

$$d\varphi/_{dt} = \omega(\varphi), \qquad dy/_{dt} = A(\varphi)\, y, \tag{1}$$

де координати $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ змінюються на m-вимірному торі T_m, $\omega(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$, $A(\varphi) \in C(T_m)$. Це питання пов'язане з існуванням функції Ляпунова, яка вибирається у вигляді квадратичних форм, що можуть змінювати знак, а навіть і вироджуватись. Фіксуючи деяку невироджену квадратичну форму $V = \langle S(\varphi)\, y, y\rangle$, досліджуємо множину систем (1) таких, що похідна цієї форми в силу кожної з них є додатно чи від'ємно визначеною. Таким чином, кожна з систем цієї множини буде мати єдину функцію Гріна–Самойленка, тобто бути регулярною. Серед множини регулярних систем привернули увагу системи вигляду

$$d\varphi/_{dt} = \omega(\varphi)\,, dy/_{dt} = \begin{pmatrix} \sin\sigma(\varphi) & \cos^{2k}\sigma(\varphi) \\ 1 & -\sin\sigma(\varphi) \end{pmatrix} y \ , \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2,$$

де $\sigma(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j$, $k \in N$. Оскільки похідна невиродженої квадратичної форми $V = py_1y_2 - y_2^2 \sin\sigma(\varphi)$ в силу записаної системи буде додатно визначеною при достатньо великих значеннях параметра $p > 0$, то записана система буде регулярною при будь-яких вектор-функціях $\omega(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$. В зв'язку з цим виникла наступна задача: знайти множину систем (1) з парною кількістю змінних $y = (y_1, y_2)$б $n \to 2n$, таких, щоб похідна невиродженої квадратичної форми $V = \langle Sy_1, y_1\rangle \sin\sigma(\varphi) + p\langle y_1, y_2\rangle$, $y_1, y_2 \in R^n$,$p \neq 0$, в силу цих систем була додатно визначеною.

Дослідження привели до наступного твердження.

Теорема. *Нехай в системі рівнянь*

$$d\varphi/_{dt} = \omega(\varphi)\,, dy_1/_{dt} = \frac{1}{p} B_{21}(\varphi)\, y_1 + \frac{1}{p} B_{22}(\varphi)\, y_2 \ , \quad y_1, y_2 \in R^n,$$

$$
{}^{dy_2}\!/_{dt} = \left[\frac{1}{p}B_{11}(\varphi) - \frac{1}{p^2}SB_{21}(\varphi)\sin\sigma(\varphi) + \frac{1}{p}\left(-0,5S\left(\sum_{j=1}^{m}\omega_j(\varphi)\right)\cos\sigma(\varphi)\right)\right]y_1 +
+ \left[\frac{1}{p}B_{12}(\varphi) - \frac{1}{p^2}SB_{22}(\varphi)\sin\sigma(\varphi)\right]y_2, \qquad (2)
$$

$\sigma(\varphi) = \sum_{j=1}^{m}\varphi_j$, $n \times n$-вимірні матриці $B_{ij}(\varphi) \in C(T_m)$ такі, що складена з них $2n \times 2n$-вимірна матриця $B(\varphi) = \begin{pmatrix} B_{11}(\varphi) & B_{12}(\varphi) \\ B_{21}(\varphi) & B_{22}(\varphi) \end{pmatrix}$ є додатно визначеною, тоді система (2) при будь-якій вектор-функції $\omega(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$ і при кожному значенні параметра $p \neq 0$ матиме єдину функцію Гріна–Самойленка.

1. Mitropolsky Yu., Samoilenko A., Kulik V. Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems// Taylor & Francis Inc, London, 2003.
2. Кулик В. Л, Кулик А. Н., Степаненко Н. В. Дополнение слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных //Математический журнал. Алматы. 2011. Том 11. № 1 (39). – С. 74–86.

Новые математические задачи, возникающие при изучении панельного флаттера

А. Н. Куликов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
anat_kulikov@mail.ru

Задача о колебаниях пластинки в сверхзвуковом потоке газа в случае цилиндрического изгиба (см., например, [1, 2]) приводит к необходимости исследования краевых задач для уравнения

$$
w_{tt} + g_0 w_t + w_{xxxx} + c w_x = F(w_t, w_x, w_{xx}), \qquad (1)
$$

где нелинейное слагаемое F имеет в нуле порядок малости выше первого. Его явный вид приведен в монографиях [1, 2]. Уравнение (1) приведено в перенормированном виде. Так, например, положительный коэффициент c пропорционален скорости потока газа и играет, обычно, роль основного параметра задачи, $g_0 > 0$ — коэффициент демпфирования. После нормировок он пропорционален $E^{-1/2}$, где E модуль упругости. Уравнение (1) рассматривается вместе с краевыми условиями. Например, шарнирного опирания

$$
w(t, 0) = w(t, 1) = w_{xx}(t, 0) = w_{xx}(t, 1) = 0. \qquad (2)
$$

Краевые условия (2) могут быть заменены на иные, например, жесткого закрепления.

С математической точки зрения традиционное объяснение флаттера базируется на распространении бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа на соответствующий класс нелинейных эволюционных уравнений [2–4]. При $c < c_*$ (c_* — скорость флаттера) нулевое состояние равновесия краевой задачи (1),(2) асимптотически устойчиво. При $c > c_*$ оно теряет устойчивость колебательным образом. При $c = c_* + \varepsilon, |\varepsilon| \ll 1$ могут возникнуть незатухающие колебания.

Иное объяснение для жесткого возбуждения колебаний удалось дать, если коэффициент $g_0 \ll 1$. Случай досточно типичен, так как коэффициент E очень часто относительно велик. Так, например, для стали $E = 2 \cdot 10^{11} H/\text{м}^2$. При $g_0 \ll 1$ автоколебания могут возникнуть при таких значениях $c = c_1, c = c_2, c = c_3$, когда собственные частоты колебаний линеаризованной задачи близки к резонансам 1:1, 1:2, 1:3, соответственно $[5-7]$. Отметим, что обычно $c_3 < c_2 < c_1 < c_*$, т.е. колебания возникают раньше, чем будет достигнута скорость флаттера. Очень часто c_3, c_2 значительно меньше скорости флаттера c_*.

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматлит, 1961, 339 с.
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.–Ижевск. Ин-т. компьютерных исследований, 2002, 560 с.
3. Куликов А. Н., Либерман Б. Д. О новом подходе к исследованию задач нелинейного панельного флаттера. Вестник Яросл. ун-та, 1976, в. 6, с. 118-139.
4. Колесов В. С., Колесов Ю. С., Куликов А. Н., Федик И. И. Об одной математической задаче теории упругой устойчивости. Прикладная математика и механика,1978, т. 42, No 3, с. 458–465.
5. Куликов А. Н. Бифуркация автоколебаний пластинки при малом коэффициенте демпфирования. Прикладная математика и механика, 2009, т. 73, №2, с. 271–281.
6. Куликов А. Н. Резонанс 1:3 – одна из возможных причин нелинейного панельного флаттера. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2011, т. 51, №7, с. 1266–1279.
7. Куликов А. Н. Бифуркации малых периодических решений в случае близком к резонансу 1:2 для одного класса эволюционных уравнений. Динамические системы, 2012, т. 2 (30), №5. с. 241–258.

К вопросу о локальных бифуркациях волнового нанорельефа

Д. А. Куликов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

kulikov_d_a@mail.ru

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными с отклоняющейся пространственной переменной

$$u_t = au_{xx} - cw_x + u - w + b_1(u-w)w_x + b_2(w_x)^2 + b_3(u-w)(w_x)^2, \tag{1}$$

где $u = u(t,x)$ —нормированное отклонение от плоского фронта мишени, $w = u(t, x-h)$. Коэффициенты уравнения (1) зависят от физических параметров задачи. Отметим также, что $a \sim J^{-1}$ интенсивности потока. Уравнение (1) было предложено в работе [1], как один из возможных путей развития теории П.Зигмунда. Это уравнение, как и в случае уравнения Брэдли–Харпера [2], рассматривается с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x). \tag{2}$$

Возможны различные варианты выбора h. Так, в работе [3] $h = 2$, в работе [4] $h = 2\pi/3$ или $h = \pi$. Аналогичные результаты имеют место, если рассмотреть $h = \pi/2$.

Во всех рассмотренных случаях показано, что при $a > a_{\text{кр}}$ состояния равновесия $u(t,x) = u_0$ ($u_0 \in R$) устойчивы. Если же $a < a_{\text{кр}}$, то методом теории бифуркаций показано, что от состояния равновесия краевой задачи (1), (2) может бифурцировать семейство решений, которые существенным образом зависят от x и тем самым определяют тот рельеф, который в физике называют волновым.

Для обоснования результатов использован метод интегральных (инвариантных) многообразий. Исследование вопросов о существовании и устойчивости неоднородных диссипативных структур удается свести к изучению структуры окрестности системы обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальной форме (НФ). В случае близком к

критическому коразмерности 1 главная часть НФ в рассмотренной задаче имеет следующий вид
$$\dot{\psi} = \varepsilon q|z|^2, \ \dot{z} = \varepsilon\gamma z + \varepsilon(d + ig)z|z|^2.$$
Для определения коэффициентов НФ $q, d, g \in R$ использован алгоритм, ведущий свое начало от известного метода Крылова–Боголюбова–Митропольского–Самойленко.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (контракт № МК-2298.2013.1).

1. Рудый А. С., Бачурин В. И. Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой. Изв. РАН. Серия физическая, 2008, т. 72, № 5, С. 624-629.
2. Bradley R. M., Harper J. M. Theory of ripple topography induced by ion bombardment. J. Vac. Sci. Technol, 1988, v. A6, P. 2390–2395.
3. Куликов Д. А.,Рудый А. С. Формирование волнового нанорельефа при распылении поверхности ионной бомбардировкой. Нелокальная модель эрозии. Моделирование и анализ информационных систем, 2012, т. 19, № 5, С. 39–48.
4. Куликов Д. А. Неоднородные диссипативные структуры в задаче о формировании нанорельефа. Динамические системы, 2012, т. 2 (30), № 5, С. 259–272.

Асимптотические представления некоторого класса решений дифференциальных уравнений второго порядка

Л. И. Кусик

Одесский национальный морской университет, Одесса, Украина

ludakusik@mail.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение
$$y'' = f(t, y, y'), \tag{1}$$
где $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \longrightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Δ_{Y_i} $(i \in \{0, 1\})$ — односторонняя окрестность Y_i, Y_i $(i \in \{0, 1\})$ равно либо 0, либо $\pm\infty$. При этом также предполагается, что числа μ_i $(i = 0, 1)$, определяемые равенством
$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_i = +\infty, \quad \text{либо} \quad Y_i = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_i} - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_i = -\infty, \quad \text{либо} \quad Y_i = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{Y_i} - \text{левая окрестность } 0, \end{cases}$$
таковы, что
$$\mu_0\mu_1 > 0 \quad \text{при} \quad Y_0 = \pm\infty \quad \text{и} \quad \mu_0\mu_1 < 0 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0.$$

Определение 1. *Решение y уравнения (1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если для него соблюдаются условия*
$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \qquad \text{при } t \in [t_0, \omega[\ , \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

Определение 2. *Будем говорить, что функция f удовлетворяет условию $(RN)_1$, если существуют число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, непрерывная функция $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ и непрерывные правильно меняющиеся при $z \to Y_i$ $(i = 0, 1)$ функции $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 0, 1)$*

порядков σ_i $(i = 0,1)$, *такие, что для любых непрерывно дифференцируемых функций* $z_i : [a,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}$ $(i = 0,1)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{t\uparrow\omega} z_i(t) = Y_i, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) z_i'(t)}{z_i(t)} = \pm\infty \quad (i = 0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{z_0'(t) z_1(t)}{z_0(t) z_1'(t)} = 1,$$

имеет место представление

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t) \varphi_0(z_0(t)) \varphi_1(z_1(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2}$$

В предположении, что функция f удовлетворяет условию $(RN)_1$ и в представлении (2) порядки σ_i $(i = 0,1)$ функций $\varphi_i\,(i = 0,1)$, такие, что $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, сформулирована теорема о существовании $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$- решений дифференциального уравнения (1), а также установлены при $t \uparrow \omega$ их асимптотические представления. Кроме того, выяснен вопрос о количестве таких решений.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Х. С. Кучакшоев

Российско–Таджикский (Славянский) университет, Душанбе, Таджикистан

bassidkhol@mail.ru

Доклад посвящен преобразованию квазилинейного параболического уравнения, полученное из системы Келлера–Сиджела [1], в линейное дифференциальное уравнение в частных производных с переменными коэффициентами.

Рассмотрим систему Келлера–Сиджела,

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial}{\partial x}(u \frac{\partial v}{\partial x}), \\ \chi = const, x \in R, t > 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -u, \\ x \in R, t > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

не формулируя для нее конкретную задачу.

Из системы (1) получим квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\chi}{2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + x\xi(t) + \eta(t), \tag{2}$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ произвольные функции переменной t.

Лемма 1. *Уравнение* (2) *можно получить из линейного дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \chi g(t) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\chi^2}{4} g^2(t) w, \tag{3}$$

преобразованием

$$w(x,t) = e^{-\dfrac{\chi(v(x,t) - xg(t) - h(t))}{2}}, \tag{4}$$

где $g'(t) = \xi(t)$, $h'(t) = \eta(t)$.
Верно и обратное утверждение.
Лемма 2. *При условии* $w(x,t) > 0$, *уравнение* (3) *можно получить из уравнение* (2) *преобразованием*

$$v(x,t) = xg(t) + h(t) - \frac{2}{\chi} \ln w(x,t), \tag{5}$$

где $g'(t) = \xi(t)$, $h'(t) = \eta(t)$.

Из леммы (1) и (2) следует:
Теорема. 1)*Если* $w(x,t) > 0$ — *решение уравнения* (3), *то* $v(x,t)$ *из* (5) *является решением уравнения* (2).
2) *Если* $v(x,t)$ *решение уравнения* (2), *то* $w(x,t)$ *из* (4) *является решением уравнения* (3).

В частности при $g(t) = const$ решения уравнения (2), следовательно, и решения системы (1) получены в явном виде [2].

1. A. Blanchet, J. Dolbeault, and B. Perthame. Two-dimensional Keller–Segel model: Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions. Electron. J. Differential Equations, 2006, 44, pp. 32.
2. Кучакшоев Х. С. Ограниченные решения типа “бегущей волны” и некоторые частные решения системы Келлера–Сиджела. ДАН РТ, 2011, т. 54, С. 610–617.

О СТРУКТУРЕ ТРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ, ДОПУСКАЮЩЕГО ДИФФЕОМОРФИЗМЫ С ОДНОМЕРНЫМИ БАЗИСНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Ю. А. Левченко
Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород, Россия
ulev4enko@gmail.com

Пусть f сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, заданный на замкнутом ориентируемом связном 3-многообразии M^3 и удовлетворяющие аксиоме A С. Смейла (то есть множество неблуждающих точек $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$). Согласно С. Смейлу неблуждающее множество $NW(f)$ представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных базисных множеств, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. Любое базисное множество $\mathcal{B}$ представляется в виде конечного объединения $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ замкнутых подмножеств ($k \geq 1$), называемых периодическими компонентами множества $\mathcal{B}$, таких, что $f^k(B_i) = B_i, f(B_i) = B_{i+1} \quad (B_{k+1} = B_1)$. Число k называется периодом базисного множества $\mathcal{B}$.

В силу [1] нетривиальное (отличное от периодической орбиты) базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется поверхностным, если оно принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности $M^2_{\mathcal{B}}$ топологически вложенной в 3-многообразие M^3 и называемой носителем множества $\mathcal{B}$.

Следуя [2] нетривиальное поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$ назовем просторно расположенным, если не существует гомотопной нулю на $M^2_{\mathcal{B}}$ петли, образованной парой отрезков, являющихся пересечением устойчивого и неустойчивого многообразий какой-либо точки из $\mathcal{B}$ с $M^2_{\mathcal{B}}$.

Предположим, что неблуждающее множество диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ содержит базисное множество $\mathcal{B}$, периодическая компонента B которого имеет период k и принадлежит поверхности T_B^2, гомеоморфной двумерному тору. Следующий результат доказывается аналогично с использованием техники доказательства теоремы 2 из [1].

Теорема. *Ограничение диффеоморфизма $f^k|_{T_B^2}$ индуцирует гиперболический автоморфизм фундаментальной группы тора T_B^2 (то есть матрица, индуцирующая этот автоморфизм, является гиперболической, то есть не имеет собственных значений, по модулю равных единице).*

Пусть M_A — мноогобразие, являющееся фактор-пространством, полученным из $T^2 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(f_{A(z)},0)$, где f_A диффеоморфизм тора, индуцированный унимодулярной матрицей A. Используя результат работы [3], получаем:

Следствие. *Если носитель периодической компоненты B базисного множества $\mathcal{B}$ гомеоморфен двумерному тору, то многообразие M^3 гомеоморфно многообразию M_A, где матрица A либо гиперболична, либо тождественна, либо равна* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Автор благодарит В. З. Гринеса за постановку задачи и полезные обсуждения, а также грант РФФИ 12-01-00672-а за частичную финансовую поддержку.

1. Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В. О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях. Мат. зам., 2005, 78, № 6, 813–826.
2. Плыкин Р. В. О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С.Смейла. Матем. сборник, 1971, 84, № 2, 301–312.
3. Hertz F., Herts M., Ures R. Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds. Journal of modern dynamics, 2011, 5, No. 1, 185–202.

Принцип локалізації розв'язків задачі Коші для простіших вироджених параболічних систем

В. А. Літовченко[1], О. Б. Васько[2]

[1]Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
[2]Буковинський державний фінансово-економічний університет, Чернівці, Україна
vladlit4@mail.ru, lenastasiy@ukr.net

Зафіксуємо довільно $T > 0$, $\{m,\ 2b\} \in \mathbb{N}$ і розглянемо задачу Коші вигляду

$$(\partial_t - x_1\partial_{x_2})\, u(t;x) = \mathbb{A}(t, i\partial_{x_1})u(t;x),\ (t;x) \in (0;T] \times \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$u(t;\cdot)|_{t=0} = f,\ f \in \left(\mathbb{S}_\alpha^\beta\right)', \tag{2}$$

де $u := \mathrm{col}(u_1;...;u_m)$, $\mathbb{A}(t, i\partial_{x_1}) = \left(\sum\limits_{k=0}^{2b} a_k^{ij}(t)(i\partial_{x_1})^k\right)_{i,j=1}^{m}$ — матричний диференціальний вираз, коефіцієнти якого є неперервними на $[0;T]$ функціями і такими, що відповідний диференціальний вираз $\partial_t - \mathbb{A}(t, i\partial_{x_1})$ є $2b$-параболічним за Петровським на множині $(0;T] \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}_\alpha^\beta$ —векторний аналог простору S_α^β [1], а $\left(\mathbb{S}_\alpha^\beta\right)'$ — топологічно спряжений з ним простір.

Системи вигляду (1) першою розпочала досліджувати Малицька Г. П. [2]. Вона побудувала фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) $G(t,x;\tau,\xi)$ та дослідила її основні властивості.

У праці [3] установлено належність ФМРЗК стосовно кожної просторової змінної x і ξ до відповідного векторного простору типу S (при фіксованих t і τ), а також її (сильну) диференційовність за змінною $t \in (\tau;T]$ та нескінченну диференційовність за змінною $x \in \mathbb{R}^2$ у просторі $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$ (як абстрактної функції цих змінних), де $\alpha^* := 1 - \frac{1}{2b}$, $\beta^* := \frac{1}{2b}$. З'ясовано, що задача Коші (1), (2) коректно розв'язна в просторі початкових даних —

узагальнених функцій типу розподілів Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є., а її розв'язок є нескінченно диференційовною вектор-функцією за просторовою змінною.

Оскільки вектор-функція f є узагальненою, то початкова умова (2) визначається у сенсі слабкої збіжністі в просторі $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$. Зазначений простір багатий на неперервні та різного ступеня гладкості вектор-функції, тому важливим є вивчення питання про можливість посилення збіжності розв'язку вказаної задачі до свого граничного значення при $t \to +0$ виходячи з тих чи інших властивостей f.

Розвиваючи ідею, реалізовану в [4], встановлено принцип локального посилення збіжності розв'язку задачі Коші (1), (2) при $t \to +0$ до свого граничного значення у випадку, коли початкові дані є узагальненими вектор-функціями типу розподілів Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є., для яких коректним є класичне поняття рівності двох узагальнених функцій на множині.

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. — М.:Физматгиз, 1958.
2. Малицька Г. П. Системи рівнянь типу Колмогорова. Укр. мат. журн, 2008, Т. 60, № 12, С. 1650–1663.
3. Васько О. Б. Коректна розв'язність задачі Коші для одного класу вироджених параболічних систем рівнянь типу Колмогорова. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2012, Вип. 7, С. 44–54.
4. Літовченко В. А., Стрибко О. В. Принцип локалізації задачі Коші для рівнянь типу Колмогорова з виродженою $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною. Укр. мат. журн, 2010, Вип. 62, № 11, С. 1473–1489.

Про параболічні задачі у просторах узагальненої гладкості

В. М. Лось[1], О. О. Мурач[2]

[1]Чернігівський державний технологічний університет, Чернігів, Україна

[2]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

v_los@yahoo.com, murach@imath.kiev.ua

У доповіді наведені застосування деяких анізотропних функціональних просторів узагальненої гладкості до параболічних рівнянь. Показниками гладкості для цих просторів служать пара дійсних числових параметрів s і $s/(2b)$, де фіксовано $b \in \mathbb{N}$, та довільна неперервна функція $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, повільно змінна на $+\infty$ за Й. Караматою. Остання властивість значить, що $\varphi(\lambda t)/\varphi(t) \to 1$ при $t \to +\infty$. У випадку площини відповідний гільбертів простір $H^{s,s/2b,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ таких, що

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bigl(1+|\xi|^2+|\eta|^{1/b}\bigr)^s\,\varphi^2\bigl((1+|\xi|^2+|\eta|^{1/b})^{1/2}\bigr)\,\bigl|(\mathcal{F}w)(\xi,\eta)\bigr|^2\,d\xi\,d\eta<\infty. \qquad (1)$$

Тут $\mathcal{F}w$ є перетворення Фур'є розподілу w. Квадратний корінь з лівої частини нерівності (1) задає гільбертову норму в цьому просторі. Простори $H^{s,s/2b,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ утворюють уточнену анізотропну соболєвську шкалу. Вона містить анізотропні простори Соболєва $H^{s,s/2b}(\mathbb{R}^2) = H^{s,s/2b,1}(\mathbb{R}^2)$. Ця шкала має важливу властивість: кожний простір $H^{s,s/2b,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ є результатом інтерполяції з підходящим функціональним параметром пари просторів Соболєва $H^{s_0,s_0/2b}(\mathbb{R}^2)$ і $H^{s_1,s_1/2b}(\mathbb{R}^2)$, де $s_0 < s < s_1$.

Нехай $\Omega := (0, L) \times (0, T)$, де вибрано $L > 0$ і $T > 0$. Розглянемо в прямокутнику Ω мішану параболічну задачу

$$
\begin{gathered}
A(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t) = f(x,t), \quad 0 < x < L, \;\; 0 < t < T, \\
B_{j,r}(x,t,D_x,\partial_t)u(x,t)\restriction_{x=r} = g_{j,r}(t), \quad 0 < t < T, \;\; j = 1,\dots,m, \;\; r = 0,\,1, \\
\partial_t^k u(x,t)\restriction_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L, \;\; k = 0,\dots,m/b-1.
\end{gathered}
$$

Тут $A := A(x,t,D_x,\partial_t)$ є параболічний лінійний диференціальний оператор парного порядку $2m \geq 2$, число b є параболічна вага цього оператора, а $B_{j,r} := B_{j,r}(x,t,D_x,\partial_t)$ є граничні лінійні диференціальні оператори порядків $m_j \leq 2m-1$. Комплекснозначні коефіцієнти операторів A та $B_{j,r}$ належать до $C^\infty(\overline{\Omega})$ та $C^\infty[0,T]$ відповідно.
Теорема [1]. *Відображення* $u \mapsto (Au, B_{1,0}u, B_{1,1}u, \dots, B_{m,0}u, B_{m,1}u)$, *де* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *та* $\partial_t^k u(x,0) \equiv 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *продовжується за неперервністю до ізоморфізму*

$$
H_{+}^{s,s/2b,\varphi}(\Omega) \leftrightarrow H_{+}^{s-2m,(s-2m)/2b,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} \bigl(H_{+}^{(s-m_j-1/2)/2b,\varphi}(0,T)\bigr)^2 \quad \text{при} \quad s > 2m.
$$

Тут $H_{+}^{s,s/2b,\varphi}(\Omega)$ є гільбертів простір, що складається зі звужень в Ω усіх розподілів $w \in H^{s,s/2b,\varphi}(\mathbb{R}^2)$ з $\operatorname{supp} w \subset \mathbb{R} \times [0,\infty)$. Простори $H_{+}^{s,\varphi}(0,T)$ на $(0,T)$ означаються аналогічно.

У доповіді обговорені деякі узагальнення та застосування цієї теореми.

1. Los V., Murach A. A. Parabolic problems and interpolation with a function parameter. Methods Funct. Anal. Topology, 2013, V. 19, no. 2. (arXiv:1304.2552)

Гранична періодичність розв'язку лінійної двопараметричної системи Вольтерри

К. В. Лукаш
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
lukash_katya@univ.kiev.ua

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір,$L(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють із B в B, $\{A_{k,j} : \; k \geq 0, \; j \geq 0\}$ — такий набір операторів з $L(B)$, що

$$
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \|A_{k,j}\| < \infty.
$$

Позначимо символом

$$
l_{\infty}^{2}(B) := \left\{ x = \{x_{n,m} : n \geq 0, m \geq 0\} \subset B \;\middle|\; \|x\|_{\infty} := \sup_{n\geq 0, m \geq 0} \|x_{n,m}\| < \infty \right\} -
$$

простір обмежених послідовностей. Також для фіксованих цілих невід'ємних чисел n, m покладемо

$$
\Omega(n,m) := \left\{ (k,j) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; 0 \leq k \leq n, 0 \leq j \leq m, (k,j) \neq (n,m) \right\}.
$$

Розглянемо лінійну двопараметричну дискретну систему Вольтерри

$$
\begin{aligned}
&u_{0,0} = t_{0,0}, \\
&u_{n,m} = -\sum_{(k,j)\in\Omega(n,m)} A_{n-k,m-j}u_{k,j} + t_{n,m}, \;\; n \geq 0, \;\; m \geq 0, \; (n,m) \neq (0,0).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Зафксуємо $p, \ q \in \mathbb{N}$. Нехай обмежена послідовність $t = \{t_{n,m}: \ n \geq 0, \ m \geq 0\}$ додатково є (p, q)-періодичною, тобто

$$\forall n \geq 0 \ \forall m \geq 0: \ t_{n+p,m} = t_{n,m} = t_{n,m+q}.$$

Продовжимо її до (p, q)-періодичної на $\mathbb{Z}^2$ послідовності $\widetilde{t} = \left\{\widetilde{t}_{n,m}: \ n \in \mathbb{Z}, \ m \in \mathbb{Z}\right\}$, для якої $\widetilde{t}_{n,m} = t_{n,m}, \ n \geq 0, \ m \geq 0.$

Справедлива теорема.

Теорема. *Припустимо система* (1) *має для довільної послідовності* $t \in l^2_\infty(B)$ *єдиний розв'язок* $u \in l^2_\infty(B)$. *Тоді рівняння*

$$\widetilde{u}_{n,m} = -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} A_{k,j}\widetilde{u}_{n-k,m-j} + \widetilde{t}_{n,m}, \ (n, m) \in \mathbb{Z}^2$$

має єдиний (p, q)*-періодичний розв'язок* $\widetilde{u} = \{\widetilde{u}_{n,m}: \ n \in \mathbb{Z}, \ m \in \mathbb{Z}\}$, *а також для єдиного розв'язку* u *системи* (1), *що відповідає* t, *виконується співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\|u_{n,m} - \widetilde{u}_{n,m}\| = 0.$$

Для доведення даної теореми використовується твердження із [1]. Умови, при яких система (1) має для довільної обмеженої послідовності t єдиний обмежений розв'язок u, наведено в [2].

1. Бойко М. Я. Періодичні розв'язки різницевого рівняння, що залежить від двох індексів. Нелінійні коливання, 2010, 13, № 1, С. 9–14.
2. Городній М. Ф., Лукаш К. В. Про властивості розв'язків двопараметричної дискретної системи Вольтерра. Доповіді Національної академії наук, 2009, № 2, С. 7–10.

Некоторые алгоритмы решения уравнений типа Урысона

В. А. Лукьяненко
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Украина
art-inf@mail.ru

Рассматриваемые в работе нелинейные интегральные уравнения типа Урысона возникли при моделировании реальных задач дистанционного зондирования поверхности и восстановления изображения объекта по результатам косвенных измерений [1]:

$$\int\limits_S a_k(s, z(s), z'(s))n(t - \tau_k(z(s)))ds = u_k(t), \quad c \leq t \leq d, \tag{1}$$

Задача является актуальной и для других областей.

В зависимости от априорной информации о решении получены различные алгоритмы. Априорная информация выделяет классы, на которых строятся устойчивые регуляризирующие алгоритмы решения [2, 3].

Рассмотрены классы монотонных функций, кусочно-монотонных, кусочно-линейных, выпуклых и др. В качестве самостоятельной выделяется задача о поиске экстремальных точек искомого решения. Здесь учитывается дельта-образность ядра, что позволяет применять асимптотические методы (Лапласа, перевала). Модельными являются примеры с ядром $n(t)$ в виде дельтообразной или дельта-функции:

$$\int_a^b a(s)n(t - z(s))ds = u(t), \quad c \le t \le d, \tag{2}$$

которые позволяют выявлять вклад особых точек в правую часть уравнения и применять в итерационных алгоритмах. Для решения (1)–(2) применяются интегральные преобразования (Фурье и вейвлет-преобразование), а также методы, использующие замену исходного оператора близким. В некоторых алгоритмах применяется эквивалентное (2) уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(s)exp^{i\xi z(s)}ds = U_1(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $U_1(\xi) = U(\xi) \cdot N^{-1}(\xi), N(\xi) \neq 0, U(\xi), N(\xi)$ — преобразования правой части и ядра уравнения, а также регуляризованные интегро-дифференциальные уравнения.

В случае финитной функции $a(s)$ интеграл в (3) будет изменяться на конечном промежутке. Для определения $z(s)$ используется регуляризованная система таких уравнений с различными функциями $a(s)$ и правыми частями, заданными в дискретных точках.

1. Радиолокационные методы исследования Земли/ [Ю. А. Мельник, С. Г. Зубкевич, В. Д. Степаненко и др.]— М.: Советское радио, 1980. – 264 с.
2. Lukianenko V. A., Kozlova M. G., Hazova U. A. Some tasks for integral equation of Urison's type // Integral equations–2010. — Lviv: PAIS, 2010. — P. 80–84.
3. Лукьяненко В. А., Хазова Ю. А. Восстановление решения нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений типа Урысона // Системный анализ, управление и навигация, Евпатория, 3–10 июля 2011. — С. 139–140.

Применение метода Крылова–Боголюбова для анализа неустойчивости нелинейной системы двух осцилляторов

Н. А. Люлько

Новосибирский госуниверситет, ИМ СОРАН, Новосибирск, Россия

natlyl@mail.ru

В [1] построена математическая модель водонефтяных газосодержащих систем. Показано, что при периодических внешних возмущениях в линеаризованной распределенной системе возникает параметрический резонанс, приводящий к разрушению всей системы. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [1], по изучению неустойчивости нелинейной модели газосодержащих слоистых систем относительно внешних периодических возмущений малой амплитуды. Для упрощенной нелинейной задачи рассматриваются вопросы возникновения параметрического резонанса и характера неустойчивости соответствующих решений; как в случае резонанса находить амплитуду колебаний, способных разрушить слоистую систему. В данной работе исследуется задача Коши для нелинейной системы двух осцилляторов

$$(\frac{d^2}{dt^2} + \sigma_1^2)u = f, \tag{1}$$

$$(\frac{d^2}{dt^2}+\sigma_2^2)f = q((\frac{d^2}{dt^2}+\omega_1^2)u^2+\varepsilon(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_2^2)(usin(\omega t))),$$

являющейся модельной для нелинейной системы в [1]. Здесь $q>0$ — малый физический параметр, параметр $\varepsilon>0$ — амплитуда внешнего возмущения, $\omega>0$ — частота внешнего возмущения, положительные числа σ_1, σ_2, ω_1, ω_2 — положительные параметры модели.

Цель работы — исследование характера неустойчивости нулевого решения системы (1) при $\omega=2\sigma_1$ (основной резонанс) и при $\omega=\sigma_1+\sigma_2$ (комбинационный резонанс) для малых значений параметра q в зависимости от значений ε. Система (1) не является ни гамильтоновой (при записи в переменных u, f, $\dot{u}$, $\dot{f}$), ни системой слабо связанных осцилляторов, наиболее часто исследуемых. Поэтому основным подходом при решении рассматриваемой задачи является применение метода усреднения Крылова – Боголюбова к системе (1) и анализ усредненной автономной системы следующего вида:

$$\frac{d\Psi}{dt}=q\varepsilon B(\omega)\Psi+q^2(\frac{\varepsilon^2}{i}D\Psi+\frac{S_3(\Psi)}{i}), \tag{2}$$

где $B(\omega)$, D — постоянные матрицы, $S_3(\Psi)$ — однородный полином третьей степени относительно вектора $\Psi\in C^4$. Для системы (2) удается найти два независимых интеграла (для каждого резонанса), позволяющих исследовать поведение ее траекторий в целом при всех значениях q, ε и определить максимальную амплитуду колебаний решений системы (2), а, следовательно, и системы (1). В терминах параметров q, ε найдена область неустойчивости системы (2) при $\omega=2\sigma_1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 15 и Междисциплинарного Интеграционного проекта СОРАН № 30.

1. Белоносов В. С., Доровский В. Н., Белоносов А. С., Доровский С. В. Гидродинамика газосодержащих слоистых систем. Успехи механики. 2005. Т.3. № 2. С. 37–70.

Про розривні коливання в двовимірних імпульсних системах

К. Ю. Мамса[1], Ю. М. Перестюк[2]
[1]Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка
EkaterinaMamsa@gmail.com, Perestyuk@gmail.com

Досліджується питання існування одно- і двоімпульсних циклів двовимірної системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\dot{x}=\lambda_1 x+\epsilon f(x,y), \quad \dot{y}=\lambda_2 y+\epsilon g(x,y), \quad y\neq kx$$

$$\Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Bigg|_{y=kx}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Встановлено, що в лінійній системі (при $\epsilon=0$) цикли з'являються, якщо

$$\gamma\equiv(1+b_{11}+b_{12}k)\left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}}=\pm1,$$

де

$$\mu = \frac{k(1+b_{22})+b_{21}}{1+b_{11}+kb_{12}}.$$

При $\epsilon \neq 0$ в нелінійній системі нулі функції

$$F(x^0) = \frac{1}{\mu x^0} \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{\mu}{k}} \left[\mu\lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f\left(e^{\lambda_1 s}x^0, e^{\lambda_2 s}\mu x^0\right) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g\left(e^{\lambda_1 s}x^0, e^{\lambda_2 S}\mu x^0\right)\right] ds.$$

за певних умов породжують ізольовані одноімпульсні цикли.

Досліджуються умови існування двоімпульсних ізольованих циклів, а також їх стійкість.

Як приклад досліджуються коливання в нелінійному імпульсному рівнянні

$$\ddot{x} - x = \epsilon\dot{x}(1-x^2), \quad \dot{x} \neq ax \quad \Delta\dot{x}\Big|_{\dot{x}=ax} = -2\dot{x}.$$

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 502 с.
2. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
3. Mamsa K., Perestyuk Y. A certain class of discontinuous dynamical systems in the plane. Math. Anal. – Different. Equat. and their Appl. – Sofia. 2011. 121–128 p.

Дослідження крайової задачі Гурса–Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу

В. В. Маринець

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

vasyl-marynets@rambler.ru

В $\mathbb{R}^2$ розглядається область $D \bigcup\limits_s D_s$, $s = 1, 2, 3$, де

$$D_1 = \{(x,y)|x \in (x_0,x_1], y \in (y_0,y_1]\}, D_2 = \{(x,y)|x \in [x_0,x_1], y \in (y_1, g_1(x))\},$$
$$D_3 = \{(x,y)|x \in (x_0,x_2], y \in (g_2(x),y_1]\},$$

а $x_0 < x_1 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$, $y = g_r(x)$ $(x = k_r(y))$, $x \in [x_{r-1}, x_r]$, $r = 1, 2$ — ”вільні” криві [1], причому $g_1(x_{r-1}) = y_r$, $g_2(x_r) = y_{r-1}$, $g'_r(x) > 0$.

Досліджується задача: в просторі вектор-функцій $C^*(\overline{D}) := C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$ знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$U_{xy}(x,y) + A_1(x,y)U_x(x,y) + A_2(x,y)U_y(x,y) = f(x,y,U(x,y)) := f[U(x,y)], \qquad (1)$$

$$f : \overline{B} \to \mathbb{R}^2, \overline{B} \subset \mathbb{R}^{n+2},$$

який задовольняє крайові умови

$$U(x_0,y) = \Psi(y), U(x,y_0) = \Phi(x), (x,y) \in \overline{D}_1, \qquad (2)$$

$$\Psi(y) \in C^1[y_0,y_1], \Phi(x) \in C^1[x_0,x_1], \Psi(y_0) = \Phi(x_0),$$

$$U(x, g_r(x)) = \Omega_r(x), x \in [x_{r-1}, x_r], \Omega_r(x) \in C^1[x_{r-1}, x_r], r = 1, 2, \qquad (3)$$
$$\Omega_1(x_0) = \Psi(y_1), \Omega_2(x_1) = \Phi(x_1),$$

де $U(x,y) := (u_i(x,y))$, $f[U(x,y)] := (f_i[U(x,y)])$, $i = 1,2$ —вектор-функції, $A_r(x,y) := (\delta_{i,j} a^r_{i,j}(x,y))$, $r = 1,2$, $j = \overline{1,n}$ — задані функціональні матриці, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $\Psi(y) := (\psi_i(y))$, $\Phi(x) := (\phi_i(x))$, $\Omega_r(x) := (\omega_{i,r}(x))$ — задані вектор-функції.

Якщо $A_1(x,y) \in C(D) \cap C^{(0.1)}(D_1 \cup D_3)$, $A_2(x,y) \in C(D) \cap C^{(0.1)}(D_1 \cup D_2)$, а $f[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ (див. [2]), пропонується один підхід побудови модифікації двостороннього методу прискореної збіжності наближеного інтегрування крайової задачі (1)–(3), встановлюються достатні умови існування, єдиності, та знакосталості регулярного або іррегулярного її розв'язку, доводяться теореми про диференціальні нерівності і порівняння.

1. L. Collatz. Functional analysis und numeriche mathematik. – Berlin–Gӧttingen–Heidelberg: Springler–Verlag, 1964.
2. Marynets V. V., Dobryden A. V. About one characteristic initial value problem // Nonlinear Oscillations. – 2001. – Vol. 4, № 4. – P. 487–499.

Еволюційні рівняння з операторами узагальненого диференціювання в просторах типу S

О. В. Мартинюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

alfaolga@rambler.ru

Досліджена задача Коші та двоточкова задача для рівнянь вигляду

$$u'(t) = P(t, A)u(t), \quad t \in (0, T], \qquad (1)$$

де $P(t, \lambda)$ — поліном змінної λ при фіксованому t, A — оператор узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва [1], який діє в просторах типу S, введених І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим в [2]. Доведено, що в просторах

$$S^{m_n}_{l_k} := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le cA^k B^n l_k m_n\}, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

за певних обмежень на послідовності $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ оператор A визначений коректно, є лінійним і неперервним, відображає простір $S^{m_n}_{l_k}$ в себе. Зауважимо, що оператори узагальненого диференціювання введені в середині 20 століття при вивченні питання про зображення лінійних неперервних відображень у вигляді диференціальних операторів скінченного або нескінченного порядків. Властивості таких операторів досліджували і продовжують досліджувати математики в просторі A_∞ однозначних і цілих в $\mathbb{C}$ функцій з топологією компактної збіжності (простір A_∞ не є нормованим простором, але в той же час A_∞ — простір Фреше).

Простори типу S є прикладами просторів з іншою топологією, які використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші та багатоточкових задач для рівнянь з частинними похідними зі сталими (або залежними лише від часової змінної) коефіцієнтами. Зазначимо, що клас рівнянь (1) охоплює і рівняння з виродженнями, оскільки до операторів узагальненого диференціювання відносяться, наприклад, і оператори вигляду [1]

$$A = \sum_{k=m}^{mp} C_k x^{k-m} d^k/dx^k, \quad \{m, p\} \subset \mathbb{N}, p > 1, x \in \mathbb{R}.$$

Встановлена коректна розв'язність задачі Коші та нелокальної двоточкової за часом задачі для рівняння (1) в просторах типу S та S'; при цьому доведено, що в просторах типу S визначені, є лінійними і неперервними оператори e^A, $e^{P(t,A)}$, які трактуються як оператори узагальненого диференціювання нескінченного порядку.

1. Леонтьев А. Ф. Обобщения рядов экспонент. – М.: Наука, 1981.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958.

О предельных теоремах для одномерных краевых задач

В. А. Михайлец

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

mikhailets@imath.kiev.ua

В докладе планируется дать обзор имеющихся результатов по предельным теоремам для решений и матриц Грина краевых задач для линейных систем ОДУ первого порядка на конечном интервале. Основное внимание уделяется общим, а также тотальным на некотором пространстве Соболева W_p^n, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$ краевым условиям, которые могут содержать производные решения порядка $\leq n$. Анализируется равномерная сходимость решений и сходимость их по соболевским нормам; для матриц Грина — равномерная сходимость на квадрате и сходимость там же в среднем порядка $q = p/(p-1)$. Формулировки предлагаемых результатов и литературные ссылки приведены в работах [1, 2, 3].

1. В. А. Михайлец, Н. В. Рева. Обобщение теоремы Кигурадзе о корректности линейных краевых задач, Доп. НАН України, 2008, № 9, 23–27.
2. Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец, Н. В. Рева. Предельные теоремы для одномерных краевых задач, Укр. мат. журн., 2013, **65**, № 1, 70–81.
3. T. Kodliuk, V. Mikhailets. Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces, J. Math. Sci., 2013, **190**, no. 4, 589–599.

Пример неклассической бифуркации в системе с разрывной правой частью Филипповского типа

Ю. В. Морозов

ИПУ РАН, Москва, Россия

tot1983@inbox.ru

В работе рассматривается двумерная система с разрывной правой частью Филипповского типа, которая описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -(u - \frac{c}{(1-c|x|)^2})\mathrm{SIG}(S_\mu(x,y)),\ S_\mu(x,y) = y + a(\mu)(x^3 - b(\mu)x), a, b > 0, \qquad (1)$$

где $(x, y)^{\mathrm{T}} \in (-1/c, 1/c) \times R$, параметр $c = u/2$, $u = 0.2$. Через SIG обозначена знаковая функция доопределенная в 0 интервалом значений $[-1; 1]$. Такой выбор коэффициентов неслучаен, а обусловлен тем фактом, что данная система является упрощенным вариантом системы дифференциальных уравнений, которая описывает движение колесного робота.

Обычно под классической задачей в теории бифуркаций понимается исследование структурных изменений фазового портрета системы дифференциальных уравнений от параметра μ, причем предполагается, что правая часть системы непрерывно зависит от этого параметра, а также является дифференцируемой по этому параметру необходимое число раз.

Систему (1) можно рассматривать как систему с двумя бифуркационными параметрами (u, μ). Одной из первых работ, в которой рассматривается такой тип бифуркаций является [1], однако в этой работе авторы не предпринимают попытки отделить данный класс задач от классической теории бифуркаций, а рассматривают их как примеры. В [2] делается попытка обобщить классическую теорию бифуркаций является. Введенное в этой работе определение особой точки, позволяет найти все 5 особых точек данной системы не прибегая к дополнительному исследованию правых частей и поверхности разрыва, которая в нашем случае задается гиперболой.

Пусть параметр $a(\mu) = x_u^2 \neq f(\mu)$, а $b(\mu) = y_\mu/x_\mu/(x_u^2 - x_\mu^2)$, где $x_\mu = 1/c - (1+\mu)/u$, $y_\mu = \{y^* : S_\mu(x_\mu, y^*) = 0\}$, $x_u = 1/c(1 - \sqrt{c/u})$; т.о. параметр μ можно рассматривать как бифуркационный для системы (1). Такое нелинейное преобразование $\mu \to \mu$ позволяет совместить максимумы и точки пересечения оси Ox кривой переключения $S_\mu(x, y) = 0$ с кривой $S_\mu(x, y) = \frac{ux}{1+\mu} - (\frac{c}{(1-c|x|)} - 1)\mathrm{SIG}(x) + y|y|/2 = 0$. Легко проверить, что $S_\mu(x, y)|_{\mu=0} = 0$ отвечает за оптимальные переключения управления из диапазона $\{-1, +1\}$, позволяющего привести систему (1) максимально быстро в точку $(0, 0)$ из некоторой области — области притяжения.

Пусть μ^* —критическое значение параметра μ при котором две пары точек сливаются в одну, и у системы становится только 3 особых точки, при этом сепаратриссы сшитых вырожденных седло-узлов $(\pm x_u, 0)$ [1] образуют неустойчивый цикл, охватывающий устойчивый вырожденный узел в точке $(0, 0)$. Внутренность области, которую охватывает неустойчивый цикл, является областью притяжения для любой траектории с начальным условием внутри этой области за исключением точек $(\pm x_u, 0)$.

1. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990, 488 с.
2. Bernardo M. Di., Pagano DJ, Ponce E. Nonhyperbolic boundary equilibrium bifurcations in planar Filippov systems: a case study approach // International Journal of Bifurcation and Chaos 18 (05), 1377–1392.

О построении общей функции Ляпунова для семейства механических систем с несколькими степенями свободы

И. Е. Мурзинов
Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
murz42@gmail.com

Исследование устойчивости систем с переключениями является одной из актуальных задач современной теории управления. Система с переключениями представляет собой гибридную динамическую систему, состоящую из семейства подсистем и закона переключения, определяющего в каждый момент времени, какая подсистема является активной. Во многих случаях необходимо проверить, является ли система устойчивой либо диссипативной при произвольных переключениях. Такие задачи возникают естественным образом, если закон переключения неизвестен либо слишком сложен для того, чтобы использовать его точное представление.

В настоящем докладе рассмотрено семейтво нелинейных механических систем с несколькими степенями свободы и переключениями, происходящими в диссипативных и потенциальных силах:

$$\ddot{q} = -\frac{\partial F_s(q)}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial G_s(q)}{\partial q}, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{1}$$

Здесь q и $\dot{q}$Ё— n-мерные векторы обобщенных координат и скоростей соответственно; $F_s(q)$ — непрерывно дифференцируемые при $q \in R^n$ однородные порядка $\alpha > 0$ векторные функции, удовлетворяющие оценкам $\dot{q}^T \dfrac{\partial F_s}{\partial q}\dot{q} \geqslant \underline{f}_s\|\dot{q}\|^2\|q\|^\alpha$, $\underline{f}_s > 0$; $G_s(q)$ — непрерывно дифференцируемые при $q \in R^n$ положительно определенные однородные порядка $\beta + 1$ функции, $\beta > 1$.

Каждая подсистема семейства (1) представляет собой векторное уравнение Льенара и имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $\dot{q} = q = 0$. Для семейства (1) строится общая функция Ляпунова специального вида. Последовательно рассмотрены варианты, когда переключения происходят только в потенциальных силах, только в диссипативных силах, а затем и в тех и других. Определяются условия, при выполнении которых параметры функции Ляпунова можно выбрать так, чтобы для этой функции и её производных в силу каждой подсистемы рассматриваемого семейства выполнялись требования теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Для систем с одной степенью свободы такая задача решалась в работах [1] и [2]. В настоящем докладе получены условия существования общей функции Ляпунова для семейства (1) с произвольным числом степеней свободы. Эти условия гарантируют асимптотическую устойчивость положения равновесия $\dot{q} = q = 0$ соответствующей гибридной системы при любом законе переключения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (НИР № 9.38.674.2013) и РФФИ (грант № 13-01-00376).

1. С. Н. Васильев, А. А. Косов. Общие функции Ляпунова и вектор-функции сравнения Матросова в анализе гибридных систем. Труды X Международной Четаевскй Конференции. Казань, 12–16 июня 2012 г., том 2, секция 2, с. 162–176.
2. A. Yu. Aleksandrov, I. E. Murzinov. On the Existence of a Common Lyapunov Function for a Family of Nonlinear Mechanical Systems with One Degree of Freedom. Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2012, vol. 12, N 2, pp. 137–143.

Периодические по многомерному времени решения линейных гамильтоновых систем D-уравнений и их устойчивость

А. А. Мухамбетова, Ж. А. Сартабанов
Актюбинский государственный педагогический институт, Актобе, Казахстан
amina-15@mail.ru

Пусть $D_a = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle a(\tau, t), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ — оператор дифференцирования функции $x(\tau, t)$ от многомерного времени $(\tau, t) = (\tau, t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R \times R^m$, где $R = (-\infty, +\infty)$, $a = (a_1, ..., a_m)$, $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m}\right)$, $\langle , \rangle$ — знак скалярного произведения векторов.

Рассмотрим линейную гамильтоновую систему

$$D_a x = JP(\tau, t)x \tag{1}$$

с симплексной единицей

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

где E — единичная n-матрица, O — нулевая матрица, $P(\tau,t) = [p_{jk}(\tau,t)] = [p_{kj}(\tau,t)] = P^T(\tau,t) - 2n$ — матрица, $x = (x_1, ..., x_{2n})$ искомая вектор-функция.

Предположим, что $a(\tau,t)$ и $P(\tau,t)$ обладают свойствами гладкости $C^{(0,1)}_{\tau,t}$ и (θ,ω) — периодичности вида

$$a(\tau+\theta, t+q\omega) = a(\tau,t) \in C^{(0,1)}_{\tau,t}(R \times R^m), q \in Z^m, \tag{2}$$

$$P(\tau+\theta, t+q\omega) = P(\tau,t) \in C^{(0,1)}_{\tau,t}(R \times R^m), q \in Z^m, \tag{3}$$

где $q = (q_1, ..., q_m)$ изменяется во множестве Z^m целочисленных векторов, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ — вектор-период с рационально несоизмеримыми компонентами $\omega_1, ..., \omega_m$ вместе с периодом $\omega_0 = \theta$.

Доказывается, что при условиях (2) и (3) характеристический многочлен

$$h(\rho) \equiv det\,[\rho E - X(\theta,\sigma)]$$

является возвратным: $\rho^{2n} h\left(\frac{1}{\rho}\right) = h(\rho)$, где $\sigma = \varphi(0,\tau,t)$ — интеграл уравнения $\frac{dt}{d\tau} = a(\tau,t)$ с характеристикой $t = \varphi(\tau,s,\sigma)\big|_{\tau=s} = \sigma,\ X(\tau,t)$ — матрицант системы (1).

Предполагается также, что кратности k_j корней $\rho_j(\sigma)$ многочлена $h(\rho)$ не зависят от σ, причем удовлетворяют условию: либо $|\rho_j(\sigma)| < 1$, либо $|\rho_j(\sigma)| = 1$, либо $|\rho_j(\sigma)| > 1$, $j = \overline{1,l},\ k_1 + ... + k_l = n$.

При выполнении этих условий на основе [1-3] доказывается основной результат, что мультипликаторы $\rho_j(\sigma)$ обладают свойствами гладкости и ω-периодичности, причем система (1) устойчива тогда и только тогда, когда $|\rho_j(\sigma)| = 1$ и их элементарные делители простые.

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967.
2. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочисленных колебаний. – Москва: Наука, 1987.
3. Мухамбетова А. А., Сартабанов Ж. А. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. Монография, Актобе, 2007, 168 с.

Периодические решения в параболической задаче с преобразованием сдвига пространственной переменной

А. Я. Негримовская

Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, Україна

Anastasiya.neg@gmail.com

На окружности $S^1 = \frac{R}{2\pi Z}$ рассматривается уравнение

$$\frac{du}{dt} + u = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + K(1 + \gamma \cos Qu), \tag{1}$$

где $\mu > 0$, $K > 0$, $0 < \gamma < 1$, $Qu(\theta,t) = u(\theta+h,t)$.

Рассматривается задача о бифуркации рождения периодического решения типа бегущей волны из пространственного однородного стационарного состояния $W = W(K)$, т.е. решения

$$\omega = K(1 + \gamma \cos \omega), \quad 1 + K\gamma \sin \omega(K) \neq 0. \tag{2}$$

Спектр устойчивости $\omega(K)$ состоит из собственных значений

$$\lambda_m = -1 - \mu m^2 + \Lambda(K) e^{imh}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $\Lambda(K) = -K\gamma \sin \omega(K)$.

Обозначим $\mu^* = -\Lambda\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 > 0$,

$$\sigma_2(z, \bar{z}, \theta) = -\frac{1}{2}(\operatorname{ctg} \bar{w}) \left(\frac{z^2 e^{i2k^*(\theta+h)}}{2\lambda_{k^*} - \lambda_{2k^*}} + \frac{2z\bar{z}}{\lambda_{k^*} + \bar{\lambda}_{k^*} - \lambda_0} + \frac{\bar{z}^2 e^{-2ik^*(\theta+h)}}{2\bar{\lambda}_{k^*} - \lambda_{-2k^*}} \right),$$

$$\sigma_3(z, \bar{z}, \theta) = \frac{1}{3!}\Lambda z^3 e^{i3k^*(\theta+h)} \cdot \frac{1}{3\lambda_{k^*} - \lambda_{3k^*}} +$$

$$+\frac{2}{4}(\operatorname{ctg} w)^2 \Lambda^2 \cdot \left(\frac{z^3 e^{i3k^*(\theta+2h)}}{3\lambda_{k^*} - \lambda_{3k^*}} + \frac{\bar{z}^3 e^{-i3k^*(\theta+2h)}}{3\bar{\lambda}_{k^*} - \bar{\lambda}_{3k^*}} \right) + \frac{\frac{1}{3!}\Lambda \bar{z}^3 e^{-i3k^*(\theta+h)}}{3\bar{\lambda}_{k^*} - \bar{\lambda}_{3k^*}},$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\Lambda e^{ik^*h} + \frac{2}{4}(ctg\omega)^2 \Lambda^2 \left(2 \cdot \frac{e^{2ik^*h}}{\lambda_{k^*} + \bar{\lambda}_{k^*} - \lambda_0} + \frac{e^{2ik^*h}}{2\lambda_{k^*} + \bar{\lambda}_{2k^*}} \right).$$

Теорема. *Если* $h = \frac{2\pi}{3}$, $\Lambda(k) < -\frac{2}{\sqrt{3}}$, *то при* $0 < \mu^* - \mu < \sigma$ *существуют два периодических решения* (1)

$$u^{\pm} = \varphi(\omega(\mu)t \pm \theta, \mu),$$

где

$$\varphi(\omega(\mu)t + \theta, \mu) = \left(z e^{i\theta} + \bar{z}^{-i\theta} + \sigma_2(z, \mu) + O(|\mu^* - \mu|)^2 \right)\Big|_{z(t,\mu) = \left(-\frac{Re\lambda_1(\mu)}{ReC_3(\mu)}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\omega(\mu)t}}$$

где

$$\omega(\mu) = Im\left(\lambda_1 + c_1 \cdot \frac{\operatorname{Re} \lambda_1}{-\operatorname{Re} c_3} \right).$$

1. Белан Е. П. О бифуркации бегущих волн в сингулярно возмущенной параболической задаче с преобразованным агрументом // Динамические системы. — Симферополь: «КФТ» 2001. — Вып. 17 — С. 179–184.

Про одну задачу для інтегро-диференціального рівняння

О. Б. Нестеренко

Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна

Olga_kiev@mail.ru

На прикладі конкретної задачі для інтегро-диференціального рівняння з параметром проілюстровано положення теоретичних викладків [1].

Встановлюються умови існування розв'язку задачі

$$\begin{gathered} x''(t) + px(t) = f(t) + \lambda\cos\frac{t}{2} + \varepsilon\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(t+s)|x(s)|ds, \\ x(-\pi) = x(\pi) = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos\frac{t}{2}dt = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Використавши допоміжну задачу

$$x''(t) = \lambda\cos\frac{t}{2} + y(t), \quad x(-\pi) = x(\pi) = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos\frac{t}{2}dt = 0, \tag{2}$$

задача (1) зводиться до рівносильного інтегрального рівняння.

Розв'язок задачі (2) має вигляд

$$\begin{gathered} x(t) = \tfrac{t+\pi}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\pi - s)y(s)ds - \tfrac{4}{\pi}\cos\tfrac{t}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} y(s)\cos\tfrac{s}{2}ds + \int\limits_{-\pi}^{\pi}(t-s)y(s)ds, \\ \lambda = -\tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} y(s)\cos\tfrac{s}{2}ds. \end{gathered} \tag{3}$$

Ввівши позначення

$$\Gamma(s) = -\frac{1}{\pi}\cos\frac{s}{2}, G(t,s) = -\frac{4}{\pi}\cos\frac{t}{2}\cos\frac{s}{2} + \frac{1}{2\pi}\begin{cases} (t+\pi)(s-\pi), & t \le s, \\ (t-\pi)(s+\pi), & t \ge s, \end{cases} \tag{4}$$

розв'язок (3) задачі (2) приймає вигляд

$$x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} G(t,s)y(s)ds, \quad \lambda = \int_{-\pi}^{\pi}\Gamma(s)y(s)ds,$$

тобто вигляд (10), (11) із [1], в яких $h(t) = 0$, $\sigma = 0$, а ядра $G(t,s)$, $\Gamma(s)$ визначаються за формулами (4).

Обгрунтовується, що задача (1) рівносильна інтегральному рівнянню

$$y(t) = f(t) - p\int_{-\pi}^{\pi} G(t,s)y(s)ds + \varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t+\zeta)\left|\int_{-\pi}^{\pi} G(\zeta,s)y(s)ds\right|d\zeta.$$

1. А. Ю. Лучка, О. Б. Нестеренко. Методи розв'язування крайових задач для слабконелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з параметрами і обмеженнями. Укр. мат. журн., 2009, Т. 61, № 5, С. 672–679.

Асимптотическое интегрирование одного класса систем функционально-дифференциальных уравнений и метод усреднения

П. Н. Нестеров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

nesterov.pn@gmail.com

В докладе рассматривается задача асимптотического интегрирования некоторого класса систем функционально-дифференциальных уравнений, содержащих колебательно убывающие функции в качестве коэффициентов. Исследуемый класс систем включает, в частности, системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием вида

$$\dot{x} = v(t)A(t)x(t-h), \qquad x \in \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Здесь $(n \times n)$-матрица $A(t)$ является или T-периодической или состоит из тригонометрических многочленов. Скалярная функция $v(t)$ абсолютно непрерывна на интервале $[t_0, \infty)$ и обладает следующими свойствами:

1^0. $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$;
2^0. $\dot{v}(t) \in L_1[t_0, \infty)$;
3^0. $v^{k+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Предлагаемый метод асимптотического интегрирования позволяет привести систему вида (1) к усредненной форме

$$\dot{y} = \big[A_1 v(t) + A_2 v^2(t) + \ldots + A_k v^k(t)\big]y + R(t, y_t), \quad y_t(\theta) = y(t+\theta),\ -(k+1)h \le \theta \le 0. \tag{2}$$

В этой системе матрицы $A_1, \ldots, A_k$ постоянны, а $R(t, \cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h} \equiv C\big([-(k+1)h, 0], \mathbb{C}^n\big)$ непрерывных на отрезке $[-(k+1)h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^n$ в пространство $\mathbb{C}^n$. Кроме того, существует скалярная функция $\gamma(t) \in L_1[t_0 + kh, \infty)$ такая, что $|R(t, \varphi)| \le \gamma(t)\|\varphi\|$ для любой $\varphi \in C_{(k+1)h}$ при $t \ge t_0 + kh$ ($\|\varphi\| = \sup_{-(k+1)h \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$). В ходе преобразования системы (1) к виду (2) используется идеология усредняющих замен переменных, изложенная в работе [1] применительно к системам ОДУ. Система (2) проще исходной системы (1) в том смысле, что она в своей главной части является системой ОДУ и, кроме того, не содержит в главной части осциллирующих величин. Для построения асимптотики решений системы (2) используются затем результаты, полученные в статье [2].

Данная методика иллюстрируется на примере задачи построения асимптотических формул при $t \to \infty$ для решений уравнения с запаздыванием

$$\ddot{x} + x + \frac{a \sin \lambda t}{t^\rho} x(t-h) = 0,$$

где $a, \lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$, $\rho > 0$ и $h > 0$ (см. [3]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-01-31004, а также гранта Президента Российской Федерации (договор № 14.124.13.80-МК).

1. Нестеров П. Н. Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами. Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 731–742.
2. Cassel J. S., Hou Z. Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation. J. Lond. Math. Soc. 1993. V. 47. P. 473–483.

3. Nesterov P. Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients. Monatshefte für Mathematik. DOI: 10.1007/s00605-012-0437-2 (в печати).

Суперінтегровні та суперсиметричні системи рівнянь Шродінгера

А. Г. Нікітін

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Досліджуються суперінтегровні та суперсиметричні системи зачеплених рівнянь Шродінгера. Знайдено усі нееквівалентні суперпотенціали для систем двох рівнянь, що мають властивість форм-інваріантності, і побудовано інтеграли руху першого порядку для таких систем.

Форм-інваріантність надає можливість проінтегрувати систему, що володіє цією властивістю, тобто знайти власні значення гамільтоніана та відповідні власні вектори. Суперінтегровність системи з N степенями вільності означає існування n інтегралів руху при $n > N$. Якщо $n = 2N - 1$, система називається максимально суперінтегровною. Для скалярного рівняння Шродінгера суперінтегровність є наслідком форм-інваріантності і навпаки, форм-інваріантність випливає з максимальної суперінтегровності.

Знайдені нами системи зберігають ці властивості скалярного рівняння Шродінгера, що дозволило нам побудувати їх точні розв'язки. Отримана класифікація суперінтегровних і суперсиметричних систем є повною, тобто знайдені усі нееквівалентні системи для випадку двох просторових змінних. У випадку трьох просторових змінних отримано повний опис таких систем при додатковому припущенні про їх інваріантність відносно групи обертань.

Основні результати, що будуть доповідатись, опубліковані у наступних роботах:

1. A. G. Nikitin and Yuri Karadzhov. Matrix superpotentials. J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 305204, (21 p).
2. A. G. Nikitin. Matrix superpotentials and superintegrable systems for arbitrary spin. J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 225205, (13 p).
3. A. G. Nikitin. New exactly solvable systems with Fock symmetry. J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 485204, (9 pp).
4. A. G. Nikitin. Integrability and supersymmetry of Schrodinger-Pauli equations for neutral particles. J. Math. Phys. 53, 122103 (2012), (14 p).
5. A. G. Nikitin. Superintegrable systems with spin invariant w.r.t. rotation group. arXiv preprint arXiv: 1303.1297 (Прийнято до друку у J. Phys. A: Math. Theor.)

О глобальных решениях линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с ограниченным последействием

О. Д. Нуржанов

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан

nurjanov@list.ru

Вопросы существования глобальных решений (продолжимых на всю ось $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$) дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и интегро-дифференциальных уравнений с последействием были изучены во многих работах, в частности в работах [1-3].

В данной работе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с ограниченным последействием вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \int\limits_{t-\lambda}^{t} B(t,s)x(s)ds + f(t), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}; A(t), B(t,s)$ — n-мерные матрицы, $f(t)$ — n-мерная векторная функция, определенные и непрерывные для $t \in \mathbb{R}$, λ — действительная постоянная. Как и в работе [2], вопрос существования глобальных решений системы (1) разрешается при помощи задачи построения для уравнения (1) дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = C(t)x + g(t), \tag{2}$$

все решения которого являлись бы глобальными решениями уравнения (1). Будем предполагать, что n-мерная матрица $C(t)$ и n-мерная вектор-функция $g(t)$ определены и непрерывны для всех $t \in \mathbb{R}$.

В данной работе найдены для $C(t)$ и $g(t)$ уравнения вида

$$C(t) = A(t) + \int\limits_{t-\lambda}^{t} B(t,s)\Omega_t^s(C)ds, \tag{3}$$

$$g(t) = f(t) + \int\limits_{t-\lambda}^{t} B(t,s) \int\limits_{t}^{s} \Omega_\theta^s(C)g(\theta)d\theta ds \tag{4}$$

и получены условия существования глобальных решений уравнений (3), (4). Здесь $\Omega_\tau^t(C)$ — матрицант линейной однородной системы, соответствующей системе (2).

1. Рябов Ю. А. Главные двусторонние решения линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием. Укр. мат. журн., 1987, 39, 1, С. 92–97.
2. Самойленко А. М. Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Укр. мат. журн., 2003, 55, 5, С. 631–640.
3. Ntouyas S. K., Tsamatos P. Ch. Global existence for semilinear evolution integrodifferential equations with delay and nonlocal conditions. App. Anal., 1997, 64, 1,2, P. 99–105.

О собственных векторах одного класса систем уравнений типа Лакса

Е. В. Олейник

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина, Харьков, Украина

elenaoliynik@gmail.com

Исследуем разрешимость системы условий сплетаемости [1] в случае, когда $\dim E = 3$, $a(x) \geq 0$, $a(x)$ имеет простой спектр, $J = I$, а α_x — вещественная, ограниченная, неубывающая функция на $[0,l]$ $(0 < l < \infty)$, $\alpha_x = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma'(x) = i\left[a(x), \sigma_2\right]; \\ \left[a(x), \gamma(x)\right] = 0, \ \gamma(0) = \gamma^+. \end{array} \right. \tag{1}$$

Выберем базис h_x^k так, чтобы $a(x)h_x^k = \mu_x^k h_x^k$, где μ_x^k — собственные значения матрицы $a(x)$ и $\mu_x^k = \mu_x^s (k \neq s)$, ξ^k — собственные значения оператора $\gamma(x)$, а $\left\langle \sigma_2 h_x^k, h_x^s \right\rangle = \beta_{sk}(x)$, приходим к выражению $(h_x^k)' = i \sum\limits_{s=1}^{n} \beta_{sk}(x) \dfrac{\mu_x^s - \mu_x^k}{\xi^k - \xi^s} h_x^s$, $(1 \leq k, s \leq n)$.

Пусть оператор σ_2 действует на базисные вектора $\left\{h_x^k\right\}_1^3$ так:

$$\begin{cases} \sigma_2 h_x^1 = \psi(x) h_x^1 + \mu(x) h_x^3, \\ \sigma_2 h_x^2 = \qquad\qquad\quad \nu(x) h_x^3, \\ \sigma_2 h_x^3 = \overline{\mu}(x) h_x^1 + \overline{\nu}(x) h_x^2, \end{cases}$$

где $\psi(x)$ — вещественная, а $\nu(x)$, $\mu(x)$ — комплекснозначные функции, а $\nu(x)g(x) = c(x)$; $\mu(x)f(x) = k(x)$ — дифференцируемые функции, тогда (1) примет вид:

$$\begin{cases} (h_x^1)' = ik(x)h_x^3, \\ (h_x^2)' = ic(x)h_x^3, \\ (h_x^3)' = i\overline{k}(x)h_x^1 + i\overline{c}(x)h_x^2, \\ \{h_x^k(0)\}_1^3 = h_0. \end{cases} \tag{2}$$

Лемма. *Если $c(x), k(x) \in \mathbb{R}$, то для системы уравнений (2) выполняется соотношение*

$$\|h_x^1\|^2 + \|h_x^2\|^2 + \|h_x^3\|^2 = const.$$

Теорема. *Если $c(x), k(x) \in \mathbb{R}$ и $c(x)\cos\varphi(x) + k(x)\sin\varphi(x) = 0$ и $\varphi(x)$ — дифференцируемая функция, причем $\varphi'(x) = C\sqrt{k^2(x) + c^2(x)}$, где C — $const$, то система уравнений (2) имеет единственное решение*

$$\begin{cases} h_x^1 = h_0^1 \cos\alpha - Ch_0^2 \sin\alpha - i(1 - C^2) h_0^3 \sin\alpha \cos\varphi(x), \\ h_x^2 = h_0^2 \cos\alpha + Ch_0^1 \sin\alpha + i(1 - C^2) h_0^3 \sin\alpha \sin\varphi(x), \\ h_x^3 = \dfrac{h_0^1 - iCh_0^3 \sin\varphi(x)}{\cos\varphi(x)} \sin\alpha + ih_0^3 \cos\alpha, \end{cases}$$

где $\alpha = \sqrt{C^2 + 1} \int\limits_0^x \sqrt{k^2(t) + c^2(t)}dt$, $\cos\varphi(x) = \dfrac{k(x)}{\sqrt{k^2(x) + c^2(x)}}$, $\sin\varphi(x) = \dfrac{c(x)}{\sqrt{k^2(x) + c^2(x)}}$.

Замечание. Кроме того, $h_x^3 = \dfrac{-h_0^2 + iCh_0^3 \cos\varphi(x)}{\sin\varphi(x)} \sin\alpha + ih_0^3 \cos\alpha$.

1. В. А. Золотарев. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов, Харьков: ХНУ, 2003, 342 с.
2. В. А. Золотарев. Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности, *Мат. сб.*, 1990, Т. 181, 7, С. 965–994.
3. В. А. Золотарев. Спектральный анализ несамосопряженных коммутативных систем операторов и нелинейные дифференциальные уравнения, Теория функций и функцион. анализ, и их прил., Харьков: Респ. сб., 1983, Вып. 40, С. 68–71.

Декомпозиція лінійних сингулярно збурених багатотемпових систем

О. В. Осипова, І. М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

shurenkacv@gmail.com, i.cherevko@chnu.edu.ua

Одним із найефективніших методів дослідження сингулярно збурених задач високої розмірності є метод інтегральних многовидів. Метод декомпозиції сингулярно збурених систем, що базується на інтегральних многовидах повільних і швидких рухів, дозволяє звести вихідну сингулярно збурену систему до "блочно-трикутного" вигляду і тим самим спростити її якісне дослідження.

Дослідження лінійних сингулярно збурених систем методом інтегральних многовидів розглядалось в [1, 2]. Системи з декількома малими параметрами досліджуються в [3, 4].

У даній роботі розглядається лінійна сингулярно збурена система з багатьма малими параметрами [5]

$$\prod_{j=0}^{i} \varepsilon_j x_i = \sum_{j=0}^{k} A_{ij} x_j, \qquad i = \overline{0,k} \tag{1}$$

в області $\Omega = \{(t, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_k) : t \in \mathbb{R}, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_k > 0\}$, де $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, i = \overline{0,k}, A_{ij} = A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{0,k}$ — $n_i \times n_j$ матриці, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k$ — малі додатні параметри.

Припустимо, що для системи (1) справджуються умови:

1) матриці $A_{ij}(t), i, j = \overline{0,k}$ рівномірно обмежені при $t \in \mathbb{R}$;

2) власні значення матриці $A_{kk}(t)$ задовольняють нерівність:

$$\mathrm{Re}\lambda(A_{kk}) \leq -2\beta < 0, \quad \beta > 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

За допомогою методу інтегральних многовидів швидких та повільних змінних запропонована схема побудови невиродженої заміни змінних $(x_0, x_1, x_2, ..., x_k) = \Phi \times$ $\times (y_0^k, y_1^k, y_2^{k-1}, ..., y_k^1)$, за допомогою якої система (1) при достатньо малих $\varepsilon_i, i = \overline{1,k}$ зводиться до "блочно-трикутного" виляду

$$\dot{y}_0^k = B_{00}^k y_0^k, \quad \prod_{j=0}^{i} \varepsilon_j \dot{y}_i^{k+1-i} = B_{ii}^{k+1-i} y_i^{k+1-i}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{2}$$

1. Sobolev V. A. Decomposition of linear singularly perturbed systems. Acta Math. Hung, 1987, 49, N 3–4, P. 365–376.
2. Сельський С. С., Черевко І. М. Розщеплення систем лінійних диференціальних сингулярно збурених рівнянь. Наук. вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Математика, 2011, Т. 1, № 3, С. 104–107.
3. Семенова М. М. Декомпозиция систем с несколькими временными масштабами. Мехатроника, автоматизация, управление, 2004, № 8, С. 6–1.
4. Воропаева Н. В., Соболев В. А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. – М.: Физматлит, 2009.
5. Осипова О. В., Черевко І. М. Розщеплення різнотемпових сингулярно збурених лінійних систем. Наук. вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Математика, 2012, Т. 2, № 1, С. 78–83.

О гладкости решения вырожденного дифференциального уравнения второго порядка

К. Н. Оспанов

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан

kordan.ospanov@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$Ly := -\rho\,(\rho y')' + qy' + r\bar{y}' = f(x), \quad x \in R \tag{1}$$

Функцию $y \in L_2 := L_2(R)$ назовем решением уравнения (1), если найдется последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ бесконечно дифференцируемых и финитных функций, такая, что $\|y_n - y\|_2 \to 0$, $\|Ly_n - f\|_2 \to 0$ при $n \to +\infty$.

Введем следующие обозначения:
$\alpha_{g,h}(t) = \|g\|_{L_2(0,t)}\,\|h\|_{L_2(t,+\infty)}$, $t > 0$, $\beta_{g,h}(\tau) = \|g\|_{L_2(\tau,0)}\,\|h\|_{L_2(-\infty,\tau)}$, $\tau < 0$, и положим $\gamma_{g,h} = \max\left[\sup\limits_{t>0}\alpha_{g,h}(t),\ \sup\limits_{\tau<0}\beta_{g,h}(\tau)\right]$.

Теорема. *Пусть функции ρ, q, r непрерывно дифференцируемы и такие, что $\rho \geq \delta > 0$, $\rho, |\rho'| < +\infty$, $\mathrm{Re}\,q - r \geq \delta > 0$, $\gamma_{1,Re\,q} < +\infty$. Тогда уравнение* (1) *для любой правой части $f \in L_2$ имеет, притом единственное решение.*

Кроме того, в работе обсуждаются вопросы суммируемости с весом производных решения уравнения (1).

Отметим, что уравнение (1) не имеет младшего члена, поэтому слагаемые с первым производным могут не подчиняться (в операторном смысле) крайним. Такие уравнения в литературе называют вырожденными. Соответственно, порождающие их операторы называются вырожденными операторами. Ранее изучались только симметрические вырожденные операторы в работах А. Г. Костюченко, М. Г. Гасымова, Б. Я. Скачека, М. Отелбаева, Я. Т. Султанаева, О. Д. Апышева. Ими были исследованы вопросы положительной определенности, а также спектральные свойства их расширений по Фридрихсу. В несимметрическом случае вырожденное уравнение второго порядка исследовано в [1].

1. K. N. Ospanov and R. D. Akhmetkaliyeva. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2012, No. 66, p. 1–12.

Об одном свойстве решения сингулярного уравнения с частными производными третьего порядка

М. Н. Оспанов

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан

myrzan66@mail.ru

Пусть $\Omega = [0,\omega] \times (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим уравнение

$$u_{xtt} = a_0(x,t)u_{xt} + a_1(x,t)u_x + a_2(x,t)u_t + a_3(x,t)u + f(x,t). \tag{1}$$

Через $C_*(\overline{\Omega}, R)$ обозначим пространство ограниченных функций, непрерывных по $t \in R$ при $x \in [0,\omega]$ и равномерно относительно $t \in R$ непрерывных по $x \in [0,\omega]$ с нормой $\|V\| = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega} |V(x,t)|$.

Исследуются свойства решения $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u(0,t) = \psi(t), u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t), u_{xt}(x,t) \in C_*(\Omega, R). \tag{2}$$

Положим

$$P_{\alpha,\beta}(x,t) = \frac{\alpha(x,t)}{\sqrt{\beta(x,t)}}, \theta(x,t) = \frac{1}{d}\int\limits_t^{t+d} a_t(x,t)d\tau.$$

Теорема. *Пусть функции* $a_i(x,t)$ $(i = 0,1,2,3)$ *уравнения* (1) *непрерывны на* Ω, $\psi, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d^2\psi}{dt^2}$ *непрерывны и ограничены на* R *и выполнены условия*:
a) $a_1(x,t) \geq \gamma > 0$, γ — const;
b) $\frac{a_1(x,t)}{a_1(x,\tau)} \leq c$ *при* $t, \tau \in R : |t-\tau| < d, c, d$ — const;
c) *для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $\delta > 0$, *такое, что для всех* t *из* R *и* $x', x'' \in [0,\omega]$: $|x' - x''| < \delta$ *выполнено неравенство* $\frac{|a_1(x',t) - a_1(x'',t)|}{|a_1(x'',t)|} < \varepsilon$;
d) $P_{a_0,a_1}(x,t) \leq K, P_{a_2,a_1}(x,t), P_{a_3,a_1}(x,t), P_{f,a_1}(x,t) \in C_*(\Omega,R)$;
e) $f(x,t), \sqrt{\theta(x,t)}\psi(t), \sqrt{\theta(x,t)}d\psi/dt \in C_*(\Omega,R)$.

Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ *задачи* (1), (2), *причем* $u_{xtt} \in C_(*)(\Omega,R)$ *и справедлива оценка* $\|u_{xtt}\| + \|a_0u_{xt}\| + \|a_1u_x\| + \|a_2u_t\| + \|a_3u\| \leq C$. Здесь C зависит от норм функций f, ψ, констант $\gamma, K, c, d, \varepsilon$.

1. Джумабаев Д. С., Оспанов М. Н. Об ограниченности на полосе решения и его производных системы гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами // Математический журнал. – Алматы, 2006. – Т. 6. № 1 (19). – С. 61–66.
2. Оспанов М. Н. Разделимость семейства систем обыкновенных дифференциальных уравнений и их приложения // Вестник Карагандинского университета. – 2008. – № 4 (52). С. 89–94.

Крайові задачі з необмеженим оператором в лінійній частині

Є. В. Панасенко
Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна
panasenko.yevgeniy@gmail.com

Розглянуто у банаховому просторі $\mathbf{B}_1$ лінійну крайову задачу для звичайних диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \tag{2}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з відрізка $[a;b]$ в банахів простір $\mathbf{B}_1$:
$f(t) \in C([a;b], \mathbf{B_1}) := \{f(\cdot) : [a;b] \to \mathbf{B_1}, |||\mathbf{f}||| = \sup_{t\in[a;b]} \|\mathbf{f(t)}\|\}$, $C([a;b], \mathbf{B_1})$ — банахів простір неперервних на $[a;b]$ функцій зі значеннями в $\mathbf{B}_1$. Оператори $A(t)$ є замкненими з щільною областю визначення $D(A(t)) = D \subset \mathbf{B}_1$, яка не залежить від t. Оператор ℓ є лінійним неперервним на $[a;b]$, що діє з простору $C([a;b], \mathbf{B_1})$ в банахів простір $\mathbf{B}_2$: $\ell : C([a;b], \mathbf{B_1}) \to \mathbf{B_2}$; α — елемент простору $\mathbf{B}_2$.

Якщо задача Коші, яка відповідає неоднорідній крайовій задачі (1),(2), рівномірно коректна [1], то можна ввести лінійний оператор $U(t,s)$, $(a \leq s \leq t \leq b)$, який ставить у відповідність кожному елементу $x_0 \in D$ значення в точці t розв'язку однорідної задачі на відрізку $[s;b] : x(t,s) = U(t,s)x_0$.

При вище зазначених умовах, доведено наступне твердження.

Теорема. *Якщо оператор $Q = \ell U(\cdot)$, що діє з банахового простору $\mathbf{B_1}$ в банаховий простір $\mathbf{B_2}$ є узагальнено-оборотним* [2], *то неоднорідна задача* (1), (2) *розв'язна для тих і лише тих неоднорідностей $f(t) \in C\left([a;b], \mathbf{B_1}\right)$, та $\alpha \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють умову*

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - \ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau\right] = 0$$

і при цьому загальний розв'язок крайової задачі має вигляд

$$x(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c + U(t,s)Q^{-}\alpha + (G[f])(t,s),$$

де $(G[f])(t,s)$ — узагальнений оператор Гріна задачі (1),(2), *який діє на оператор-функцію $f(t) \in C\left([a;b], \mathbf{B_1}\right)$ наступним чином*:

$$(G[f])(t,s) := \int_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau - U(t,s)Q^{-}\ell\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Для сильно неперервної функції $A(t)$ у лінійній частині диференціального рівняння (1) зі значеннями в банаховому просторі та нормою $|||A||| = \sup_{t\in[a;b]} \|A(t)\| < \infty$ ця проблема розв'язана в роботі [3].

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М: Наука, 1967.
2. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. – VSP: Utrecht-Boston, 2004.
3. Бойчук О. А., Панасенко Є. В. Крайові задачі для диференціальних рівнянь в банаховому просторі. Нелінійні коливання, 2009, том 12, С. 16–19.

Квазіперіодичні за Безіковичем розв'язки лагранжевих систем на ріманових многовидах

І. О. Парасюк, А. В. Рустамова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

pio@univ.kiev.ua, anna_rustamova@hotmail.com

Нехай $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — повний m-вимірний ріманів многовид з рімановою метрикою $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ∇ — зв'язність Леві-Чивіти на $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, ∇V — градієнт функції $V(\cdot) : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, ∇_ξ — коваріантна похідна вздовж дотичного вектора ξ, $H_V(x)$ — форма Гессе в точці x функції $V(\cdot)$ (за означенням $\langle H_V(x)\xi, \eta\rangle := \langle\nabla_\xi \nabla V, \eta\rangle$, $\xi, \eta \in T_x\mathcal{M}$).

Розглянемо на $(\mathcal{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ натуральну систему з лагранжіаном вигляду

$$L(t,x,\dot{x}) = \mathrm{K}(\dot{x}) - \Pi(t,x). \tag{1}$$

Тут $\mathrm{K}(\dot{x}) = \langle\dot{x},\dot{x}\rangle/2$ — кінетична енергія, $\Pi(t,x) = -W(\omega t, x)$ — квазіперіодична за часом потенціальна енергія, $W(\omega t, x)$ — силова функція, асоційована з функцією $W(\cdot,\cdot)$: $\mathbb{T}^k \times \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$, де $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/(2\pi\mathbb{Z}^k)$ — k-вимірний тор з кутовими координатами $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $\omega \in \mathbb{R}^k$ — вектор частот з раціонально незалежними компонентами. Уведемо позначення

$$\lambda_V(x) := \min\left\{\langle H_V(x)\xi,\xi\rangle : \|\xi\| = 1\right\}, \quad \|\xi\|^2 := \langle\xi,\xi\rangle,$$

$$\xi \in T_x\mathcal{M}\mu_V(x) := \min\left\{\langle H_V(x)\xi,\xi\rangle - \frac{1}{2}\langle\nabla V(x),\xi\rangle^2 : \|\xi\|=1, \xi\in T_x\mathcal{M}\right\}.$$

Достатні умови існування квазіперіодичних за Безіковичем розв'язків системи з лагранжіаном (1) встановлює така теорема.

Теорема. *Нехай на многовиді $\mathcal{M}$ існує обмежена функція $V(\cdot)\in C^2(\mathcal{M};\mathbb{R})$, яка задовольняє такі умови:*
1) *множина*

$$\mathcal{D} := \{x\in\mathcal{M} : 2\lambda_V(x) + \|\nabla V(x)\| > 0\}$$

непорожня і для деякого некритичного значення $v\in V(\mathcal{D})$ існує обмежена зв'язна компонента Ω підрівневої множини $V^{-1}(-\infty,v)$ така, що $\bar\Omega := \Omega\cup\partial\Omega\subseteq\mathcal{D}$;
2) *обмеження $H_f(x)$ на $T_x\partial\Omega$ є додатно визначеною формою для всіх $x\in\partial\Omega$ і $\min_{x\in\bar\Omega}\{\mu_V(x) - 2K^*(x)\} > 0$, де $K^*(x)$ — максимальна секційна (ріманова) кривина по двовимірних площинах дотичного простору $T_x\mathcal{M}$;*
3) *справджуються нерівності*

$$\lambda_W(\varphi,x) + \frac{1}{2}\langle W(\varphi,x),\nabla V(x)\rangle > 0 \quad \forall(\varphi,x)\in\mathbb{T}^k\times\bar\Omega,$$

$$\langle\nabla W(\varphi,q),\nabla V(q)\rangle > 0 \quad \forall(\varphi,x)\in\mathbb{T}^k\times\partial\Omega,$$

де $\lambda_W(\varphi,x) := \min\{\langle H_W(\varphi,x)\xi,\xi\rangle : \xi\in T_x\mathcal{M}, \|\xi\|=1\}$, $H_W(\varphi,x)$ — значення форми Гессе функції $W(\varphi,\cdot):\mathcal{M}\mapsto\mathbb{R}$ в точці x при $\varphi\in\mathbb{T}^k$.
Тоді система з лагранжіаном (1) має слабкий квазіперіодичний за Безіковичем розв'язок.

Проілюстровано застосування сформульованої теореми до задачі по вимушені квазіперіодичні коливання навколо центра мас вільного твердого тіла, на яке діють потенціальні силові поля двох типів: стаціонарне поле з квадратичним потенціалом і нестаціонарне квазіперіодичне за часом поле з лінійним потенціалом.

Про асимптотику загального розв'язку вироджених лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків у випадку кратного спектра граничної в'язки матриць

С. П. Пафик
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
procentum35@ukr.net

Розглядається система диференціальних рівнянь вигляду

$$\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{kh}A_k(t,\varepsilon)\frac{d^kx}{dt^k} = 0, \tag{1}$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{0,m}$ — дійсні або комплекснозначні матриці n-го порядку, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h\in N, t\in[0;T]$.

На систему (1) накладаємо умови:

1. Матриці $A_i(t),\ i=\overline{0,m}$, допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε: $A_i(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_i^{(k)}(t),\ i=\overline{0,m}$.

2. Матриці $A_i^{(k)}(t),\ i=\overline{0,m},\ k=0,1,...$, нескінченно диференційовані на відрізку $[0,T]$.

3. $\det A_m^{(0)}(t) = 0, \forall t\in[0,T]$.

4. Гранична в'язка матриць

$$P(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i^{(0)}(t) \tag{2}$$

системи (1) регулярна при всіх $t \in [0,T]$ і має один скінченний елементарний дільник кратністю p, і один — нескінченний кратністю q, причому $p+q=mn$.

Використовуючи теорію поліноміальних матричних в'язок і методи робіт [1, 2], побудовано асимптотичні розвинення фундаментальної системи розв'язків системи рівнянь (1). Встановлено, що за виконання умов 1 – 4 та деяких обмежень на збурювальні оператори дана система має p формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t,\mu) = u_i(t,\mu)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(\tau,\mu)d\tau),\ i=\overline{1,p},$$

що відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць (2), і q розв'язів вигляду

$$x_j(t,\nu) = v(t,\nu)\exp(\nu^{-qh-1}\int_0^t \xi_j^{-1}(\tau,\ \nu)d\tau),\ j=\overline{1,q},$$

які відповідають нескінченному елементарному дільнику цієї в'язки, де $u_i(t,\ \mu),\ v_j(t,\ \nu)$ — n-вимірні вектори-функції, а $\lambda_i(t,\ \mu),\ \xi_j(t,\ \nu)$ — скалярні функції, які зображаються розвиненнями за степенями $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$ та $\nu = \sqrt[q]{\varepsilon}$ відповідно. Розроблено алгоритм знаходження коефіцієнтів цих розвинень. Виведено відповідні асимптотичні оцінки.

1. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища школа, 2000.
2. Шкиль Н. И. Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – Київ: Вища школа, 1991.

Про структуру фундаментальної матриці лінійного диференціального рівняння

Б. Б. Пахолок

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

bogdanbp@ukr.net

При дослідженні лінійного диференціального рівняння

$$L_n(x) \equiv a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = 0 \tag{1}$$

і спряженого до нього рівняння в класичному випадку вимагають відповідної гладкості коефіцієнтів $a_i(t),\ \ i=\overline{0,n},$ що значно звужує клас рівнянь. Якщо не вимагати диференційованості коефіцієнтів, то спряжене рівняння до (1) буде трактуватися як квазідиференціальне. Теорія квазідиференціальних рівнянь дозволяє звести до мінімуму вимоги на гладкість коефіцієнтів лінійних рівнянь. Важливу роль в теорії лінійних диференціальних рівнянь відіграє фундаментальна матриця. В [1] на змістовному рівні проанонсована, а в [2] детально вивчена структура нормальної фундаментальної матриці $\Phi(t,\alpha)$ для такого квазідиференціального матричного рівняння з мірами

$$\mathcal{K}_{nm}[X(t)] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(P_{ij}(t)X^{(n-i)})^{(m-j)} = 0, \tag{2}$$

де квадратні $l \times l$ матриці $P_{ij}(t)$ задовольняють на проміжку (a, b) такі умови:

1) $P_{00}^{-1}(t)$ — вимірна і обмежена;
2) $P_{i0}(t), P_{0j}(t) \in L_2(a,b)$ для $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$;
3) $P_{ij}(t)$ — матриці міри для $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$.

Умови 1)–3) дозволяють коректно визначити розв'язок рівняння (2). Як виявилося, структура нормальної в точці $t = \alpha \in (a,b)$ фундаментальної матриці $\Phi(t,\alpha)$ матричного лінійного квазідиференціального рівняння може бути описана за допомогою відповідної цьому рівнянню матриці-функції Коші $K(t,\alpha)$ та її квазіпохідних. Оскільки алгоритм побудови фундаментальної матриці грунтується на властивості лінійності диференціального оператора, то згадана структура фундаментальної матриці може бути поширена на загальні лінійні диференціальні рівняння.

Теорема. *Нехай $\mathcal{L}_n(X(t)) = 0$ матричне лінійне коректно визначене диференціальне рівняння із змінними коефіцієнтами, які можуть містити узагальнені функції. Нехай для $\mathcal{L}_n(X(t))$ визначені квазіпохідні $X^{[i]}(t)$ (це можуть бути і звичайні похідні) і квазіпохідні $Y^{\{i\}}(t)$ відповідного спряженого рівняння $\mathcal{L}_n^*(Y(t)) = 0$. Тоді нормальна в точці $t = \alpha$ фундаментальна матриця $\Phi(t,\alpha)$ рівняння $\mathcal{L}_n(X(t)) = 0$ є матрицею блочної структури і має вигляд*

$$\Phi(t,\alpha) = \{\Phi_{ij}(t,\alpha)\} = \left\{K_{t\alpha}^{[i-1]*\{n-j\}*}(t,\alpha)\right\}_{i,j=1}^{n}.$$

В доповіді обговорюються також ряд наслідків даної теореми.

1. Пахолок Б. Б. О фундаментальной матрице квазидифференциального операторного уравнения с мерами // Всесоюзная конференция «Новые подходы к решению дифференциальных уравнений» (май 1987 г., г. Дрогобыч). Тезисы докладов. – М. 1987. – С. 87–88.
2. Таций Р. М., Пахолок Б. Б. О структуре фундаментальной матрицы квазидифференциального уравнения // Доклады АН УССР . Сер. А. – 1989. – №4.– С. 25–28.

О структуре множества непрерывных решений систем нелинейных разностных уравнений

Г. П. Пелюх

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,

grygor@imath.kiev.ua

В современной теории разностных уравнений имеется целый ряд результатов, касающихся изучения различных свойств решений уравнений вида

$$x(t+1) \ = \ A\,x(t) + F(t,\, x(t),\, x(t+1), \ldots,\, x(t+k)), \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, A — вещественная $(n \times n)$-матрица, $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k > 0$. Среди них особое место занимают результаты, посвященные исследованию структур множеств различного рода решений некоторых классов таких уравнений. Обсуждению аналогичных результатов, полученных в последнее время при исследовании системы уравнений (1), посвящен и настоящий доклад.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполняются условия*:

1) $\det A \neq 0$, $|A| < 1$;

2) *вектор-функция* $F(t,\, x_0,\, x_1, \ldots,\, x_k)$ *является непрерывной при всех* $t \in \mathbb{R}^+$, $|x_i| < a$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $F(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ *и удовлетворяет соотношению*

$$|F(t, x_0', x_1', \ldots, x_k') \, - \, F(t, x_0'', x_1'', \ldots, x_k'')| \, \leq \, \psi(t) \sum_{i=0}^{k} |x_i' - x_i''|,$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, $|x_i'| < a$, $|x_i''| < a$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $\psi(t)$ *— некоторая непрерывная, неотрицательная функция;*
3) *ряд*

$$\Psi(t) \; = \; (k+1)\,|A^{-1}| \sum_{j=0}^{\infty} \big(|A^{-1}||A|\big)^j \psi(t+j)$$

равномерно сходится при всех $t \geq T \geq 0$ и $\Psi(t) \leq \delta < 1$.
Тогда существует взаимно-однозначная замена переменных вида

$$x(t) \; = \; \gamma(t,\, y(t)) \; = \; y(t) + \widetilde{\gamma}(t,\, y(t)),$$

где $\widetilde{\gamma}(t, y)$ *— непрерывная в области* $D:\, t \geq T,\, |y| < \tilde{a} \leq a$, *вектор-функция, удовлетворяющая условиям*

$$\widetilde{\gamma}(t, 0) \; \equiv \; 0,$$

$$|\widetilde{\gamma}(t, y') - \widetilde{\gamma}(t, y'')| \; \leq \; l\, |y' - y''|,$$

$(t, y'),\, (t, y'') \in D$, $0 < l < 1$, *приводящая систему уравнений (1) к линейному виду*

$$y(t+1) \; = \; A\, y(t). \tag{2}$$

Про збереження інваріантного тора багаточастотних систем

М. О. Перестюк, П. В. Фекета
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
pmo@univ.kiev.ua, petro.feketa@gmail.com

Одним з важливих питань якісної теорії багаточастотних коливань є питання грубості інваріантного многовиду та його збереження при малих збуреннях [1, 3]. В багатьох роботах (напр. [2,§10]) успішно застосовано другий метод Ляпунова для дослідження грубості інваріантного тороїдального многовиду та доведено, що малі збурення правої частини системи не руйнують інваріантний тор.

Дана доповідь присвячена новим умовам збереження асимптотично стійкого інваріантного тороїдального многовиду, які вимагають малості збурення не на всьому торі $\mathcal{T}_m$, а лише на множині неблукаючих точок динамічної системи на торі.

Розглянемо збурену систему диференціальних рівнянь, визначену в прямому добутку тора $\mathcal{T}_m$ та евклідового простору $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = (A + B(\varphi))x + f(\varphi), \tag{1}$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a(\varphi) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, A — стала матриця, $B(\varphi), f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$. Задача полягає у встановлені достатніх умов існування інваріантного тора системи (1) у випадку, коли незбурена система рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = Ax + f(\varphi), \tag{2}$$

має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид. Як відомо [2, 10], система (1) має інваріантний тор для будь-якої функції $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, якщо збурення $B(\varphi)$ є малим для всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$. В даній роботі послаблено цю умову, а саме, вимагається, щоб

$\|B(\varphi)\| \leq \delta$ лише для $\varphi \in \Omega$, де Ω — множина неблукаючих точок динамічної системи $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$.

Теорема. *Нехай в системі* (1) *дійсні частини всіх власних значень матриці* A *є від'ємними*: $Re\lambda_j(A) < 0, \;\; j = 1, \dots, n$. *Тоді існує* $\delta > 0$ *таке, що для будь-якої функції* $B(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ *такої, що* $\|B(\varphi)\| \leq \delta$, $\varphi \in \Omega$ *і для будь-якої функції* $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ *система рівнянь* (1) *має асимптотично стійкий інваріантний тороїдальний многовид.*

В доповіді обговорюватимуться наслідки з теореми, що дозволяють ефективно досліджувати поведінку розв'язків достатньо широкого класу багаточастотних систем, що мають просту структуру множини неблукаючих точок. Техніка доведення теореми є достатньо класичною та гнучкою, що дозволяє одержати аналогічні результати для інших класів диференціальних рівнянь, зокрема для імпульсних систем [4, 5].

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – К.: Наукова думка, 1969.
2. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем диффереинальных уравнений с помощью функции Ляпунова. – К.: Наукова думка, 1992.
3. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987.
4. Perestyuk M., Feketa P. Invariant sets of impulsive differential equations with particularities in ω-limit set. Abstract and Applied Analysis, 2011, vol. 2011, Article ID 970469, 14 pages.
5. Perestyuk M. O., Feketa P. V. Invariant manifolds of one class of systems of impulsive differential equations. Nonlinear Oscillations, 2010, vol. 13, no. 2, pp. 260–273.

Оптимизация интеллектуального управления на нано-уровне процессами кристаллизации металлического расплава с учетом релаксации поступательного и вращательного движения атомов

В. Г. Писаренко, И. А. Варава, Ю. В. Писаренко

Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина

jvpisarenko@gmail.com, ivanvarava@rambler.ru

Проводилось моделирование [1–5] взаимодействий между «атомами» специального типа, а именно, не обладающих сферической симметрией и способных соединяться попарно и в большие группы. Введено «правило скрепления» двух атомов в следующей форме: «Если два таких соседних сблизившихся «атома» вращаются (к концу некоторого расчетного цикла) с минимально возможной скоростью и при этом риски-биссектрисы этих двух атомов параллельны и направлены в одну и ту же сторону, то они считаются скрепленными в пару и сохраняют на всех последующих расчетных циклах это состояние». Рассматривается популяция «атомов», обладающих как поступательной, так и вращательной скоростями, распределенными в начальный момент случайным образом, близким к максвелловскому распределению. Процесс отражения «атома» приобретает несимметричный вид из-за потерь энергии при столкновении на охлаждаемой стенке. В предлагаемой модели возможно формирование устойчивых наборов «атомов», являющихся моделью зарождающегося кристалла. Вычислительные эксперименты осуществляются с целью определения оптимального количества «атомов» инжектируемого пучка и оптимального времени формирования зародышей кристаллов в виде устойчивых симметричных кластеров, состоящих из взаимодействующих в состоянии равновесия «атомов». В данной модели расчет проводится двумя последовательными этапами: 1) инжектируемый пучок быстрых атомов (имеющих поступательную скорость, отвечающую температуре $T_p > T_0$, внедряясь в исходную популяцию медленных атомов, в начальный момент имеющих максвелловское распределение скоростей со средней температурой $T = T_0$, за счет последовательности столкновений отдает свою энергию исходной популяции атомов, так что возникшая смешанная популяция обладает новой температурой T_c, такой что $T_0 < T_c < T_p$ (расчеты выполняются программой «АТОМ-1»); 2) подпрограмма «АТОМ-2» моделирует процесс релаксации поступательной энергии инжектируемого пучка быстрых атомов с учетом заданного закона снижения температуры стенки, что будет определять отвод энергии поступательного движения всей смешанной популяции. На выходе подпрограммы «АТОМ-2» получаем модель кристаллизирующегося расплава, представленного смешанной популяцией в виде фазы SemiSolid, предшествующей возникновению сначала отдельных изолированных кластеров взаимосвязанных атомов, а затем и с помощью программы «АТОМ-3» получаем состояние закристаллизировавшегося твердого тела (фаза Solid). Графические приложения создавались для двух модификаций: 1) для персонального компьютера, 2) для суперкомпьютера СКИТ Института кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины (на языке С). Предполагается, что программа «АТОМ-3» также потребует для оптимальной работы не менее 10 процессоров суперкомпьютера СКИТ Института кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины.

1. Ефимов В. А. Разливка и кристаллизация стали. – М.: Металлургия, 1976.
2. Бабаскин Ю. З., Шипицын С. Я., Кирчу И. Ф. Конструкционные и специальные стали с нитридной фазой. — К.: Наук. думка, 2005.
3. Боголюбов Н. Н. Избранные туды в трех томах. Том 2. — К.: Наук. думка, 1970.
4. Писаренко В. Г, Чайковский О. И., Бойко А. Г. Информационные модели кристаллизации стальных расплавов. — М.: Астра, 2005.
5. Писаренко В. Г. Моделирование субмолекулярных кластеров в гетерожидкостях. — М.: Астра, 2008.

Периодические решения нелинейных систем дифференциальных уравнений с двумя малыми параметрами

Н. А. Письменный

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

n.pismennyy@gmail.com

В настоящей работе рассмотрена система периодических ОДУ с двумя малыми параметрами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) + \mu_1\gamma_1(t, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) + \mu_2\gamma_2(t, x_1) \end{cases} \tag{1}$$

Предполагается, что:
$f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R}^1 \times\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \gamma_1(t+T, x_1) \equiv \gamma_1(t, x_1), \gamma_2(t+T, x_1) \equiv \gamma_2(t, x_1)$.
Правые части системы допускают непрерывные частные производные первого порядка
Порождающей назовем систему отвечающую нулевым значениям параметров μ_1 и μ_2:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_2) \end{cases} \tag{2}$$

каждое из уравнений которой допускает однопараметрическое семейство T-периодических решений: $\varphi_1(t, h_1), \varphi_2(t, h_2)$, где h_1, h_2 — одномерные параметры.

Также предполагается, что единица является простым собственным значением операторов сдвига по траекториям линеаризованных на периодических решениях n-мерных уравнений системы (2): $\frac{dy_1}{dt} = f_1'(\varphi_1(t))y_1, \frac{dy_2}{dt} = f_2'(\varphi_2(t))y_2$.

Через $\psi_1(t, h_1), \psi_2(t, h_2)$ обозначим периодическое решение сопряженных уравнений:

$$\frac{dz_1}{dt} + (f_1'(\varphi_1(t + h_1)))^* z_1 = 0, \frac{dz_2}{dt} + (f_2'(\varphi_2(t + h_2)))^* z_2 = 0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для того, чтобы система* (1) *допускала ветвь периодических решений, обращающееся при* $\mu_1 = \mu_2 = 0$ *в* $\varphi_1(t, {h_1}^*), \varphi_2(t, {h_2}^*)$, *необходимо, чтобы параметры* ${h_1}^*, {h_2}^*$ *удовлетворяли системе*:

$$\begin{cases} P_1(h_1, h_2) = \int\limits_0^T < \gamma_1(\tau, \varphi_2(\tau, h_2)), \psi_1(\tau, h_1) d\tau > = 0 \\ P_2(h_1, h_2) = \int\limits_0^T < \gamma_2(\tau, \varphi_1(\tau, h_1)), \psi_2(\tau, h_2) d\tau > = 0 \end{cases}$$

если при этом выполняется условие:

$$\left. \begin{vmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial h_1} & \frac{\partial P_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial P_2}{\partial h_1} & \frac{\partial P_2}{\partial h_2} \end{vmatrix} \right|_{({h_1}^*, {h_2}^*)} \neq 0$$

то отвечающее этим параметрам решение действительно существует и является единственным периодическим в окрестности $\varphi_1(t, {h_1}^*), \varphi_2(t, {h_2}^*)$.

Динамика стационарных структур в канонической параболической задаче

С. П. Плышевская
Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского, Симферополь, Украина
splyshevskaya@mail.ru

Рассматривается уравнение (см. [1], с.134):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^3, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

где μ — положительный параметр.

Это уравнение в пространстве $\overset{0}{H}{}^1(0, \pi)$ порождает динамическую систему. Каждое решение уравнения (1) при $t \to \infty$ стремится к одному из его стационарных решений.

При уменьшении параметра μ и его переходе через $k^{-2}, \quad k = 1, \ldots,$ индекс неустойчивости нуля каждый раз повышается на порядок. В результате от нуля ответвляется две непрерывные по μ ветви пространственно-неоднородных $\pm\varphi_k(x,\mu)$ с индексом неустойчивости k. Справедливо равенство

$$\varphi_k^{\pm}(x,\mu) = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-k^2\mu}\cos kx + O(1-k^2\mu).$$

Для ответа на вопрос о судьбе указанных точек при отходе параметра μ от соответствующего бифуркационного значения мы строим иерархию упрощённых моделей исходной задачи [2].

Согласно проведённому анализу существует $\mu_1^* > 0$ такое, что при $(\mu_1^*, 1) \quad \varphi_1(x,\mu)$ - неустойчивая точка (1) с индексом неустойчивости 1. При $\mu < \mu_1^*$ 0 является точкой спектра $\varphi_1(x,\mu)$, а остальные точки спектра отрицательные. $\varphi_1(x,\mu)$ при $\mu < \mu_1^*$ является точкой орбитально экспоненциально устойчивого однопараметрического семейства решений (1) типа внутреннего переходного слоя. Каждый элемент этого семейства определяется точкой перехода [3].

1. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений – М.: Мир, 1985. – 376 с.
2. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: Физматлит. 2007. – 485 с.
3. Васильева А. Б., Бутузов М. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – Высшая школа, М.1990. – 208 с.

Представление решений краевых задач для уравнения Шрёдингера в пространстве Гильберта

А. А. Покутный

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

lenasas@gmail.com

В пространстве Гильберта H рассматривается слабо нелинейное дифференциальное уравнение Шредингера

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t), t \in J \qquad (1)$$

с операторным краевым условием вида

$$Q\varphi(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \qquad (2)$$

где для каждого $t \in J \subset \mathbb{R}$, неограниченный оператор $H(t)$ имеет вид $H(t) = H_0 + V(t)$; здесь $H_0 = H_0^*$ неограниченный самосопряженный оператор с областью определения $D = D(H_0) \subset H$; отображение $t \to V(t)$ - сильно непрерывное. Оператор Q предполагается линейным и ограниченным, действующим из пространства Гильберта H в пространство Гильберта H_1, α — произвольный элемент пространства H_1. Ищется такое решение $\varphi(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2), которое обращается в одно из решений порождающей краевой задачи

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_0(t) + f(t), t \in J \qquad (3)$$

$$Q\varphi_0(\cdot) = \alpha, \qquad (4)$$

при $\varepsilon = 0$. Оператор-функции $Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, $J(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ удовлетворяют следующим ограничениям в окрестности порождающего решения $\varphi_0(t)$ по совокупности переменных

$$Z(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^1[||\varphi-\varphi_0|| \le q] \times C(J,H) \times C[0,\varepsilon_0],$$

$$J(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^1[||\varphi-\varphi_0|| \le q] \times C(J,H_1) \times C[0,\varepsilon_0],$$

где q — некоторая положительная постоянная. Доклад посвящен получению необходимых и достаточных условий существования решений краевой задачи (1), (2), а также построению итеративной процедуры сходящейся с квадратичной скоростью к точным решениям. Также будет установлена связь между необходимым и достаточным условиями.

Для краевой задачи (3), (4) будет показано каким образом можно ввести различные типы решений (сильных, слабых, обобщенных), чтобы можно было гарантировать ее разрешимость при произвольных неоднородностях. Эти решения строятся при помощи обобщенного оператора Грина и имеют один и тот же вид для всех типов решений.

При получении основных результатов существенно используются конструкции, полученные в [1], [2], [3].

1. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. – VSP, Utrecht-Boston, 2004. – 317 p.
2. Покутный А. А. Ограниченные решения линейных и слабо нелинейных дифференциальных уравнений в Банаховом пространстве с неограниченные оператором в линейной части. Дифференциальные уравнения, 2012, том 48, С. 803–813.
3. Покутный А. А. Периодические решения уравнения Хилла. Нелінійні коливання, 2013, том 16, С. 111–117.

О простых изотопических классах полярных каскадов

О. В. Починка

Нижегородский университет, Н. Новгород, Россия

olga-pochinka@yandex.ru

Результаты относятся к решению проблемы Палиса–Пью о существовании дуги с конечным или счетным множеством бифуркаций, соединяющей две системы Морса–Смейла. Положительное решение проблемы для непрерывных систем было найдено Ш. Ньюхаусом и М. Пейшото в 1976 году. Препятствия к существованию такой дуги для двумерных дискретных систем вскорости были обнаружены Ш. Матсумото и П. Бланшаром. В размерности три к аналогичным препятствиям добавляются препятствия, связанные с возможностью дикого вложения сепаратрис седловых точек.

В настоящем докладе рассматриваются диффеоморфизмы Морса–Смейла f, заданные на замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3. Согласно [1], динамика f может быть представлена как движение от связного аттрактора A_f к связному репеллеру R_f. При этом для множества $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$ пространство орбит $\hat{V}_f = V_f/f$ является гладким связным 3-многообразием, которое в простейшем случае (например, когда диффеоморфизм f включается в поток) является прямым произведением $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$.

Диффеоморфизм Морса–Смейла f называется *полярным*, если среди его неблуждающих точек есть ровно один источник и ровно один сток. В работе [2] доказано, что диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^3 \to M^3$ без гетероклинических пересечений соединяется простым путем с полярной системой на сфере $\mathbb{S}_0$ тогда и только тогда, когда многообразие $\hat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}_0 \times \mathbb{S}^1$. Простота означает, что вся дуга состоит из систем Морса-Смейла за исключением конечного множества точек, в которых диффеоморфизм в определённом смысле наименьшим образом отклоняется от системы Морса–Смейла. Основным результатом настоящего доклада является следующая теорема.

Теорема. *Любой диффеоморфизм Морса-Смейла $f : M^3 \to M^3$ без гетероклинических пересечений, для которого многообразие $\hat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, g > 0$ соединяется простым путем с полярной системой на связной сумме g копий $\mathbb{S}_0 \times \mathbb{S}^1$. Обратное утверждение неверно.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м РФФИ, гранта правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

1. Гринес В. З., Починка О. В. Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011, 438 с.
2. Гринес В. З., Починка О. В. О простом изотопическом классе диффеоморфизма "источник-сток" на 3-сфере. Мат. заметки (принято к печати).

Асимптотична поведінка моментів імпульсів при регулюванні температури однорідного кільця

М. В. Прохоренко

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

myroslava.prokhorenko@gmail.com

Диференціальні рівняння з імпульсною дією [1] є зручною математичною моделлю для ряду задач фізики, біології, економіки і т.д. Розглядають вплив імпульсної дії як на звичайні диференціальні рівняння, так і на рівняння в частинних похідних [2]–[5]. У роботі розгянуто задачу про регулювання температури тонкого однорідного кільця одиничного радіуса, на поверхні якого відбувається конвекційний теплообмін із навколишнім середовищем. Імпульсна зміна температури кільця відбувається в моменти, коли його загальна кількість тепла досягає заданого значення. Дана робота є продовженням досліджень [2], [5].

Процес теплопровідності задамо рівнянням

$$u_t = a^2 u_{xx} - h\left(u - u_*\right),\ (x,t) \in (-\pi, \pi) \times [0, +\infty), \tag{1}$$

початковими та граничними умовами

$$u(x,0) = u_0, x \in (-\pi,\pi), \quad u(-\pi,t) = u(\pi,t), u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t), t \in [0,+\infty) \tag{2}$$

і імпульсним законом

$$\left[u(x,t+0) - u(x,t-0)\right]\big|_{I_u(t-0)=I_0} = \alpha, \quad I_u(t) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x,t)\,dx, \tag{3}$$

де $(x,t) \in ((-\pi,\pi) \times [0,+\infty))\,; a, h, u_*, u_0, \alpha$ — константи $(a > 0)$.

Позначимо через $t_k, (k \in \mathbb{N})$ моменти імпульсної дії задачі (1)–(3) (тобто моменти, коли $I_u(t_k) = I_0$), $u_1 = \min\{u_0; u_* - \alpha\}$.

Теорема 1. *Якщо* $u_0 > u_*$, $h > 0, \alpha < 0$, $I_0 \in (2\pi u_*; 2\pi u_1)$, *то* $t_k \to +\infty$ *при* $k \to +\infty$ *та*

$$t_k = -\frac{1}{h}\left(k \ln|I_0 - 2\pi u_*| - \ln\left|2\pi(u_0 - u_*)(I_0 + 2\pi(\alpha - u_*))^{k-1}\right|\right), k = 1, 2, 3....$$

Теорема 2. *Якщо* $u_* = u_0$, $h > 0, \alpha > 0$, $I_0 \in (2\pi(u_* - \alpha); 2\pi(u_* + \alpha))$, *то* $t_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ *та*

$$t_k = -\frac{1}{h}\left(k \ln|I_0 - 2\pi u_*| - \ln\left|2\pi\alpha(I_0 + 2\pi(\alpha - u_*))^{k-1}\right|\right), k = 1, 2, 3....$$

1. Samoilenko A. M., Perestyk N. A. Impulsive differential equations. –Singapore: World Sci., 1995.
2. Мышкис А. Д. Процес теплопроводности с авторегулируемой импульсной поддержкой. Автоматика и телемеханика, 1995, № 2, С. 35–43.
3. Елгондиєв К. К., Пильтяй М. М., Хомченко Л. В. Распространение тепла в однородном стержне с импульсным воздействием. Крайові задачі для диф. р-нь, 2002, Вип. 10, С. 59–65.
4. Самойленко В. Г., Хомченко Л. В. Крайова задача Неймана для сингулярно збуреного рівняння теплопровідності з імпульсною дією. Нелінійні коливання, 2005, Т. 8, № 1, С. 89–123.
5. Кирилич В. М., Мышкис А. Д., Прохоренко М. В. Колебания мембраны под воздействием импульсных сил. Укр. матем. журн., 2009, Т. 61, № 8, С. 1148–1153.

Обмежені розв'язки рівняння четвертого порядку з бістійкою нелінійністю

А. М. Самойленко, І. Л. Нижник

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

sam@imath.kiev.ua, irene@imath.kiev.ua

У сучасній математичній фізиці важливу роль відіграє розширене рівняння Колмогорова–Фішера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(u),$$

що при $\gamma = 0$ перетворюється в класичне рівняння Колмогорова–Петровського–Піскунова–Фішера. При цьому в першу чергу розглядаються бістійкі нелінійності, коли рівняння $\frac{du}{dt} = -f(u)$ має два стійкі стаціонарні розв'язки. При вивченні таких параболічних рівнянь важливу роль відіграють стаціонарні розв'язки, обмежені на всій осі.

У роботі [1] для рівнянь

$$y^{(4)}(x) + 4y(x) = 4 \operatorname{sign} y(x)$$

побудовані в явному вигляді обмежені та періодичні розв'язки, зокрема кінки, солітони та новий клас періодичних розв'язків. Показано, що обмежені розв'язки однозначно визначаються своїми нулями. При цьому відстань між нулями характеризується довільними непарними числами. Показано наявність просторового хаосу. Знайдено точне значення просторової ентропії відносно періодичних розв'язків.

Для рівняння

$$y^{(4)} + 2y(y^2 - 1) = 0$$

запропоновано аналітичну побудову кінкоподібних розв'язків (обмежених на всій осі розв'язків із скінченним числом нулів) у вигляді швидкозбіжних рядів по добутках експоненціальних та тригонометричних функцій, що дало змогу довести теорему існування кінкоподібних розв'язків і отримати високоточні аналітичні вирази для кінків і солітонів [2].

У роботі [3] для рівнянь

$$\gamma y^{(4)} - y'' + y = \text{ sign } y, \quad \gamma > \frac{1}{4}$$

описані обмежені розв'язки, що мають скінченне число нулів і характеризуються цілими числами, що пов'язані з відстанями між нулями. Доведено існування просторового хаосу. Знайдена оцінка знизу значення просторової ентропії відносно розв'язків із скінченним числом нулів.

1. A. M. Samoilenko, I. Nizhnik. Bounded solutions of a fourth order equation with a model bistable nonlinearity. Ukrainian Mathematical Bulletin. 2009, Volume 6, 397–420.
2. A. M. Samoilenko, I. Nizhnik. Kink–like solutions of a fourth order equation with a cubic bistable nonlinearity. Differential equations.
3. S. Albeverio, I. Nizhnik. Spatial chaos of a fourth order nonlinear diffusion equation, Phys. Lett. 2001, A 288, 299–304.

Сингулярно збурені диференціальні рівняння з імпульсною дією

В. Г. Самойленко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

vsam@univ.kiev.ua

У 1937 році на прикладі математичної моделі ударного механізму годинника Боголюбов М. М. і Крилов М. М. продемонстрували ефективність застосування асимптотичних методів для побудови наближених (асимптотичних) розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Згодом, починаючи з кінця 60-х років XX-го століття, теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією інтенсивно розвивалася у працях багатьох представників Київської школи з нелінійної механіки.

Суттєве значення для становлення цього напряму теорії диференціальних рівнянь мала фундаментальна праця [1], в якій було запропоновано нові поняття і підходи, що відіграли визначальну роль для розвитку теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Основні досягнення з цього важливого розділу теорії диференціальних рівнянь та її застосувань (в основному, за період 60-х – 80-х років XX-го століття) було підсумовано у монографії [2], автори якої отримали фундаментальні результати з даного напряму математики.

У даний час дослідження з теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією продовжують активно розвиватися і знаходять різноманітні застосування.

Дана доповідь присвячена результатам, що стосуються теорії асимптотичних розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

Основну увагу у доповіді присвячено звичайним диференціальним рівнянням та системам таких рівнянь, зокрема, з виродженою матрицею при старших похідних, а також диференціальним рівнянням з частинними похідними параболічного типу.

Грунтуючись на ідеях методу примежевих функцій, а для випадку диференціальних рівнянь з частинними похідними — ідеях методу Вішика–Люстерника, запропоновано алгоритми побудови асимптотичних розв'язків згаданих вище диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу, дано обґрунтування побудованої асимптотики -— теореми про оцінку різниці між точним і асимптотичним розв'язками згаданих вище сингулярно збурених диференціальних рівнянь.

Основні результати доповіді відображено у статтях [3–5].

1. Самойленко А. М., Мышкис А. Д. Системы с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени // Мат. сб. 1967, 74, 2, 202–208.
2. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, Вища школа, 1987.
3. Самойленко А. М., Каплун Ю. І., Самойленко В. Г. Сингулярно збурені рівняння з імпульсною дією. Укр. мат. журн., 2002, 53, 1089–1099.
4. Потороча В. В., Самойленко В. Г. Асимптотические решения сингулярно возмущенных нелинейных систем дифференциальных уравнений с вырождением и импульсным воздействием. Дифференц. уравн., 2007, 43, 324–334.
5. Самойленко В. Г., Хомченко Л. В. Крайова задача Неймана для сингулярно збуреного рівняння теплопровідності з імпульсною дією. Нелінійні коливання, 2005, 8, 89–123.

Достатні умови існуваня оптимального керування для деяких класів систем диференціальних рівнянь

О. О. Самойленко

Київський національний університет ім. Т.Шевченка, Київ, Україна

anelka.s@mail.ru

Розглядається задача оптимального керування системою диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\dot{x} = f_1(t,x) + f_2(t,x)u(t),\\ x(0) = x_0\end{gathered} \tag{1}$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int\limits_0^{\tau} L(t, x(t), u(t))\, dt \to \inf, \tag{2}$$

де $x_0 \in D$ — фіксований вектор, $t \in [0,T]$, $x \in D$ — фазовий вектор, D — область в $\mathbb{R}^d$, ∂D — її межа, $\overline{D} = D \cup \partial D$, τ — момент першого виходу розв'язку $x(t)$ на границю області D, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ — вектор керування, U — опукла, замкнена множина, вектор-функція $f_1(t,x) : [0,T] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^d$ та матриця $f_2(t,x) : [0,T] \times \overline{D} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ — неперервні за сукупністю змінних функції, а також для них виконується умова: для будь-яких $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$ існує така стала $C > 0$, що

$$\begin{gathered}\mid f_1(t,x) \mid \leq C(1+ \mid x \mid),\\ \mid\mid f_2(t,x) \mid\mid \leq C(1+ \mid x \mid).\end{gathered} \tag{3}$$

Функції $L(t,x,u)$,$L_x(t,x,u)$ і $L_u(t,x,u)$ є неперервними для будь-яких $t \in [0,T], x \in \overline{D}$ та $u \in U$ і задовольняють наступні умови:
1) існують такі сталі $k > 0$ та $p > 1$, що виконується нерівність

$$L(t,x,u) \geq k \mid u \mid^p, \tag{4}$$

для $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$.
2) існує $K > 0$ та $\alpha > 0$, що

$$\mid L_x(t,x,u) \mid + \mid L_u(t,x,u) \mid \leq K(1+ \mid u \mid^{p-1} + \mid x \mid^{\alpha}), \tag{5}$$

для $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$, $u \in U$.
3) $L(t,x,u)$ опукла по u для будь-яких фіксованих $t \in [0,T]$, $x \in \overline{D}$.

Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо:
a1) $u(t) \in L_p([0,T])$,
a2) $u(t) \in U,$ при $t \in [0,T]$.

Тоді має місце наступна теорема.

Теорема. *Нехай для системи* (1) *з критерієм якості* (2), *виконуються вищевказані умови. Тоді задача* (1), (2) *має розв'язок в класі допустимих керувань, тобто існує оптимальне керування* $u^*(t)$, *що мінімізує критерій якості* (2).

Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега — де Фріза зі змінними коефіцієнтами

Ю. І. Самойленко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
yusam@univ.kiev.ua

Розглядається задача про побудову асимптотичних солітоноподібних розв'язків сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \tag{1}$$

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,t)\varepsilon^k, \quad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,t)\varepsilon^k, \tag{2}$$

де $a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R} \times [0;T])$, $k \geq 0$; $0 < \varepsilon \ll 1$.

Нехай $G = G(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R})$ — лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R}$, для яких рівномірно за змінними (x,t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, p, q виконуються умови:

1) має місце співвідношення

$$\lim_{\tau \to \infty} \tau^n \frac{\partial^{m+p+q}}{\partial x^m \partial t^p \partial \tau^q} f(x,t,\tau) = 0,$$

2) існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, для якої

$$\lim_{\tau \to -\infty} \tau^n \frac{\partial^{m+p+q}}{\partial x^m \partial t^p \partial \tau^q} (f(x,t,\tau) - f^-(x,t)) = 0, \quad (x,t) \in K.$$

Позначимо $G_0 = G_0(\mathbf{R} \times [0;T] \times \mathbf{R})$ — простір таких функцій $f(x,t,\tau) \in G$, для яких рівномірно щодо (x,t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ справджується рівність

$$\lim_{\tau \to -\infty} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t) \in K.$$

Асимптотичний солітоноподібний розв'язок рівняння (1) шукається у вигляді:

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \left[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)\right] + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon},$$

де $\varphi(t) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R} \times [0;T])$; функції $u_j(x,t)$, $j = \overline{0,N}$ — нескінченно диференційовні; $V_0(x,t,\tau) \in G_0$; $V_j(x,t,\tau) \in G$, $j = \overline{1,N}$.

Запропоновано алгоритм побудови асимптотичних солітоноподібних розв'язків рівняння (1) та дано його обгрунтування.

1. Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І. Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами. Укр. мат. журн., 2005, 57, 111 – 124.
2. Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І. Асимптотичні m-фазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами I. Укр. мат. журн., 2012, 64, 970 – 987.
3. Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І. Асимптотичні m-фазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами II. Укр. мат. журн., 2012, 64, 1089 – 1105.

Асимптотичне інтегрування вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь

П. Ф. Самусенко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

psamusenko@ukr.net

У роботі розглядається задача Коші

$$\varepsilon B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = f(x,t,\varepsilon), \ t \in [0;T], \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0, \tag{2}$$

де $x = x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $B(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця n-го порядку, $f(x,t,\varepsilon)$, x_0 — n-вимірні вектори, компонентами яких є дійсні або комплекснозначні функції, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$ — малий параметр.

Припускаючи, що в'язка матриць $f_x(\overline{x}_0(0),0,0) - \lambda B(0,0)$, де $x = x_0(t)$ — розв'язок породжуючого рівняння $f(x,t,0) = 0$, $f_x(\overline{x}_0(0),0,0)$ — матриця Якобі, має визначену кронекереву структуру, асимптотичний розв'язок задачі (1), (2) побудовано у вигляді суми

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau,\varepsilon), \ \tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

де $\overline{x}(t,\varepsilon)$ (регулярна частина асимптотики) та $\Pi x(\tau,\varepsilon)$ (примежева частина асимптотики) — розвинення за степенями ε [1].

Зазначимо, що побудова розв'язку задачі Коші (1), (2) даним способом можлива і у випадку, коли ранг матриці $B(t,\varepsilon)$ на відрізку $[0;T]$ не є сталим.

У роботі доведено теореми про існування та єдиність періодичного розв'язку системи (1) у випадку, коли її коефіцієнти періодичні за змінною t з періодом T та побудовано відповідні асимптотичні розвинення.

Одержані результати узагальнено для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з малим загаюванням аргументу.

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – Москва: Наука, 1973.
2. Самойленко А. М., Шкиль Н. И., Яковец В. П. Линейные системы дифференциальных уравнений с вырождениями. – К.: Выща шк., 2000.
3. Самусенко П. Ф. Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціально-функціональних рівнянь з виродженнями. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова.

Тривиализация инвариантных векторных подрасслоений линейных систем

А. Н. Сахаров

Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород, Россия

ansakharov2008@yandex.ru

В докладе рассматривается задача о приводимости гиперболического линейного расширения квазипериодического потока к блочно-диагональному виду (приводимость в смысле У. Коппеля [1]).

Гладкое линейное расширение квазипериодического потока $f^t(\varphi) = \varphi + \omega t (\mathrm{mod} 2\pi)$ на m-мерном торе $\mathbb{T}^m$ — это поток, порождаемый векторным полем

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = A(\varphi)x, \qquad x \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где $\omega \in \mathbb{R}^m$ — вектор с рационально независимыми компонентами. Пусть $U(t,\varphi)$ — матрица Коши системы (1). Линейное расширение называется гиперболическим, если существует разложение фазового пространства в инвариантную сумму Уитни

$$\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n = W^s \oplus W^u \tag{2}$$

и постоянные $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$ такие, что при всех t выполняются неравенства

$$\|U(-t,\varphi)x\| \le \alpha e^{-\lambda t}\|x\|, \qquad x \in W^u, \qquad \|U(t,\varphi)x\| \le \alpha e^{-\lambda t}\|x\|, \qquad x \in W^s.$$

Заметим, что хотя линейное расширение задано на тривиальном расслоении, разложение в инвариантную сумму (2) может быть нетривиальным [2], [3].

Пусть $\mathcal{T}$ — компактное метрическое пространство, на котором задан непрерывный поток g^t. Поток g^t называется расширением потока f^t, если существует непрерывное сюръективное отображение $h : \mathcal{T} \to \mathbb{T}^m$ такое, что

$$h \circ f^t = g^t \circ h.$$

Основной результат доклада — новое доказательство известного результата о приводимости линейных расширений квазипериодических потоков.

Теорема ([4]). *Для гиперболического линейного расширения существует минимальный поток g^t на компакте $\mathcal{T}$, являющийся расширением квазипериодического потока f^t такой, что система* (1) *приводится к блочно-диагональному виду линейным преобразованием* $L(g^t(\theta))$, $\theta \in \mathcal{T}$.

Автор выражает выражает благодарность РФФИ за финансовую поддержку этой работы, грант 12-01-00672а.

1. W. A. Coppel. Dichotomies in Stability Theory. Lect. Notes in Math., 629. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. В. О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем. В сб. Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев. Наукова думка. 1977.
3. Palmer K. J. Reducibility of almost periodic linear systems. Lect. Notes. Math. 846. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1981. 273–279.
4. Ellis R., Johnson R. A. Topological dynamics and linear differential systems. – J. Diff. Equat. 1982. V. 44. 21–39.

Нелінійні майже періодичні диференціальні та різницеві рівняння

В. Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

Нехай $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, E — довільний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$ і C^0 — банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E$. Позначимо через Ω область простору E, а через $\mathcal{K}$ — множину всіх не порожніх зв'язних компактних підмножин $K \subset \Omega$.

Розглянемо неперервне відображення $f : \mathbb{R} \times \Omega \to E$, що задовольняє умови:

1) $f(t, x)$ рівномірно неперервне по x на кожній множині $\mathbb{R} \times K$, де $K \in \mathcal{K}$;

2) $f(t, x)$ майже періодичне по t рівномірно по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$.

Цьому відображенню зіставимо диференціальне та різницеве рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$x(t + 1) = f(t, x(t)),\ t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Позначимо через $\mathcal{N}_1(f, K)$ і $\mathcal{N}_2(f, K)$, де $K \in \mathcal{K}$, множини всіх обмежених розв'язків $x = x(t)$ цих рівнянь відповідно, для кожного з яких замикання $\overline{R(x)}$ множини $R(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ у просторі E є підмножиною множини K і $\overline{R(x)} \neq K$.

Зафіксуємо елементи $x_1^* \in \mathcal{N}_1(f, K)$ і $x_2^* \in \mathcal{N}_2(f, K)$ та довільні числа $\varepsilon_i \in [0, r_i]$, $i = \overline{1, 2}$, де $r_i = \sup\left\{\|x - y\|_E : x \in \overline{R(x_i^*)},\ y \in K\right\}$. Нехай $\Omega_i(x_i^*, K, f, \varepsilon_i)$ — множина всіх елементів $y \in C^0$, для кожного з яких

$$x_i^*(t) + y(t) \in K,\quad t \in \mathbb{R},$$

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \big|\|y(t)\|_E - \varepsilon\big| = 0$$

і у випадку $i = 1$

$$\left\|\frac{d(x_1^*(t) + y(t))}{dt}\right\|_E \leq \sup_{s\in\mathbb{R},\ x\in K} \|f(s, x)\|_E,\quad t \in \mathbb{R}.$$

Визначимо функціонали $\Delta_i : \mathcal{N}_i(f, K) \to [0, +\infty)$, $i = \overline{1, 2}$, рівностями

$$\Delta_1(x_1^*, K, f, \varepsilon_1) = \inf_{y \in \Omega_1(x_1^*, K, f, \varepsilon_1)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(x_1^*(t) + y(t))}{dt} - f(t, x_1^*(t) + y(t)) \right\|_E ,$$

$$\Delta_2(x_2^*, K, f, \varepsilon_2) = \inf_{y \in \Omega_2(x_2^*, K, f, \varepsilon_2)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x_2^*(t+1) + y(t+1) - f(t, x_2^*(t) + y(t))\|_E .$$

Справджуються наступні твердження.

Теорема 1 ([1]). *Нехай K належить множині $\mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $x_1^* \in \mathcal{N}_1(f, K)$ рівняння (1) і деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення $\Delta_1(x_1^*, K, f, \varepsilon) > 0$ для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.*

Теорема 2 ([2]). *Нехай K належить множині $\mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $x_2^* \in \mathcal{N}_2(f, K)$ рівняння (2) і деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення $\Delta_2(x_2^*, K, f, \varepsilon) > 0$ для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.*

1. Слюсарчук В. Ю. Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – 65, № 2. – С. 307–312.
2. Слюсарчук В. Ю. Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – 16, № 1. – С. 118–124.

Про початкову задачу для системи з нефіксованими моментами імпульсної дії

Т. М. Сопронюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

sopronyuk@gmail.com

Розглядається система диференціальних рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau, x, \varepsilon), \quad \tau \neq \varepsilon \tau_j(x),$$
$$\Delta x|_{\tau = \varepsilon \tau_j(x)} = \varepsilon B(x), \tag{1}$$

де $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}, \tau = \varepsilon t \in I = [0, 1]$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, $\mathcal{D}$ — обмежена область, $\tau_j = \tau_j(\varepsilon)$ — розв'язок рівняння $\tau = \varepsilon h_j(x(\tau))$, $t_j = \tau_j/\varepsilon$, а поверхні $h_j(x), j \geq 1$, задовольняють умови

$$h_{j+1}(x) = h_j(x) + \theta, \quad h_1(x) \geq \theta_1, \quad \left\| \frac{\partial h_1(x)}{\partial x} \right\| \leq \theta_2, \quad x \in \mathcal{D},$$

з деякими додатними сталими $\theta, \theta_1, \theta_2$.

Припустимо, що $\dfrac{\partial h_1(x)}{\partial x}$ рівномірно неперервна по $x \in \mathcal{D}$ і

$$\frac{\partial h_1(x)}{\partial x} B(x) \leq -\theta_3 = const < 0, \quad x \in \mathcal{D}.$$

Нехай також для всіх $x', x'' \in \mathcal{D}$ рівномірно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \in I$ з деякою сталою θ_4 виконуються нерівності

$$||A(\tau, x', \varepsilon) - A(\tau, x'', \varepsilon)|| \leq \theta_4 ||x'' - x'||, \quad ||B(x') - B(x'')|| \leq \theta_4 ||x'' - x'||,$$

$$||A(\tau, x', \varepsilon))|| \le \theta_4, \; ||B(x')|| \le \theta_4.$$

Дослідження системи (1) зводиться до аналізу відповідної системи без імпульсної дії.

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = A(\tau, \bar{x}, \varepsilon) + \frac{B(\bar{x})}{\theta}. \qquad (2)$$

Такий підхід запропонований у роботі [1] при обгрунтованні методу усереднення по часу для систем стандартного вигляду з нефіксованими моментами імпульсної дії.

Грунтуючись на результатах, анонсованих в [2], знайдено умови, при яких існує таке досить мале додатне ε_0, що для кожних $\tau \in I, y \in \mathcal{D}_1$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконується оцінка

$$\|x(\tau, y, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, y, \varepsilon)\| \le \theta_5 \sqrt{\varepsilon}, \quad \theta_5 = \text{const}.$$

Тут $x(\tau, y, \varepsilon)$ та $\bar{x}(\tau, y, \varepsilon)$ — розв'язки систем відповідно (1) і (2) з початковою умовою

$$x|_{\tau=0} = \bar{x}|_{\tau=0} = y \in \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}.$$

1. Самойленко А. М. Метод усреднения в системах с толчками // Матем. физика.– 1971. – Т.9. – С.101–117.
2. Петришин Р. І., Дерев'янчук М. Я. Апроксимація розв'язків імпульсної системи розв'язками гладкої системи на відрізку і півосі // Всеукраїнська наукова конференція «Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці» присвячена 50-річчю кафедри прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича: всеукр. наук. конф., 11-13 червня 2012 р., Чернівці: тези допов. – Чернівці, 2012. – С. 123.

Автономные нетеровы краевые задачи в частном критическом случае

О. В. Старкова, Ан. С. Чуйко

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина

star-o@ukr.net

Исследована задача о нахождения решения нетеровой ($m \neq n$) краевой задачи

$$dz/dt = Az + f + \varepsilon Z(z, \varepsilon), \quad \ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \qquad (1)$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в решение $z_0(t) \in C^1[a, b^*]$ порождающей задачи

$$dz_0/dt = Az_0 + f, \;\; \ell z_0(\cdot) = \alpha, \;\; b^* = b(0), \;\; A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \;\; f \in \mathbb{R}^n. \qquad (2)$$

Функция $Z(z, \varepsilon)$ непрерывно-дифференцируема по $z(t, \varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируема по ε в окрестности нуля; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$– линейный и $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ — нелинейный векторный функционалы. Функционал $J(z(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ непрерывно-дифференцируем по неизвестной z и по ε в малой окрестности решения порождающей задачи и на отрезке $[0, \varepsilon_0]$.

Обозначим $(m \times 1)$-мерную матрицу $\mathfrak{B}_0 = P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[Az_0(\tau, c_0^*) + f](\cdot)\}$.

Теорема. *В критическом случае ($P_{Q^*} \neq 0$) для корня $c^* \in \mathbb{R}^{r+1}$ уравнения*

$$F(c^*) = P_{Q^*}\{\varphi_0(c^*) - \ell K[f_0(s, c^*)](\cdot)\} = 0, \; c^* = \text{col}\,(c_0^*, \; \beta^*) \in \mathbb{R}^{r+1}; \qquad (3)$$

$$\varphi_0(c^*) = \alpha\beta^* + J(z_0(\cdot, c_0^*), 0), \;\; f_0(t, c^*) = \beta^*[Az_0(t, c_0^*) + f] + Z(z_0(t, c_0^*), 0)$$

при условиях $F'_\beta(c^*) \neq 0$, $P_{\mathfrak{B}_0^*}$ *задача* (1) $P_{Q^*} = 0$, $P_{\mathfrak{B}_0^*} : \mathbb{R}^{r+1} \to N(\mathfrak{B}_0^*)$ *имеет по меньшей мере одно решение* $z(t, \varepsilon) \in C^1[a, b(\varepsilon)], C[0, \varepsilon_0]$, *при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в решение* $z_0(t, c_0^*)$ *порождающей задачи* (2).

Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n - r$, P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2), $K[f](t)$ — оператор Грина задачи Коши [1].

Для нахождения решения автономной краевой задачи (1) предложена итерационная схема, построенная по аналогии с методом наименьших квадратов [2]; в качестве примера построено периодическое решение уравнения Дюффинга.

1. Boichuk A. A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
2. Чуйко С. М., Старкова О. В. О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов. Нелінійні коливання, 2009, **12**, № 4, – С. 556–573.

Асимптотика та стійкість розв'язків лінійних систем різницевих рівнянь

І. І. Старун, Н. І. Старун

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, Ніжин, Україна

Starun_ivan@ukr.net

Розглядається система

$$x(t+1) = A(t)x(t), \qquad t = t_0, t_0 + 1, \ldots, \tag{1}$$

для якої вивчається питання про асимптотику та стійкість розв'язків при $t \to +\infty$. При цьому вихідним є відомість про асимптотичне представлення фундаментальної матриці так званої l-діагональної системи

$$y(t+1) = \Lambda(t)(E + H(t))y(t), \tag{2}$$

$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$, $H(t) = (h_{ij}(t))_1^n$, $\sum\limits_{t=t_0}^{\infty} |h_{ij}(t)| < \infty$, $\left|\frac{\lambda_i(t)}{\lambda_j(t)}\right| \leq 1$, чи $\left|\frac{\lambda_i(t)}{\lambda_j(t)}\right| \geq 1$, $t \geq T \geq t_0$:

$$Y(t) = \prod_{t=t_0}^{t-1} \Lambda(t)(E + \Phi(t)), \qquad \Phi(t) \to 0, \qquad t \to +\infty. \tag{3}$$

Ввівши в розгляд допоміжну систему:

$$\varepsilon x(t+1) = (W + \varepsilon(A(t) - W))\, x(t), \qquad W = \operatorname{diag}\{w_1, \ldots, w_n\},$$

$0 < w_1 < \ldots < w_n < 1$, яка при $\varepsilon = 1$ співпадає з (1), за допомогою перетворення:

$$x(t) = Q_m(t, \varepsilon)y(t) = \left(E + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k Q^{(k)}(t)\right) y(t)$$

приводимо її (поклавши $\varepsilon = 1$ наприкінці) до l-діагонального вигляду:

$$y(t+1) = \Lambda_m(t, 1)(E + C_m(t, 1))y(t),$$

$$\Lambda_m(t,1) = W + \sum_{k=1}^{m} \Lambda^{(k)}(t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(t,1), \ldots, \lambda_n(t,1)\}.$$

Тоді фундаментальна матриця системи (1) матиме представлення:

$$X(t) = Q_m(t,1)\left(\prod_{t=t_0}^{t-1} \Lambda_m(t,1)(E+\Phi(t))\right), \qquad \Phi(t) \to 0, \qquad t \to +\infty. \tag{4}$$

Якщо при цьому $\forall|\lambda_j(t,1)| \le 1$, $j=\overline{1,n}$, то система (1) стійка, якщо ж $\forall|\lambda_j(t,1)| < 1$ — асимптотично стійка, якщо ж $\exists\lambda_k(t,1)$ таке, що $\forall|\lambda_k(t,1)| > 1$, то система нестійка.

Збурення фазових змінних лінійних розширень динамічних систем

Н. В. Степаненко
Національний Технічний Університет України "КПІ", Київ, Україна
pustelnyck@kievnet.com.ua

Розглядаються системи диференціальних рівнянь вигляду

$$d\psi/_{dt} = \omega(\psi), dx/_{dt} = A(\psi)x, x \in R^n, \psi \in R^m, \tag{1}$$

векторна функція $\omega(\psi)$і матрична функція $A(\psi)$ визначені, неперервні і обмежені на R^m. Крім того припускається, що вектор-функція $\omega(\psi)$ локально задовольняє умові Ліпшіца. Коротко позначаємо $\omega(\psi) \in C^0_{Lip}(R^m)$, $A(\psi) \in C^0(R^m)$.

Відомо, що якщо існує квадратичнаформа $V = \langle S(\psi)x, x\rangle$з невиродженою, неперервно диференційовною і обмеженою на R^m симетричною матрицею коефіцієнтів $S(\psi)$, похідна якої в силу системи (1) є додатно визначеною:

$$\left\langle \left[\frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\omega(\psi) + S(\psi)A(\psi) + A^T(\psi)S(\psi)\right]x, x\right\rangle \ge \|x\|^2, \tag{2}$$

то система (1) має єдину функцію Гріна–Самойленка. Такі системи (1) прийнято називати регулярними. У випадку, коли матриця коєфіцієнтів квадратичної форми $V = \langle S(\psi)x, x\rangle$ є постійною $S(\psi) = S = const$, то нерівність (2) буде виконуватись при будь-яких $\omega(\psi) \in C^0_{Lip}(R^m)$, а це значить, що система (1) буде регулярною при кожній функції $\omega(\psi)$. Відомо, що існують такі класи матриць

$A(\psi) \in C^0(R^m)$, що системи (1) є регулярними при кожній фіксованій функції $\omega(\psi) \in C^0_{Lip}(R^m)$, а постійної матриці S, яка б задовольняла нерівності (2) не існує. В доповіді пропонується розглянути системи вигляду

$$d\psi/_{dt} = \omega(\psi), \psi \in R^m \;, \quad dx/_{dt} = \begin{pmatrix} \sin^{2l-1}\sigma(\psi) & \cos^{2k}\sigma(\psi) \\ \cos^{2p}\sigma(\psi) & -\sin^{2l-1}\sigma(\psi) \end{pmatrix} x, x \in R^2, \tag{3}$$

$l, k, p \in N$, $\sigma(\psi)$- деяка скалярна функція, неперервно диференційовна на R^m, частинні похідні першого порядку $\partial\sigma(\psi)/_{\partial\psi_i}$ є обмеженими на R^m. Зауважимо, що система (3) буде регулярною при будь-яких змінах вектор-функції $\omega(\psi) \in !^0_{Lip}(R^m)$. При цьому , якщо функція $\sigma(\psi)$ приймає значення $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$, то не існує постійної матриці $S(\psi) = S$, яка б задовольняла умові (2). Пропонується систему (3) узагальнити:

$$d\psi/_{dt} = \omega(\psi), \psi \in R^m \quad , \quad dx/_{dt} = \begin{pmatrix} A\sin^{2l-1}\sigma(\psi) & B_2\cos^{2k}\sigma(\psi) \\ B_1\cos^{2p}\sigma(\psi) & -A^T\sin^{2l-1}\sigma(\psi) \end{pmatrix} x, x \in R^{2n},$$

де $A,\ B_1,\ B_2$ — деякі постійні матриці.

1. Mitropolsky Yu., Samoilenko A., Kulik V. Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems // Taylor & Francis Inc, London, 2003.
2. Кулик В. Л, Кулик А. Н., Степаненко Н. В. Дополнение слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных // Математический журнал. Алматы. 2011. Том 11. №1 (39). – С. 74–86.

Лінійні нетерові крайові задачі для динамічних систем з імпульсним впливом на часовій шкалі

О. П. Страх

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

strah_o@ukr.net

Розглядається крайова задача наступного вигляду:

$$\begin{cases} z^{\Delta} = A(t)z + f(t), \quad t \in [a;b]_{\mathbb{T}_+}, & t \neq t_k, \quad t_k \in (a;b)_{\mathbb{T}_+}, \\ z(t_k+0) = z(t_k) + B_k z(t_k) + a_k, & k = 1, 2, \ldots, p \\ lz = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{1}$$

де $\mathbb{T}$ — задана часова шкала, $\mathbb{T}_+ := [0;\infty)_{\mathbb{T}}$, $z(t) \in C^1_{rd}\big([a;b]_{\mathbb{T}_+};\mathbb{R}^n\big)$ [1, p. 16], $0 \le a < b$, $A \in \mathcal{R}\big([a;b]_{\mathbb{T}_+}; M_n(\mathbb{R})\big)$ — регресивна [1, p. 190] матриця, компоненти якої є rd-неперервними функціями, $B_k \in M_n(\mathbb{R})$, $k = \overline{1,p}$, $\{a_k\}_{k=1}^p \in l^p(\mathbb{R}^n)$ [2], $f(t) \in C_{rd}\big([a;b]_{\mathbb{T}_+}/\{t_k\};\ \mathbb{R}^n\big)$, l — лінійний векторний функціонал $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Використовуючи відомі результати [3], можна показати що дана задача є нетеровою та знайти необхідні й достатні умови її розв'язності. Для цього, як і у випадку $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ [3, p. 196], знаходимо $n \times m$-вимірну матрицю $Q = lS_A(\cdot, a)$ та будуємо ортопроектори на ядро і коядро цієї матриці: $P_Q\colon \mathbb{R}^n \to N(Q)$, $P_{Q^*}\colon \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$ відповідно. Доведена наступна теорема.

Теорема. *Якщо* $A(t) \in \mathcal{R}\big([a;b]_{\mathbb{T}_+}; M_n(\mathbb{R})\big)$, $B_k \in M_n(\mathbb{R})$ $k = \overline{1,p}$, *то неоднорідна крайова задача* (1) *є розв'язною тоді й тільки тоді, коли неоднорідності* $f(t) \in C_{rd}\big([a;b]_{\mathbb{T}_+}/\{t_k\};\mathbb{R}^n\big)$, $\{a_k\}_{k=1}^p \in l^p(\mathbb{R}^n)$ *та* $\alpha \in \mathbb{R}^m$ *задовольняють умову*

$$P_{Q^*_d}(\alpha - lF) = 0_d, \tag{2}$$

де $P_{Q^*_d}$ — $d \times m$*-вимірна матриця, що складається з* d *лінійно незалежних рядків матриці* P_{Q^*}, $F(t) = \int\limits_a^t S_A(t,\sigma(s))f(s)\,\Delta s + \sum_{a<t_j<t} S_A(t,t_j+0)a_j$. *У цьому випадку задача* (1) *матиме* r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків*:

$$z(t;c_r) = S_A(t,a)P_{Q_r}c_r + G\left([f,a_k,\alpha]\right)(t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r, \tag{3}$$

де $S_A(t,a)$ — *фундаментальна матриця відповідної однорідної імпульсної динамічної системи* [2], $S_A(t,s)$ — *матриця імпульсних переходів (аналог матриці Коші для випадку*

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ [4]), *що має відповідні властивості* [2], P_{Q_r} *—* $n \times r$*-вимірна матриця, що складається з* r *лінійно незалежних стовпців матриці* P_Q, Q^+ *—* $m \times n$*-вимірна матриця, що є єдиною псевдооберненою за Муром–Пенроузом* [3] *для матриці* Q, $G\left([f, a_k, \alpha]\right)(t) := F(t) + S_A(t,a)Q^+\left\{\alpha - l\int_a^{\cdot} S_A(\cdot,\sigma(s))f(s)\,\Delta s - l\sum_{a<t_j<\cdot} S_A(\cdot,t_j+0)a_j\right\}$ *— узагальнений оператор Гріна неоднорідної крайової задачі* (1).

1. M. Bohner and A. Peterson. Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. – Boston, MA, Birkhäuser Boston Inc., 2001.
2. V. Lupulescu, A. Zada. Linear impulsive dynamic systems on time scales./ Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, – 2010, № 11 – P. 1–30.
3. A. A. Boichuk and A. M. Samoilenko. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. –Boston: VSP, Utrecht, 2004.
4. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987.

Асимптотика розв'язку задачі оптимального керування для виродженої сингулярно збуреної системи

О. В. Тарасенко[1], В. П. Яковець[2]

[1]Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, Ніжин, Україна

[2]Державний вищий навчальний заклад "Університет менеджменту освіти", Київ, Україна

oxana.tarasenko@gmail.com, vasyl.yakovets@gmail.com

Досліджується процес, який описується виродженою системою диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u,$$

де $x(t,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$ — шукані n-вимірний вектор стану та m-вимірний вектор керування відповідно, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр ($\varepsilon_0 \ll 1$); $h \in N$; $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ — дійсні квадратні матриці n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$ — $(n \times m)$-матриця.

Задача полягає у знаходженні такого керування $u(t,\varepsilon)$, під дією якого система переходить із стану

$$x(0,\varepsilon) = x_1$$

в стан

$$x(T,\varepsilon) = x_2$$

за фіксований проміжок часу T, мінімізуючи квадратичний функціонал

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int_0^T (D(t,\varepsilon)u,u)\,dt \to \min_u,$$

де $D(t,\varepsilon)$ — матриця m-го порядку.

При цьому передбачається виконання наступних умов:

1° матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра, коефіцієнти яких нескінченно диференційовні на $[0;T]$;

2° матриця $D(t,\varepsilon)$ додатно визначена на $[0;T]$ і $\det D_0(t) \neq 0$, $\forall t \in [0;T]$;

3° $\det B(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0;T]$;

4° в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярна на $[0;T]$ і має $n-1$ простих скінченних елементарних дільників $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, та один — нескінченний;

5° $\mathrm{Re}\lambda_i(t) < 0$, $i = \overline{1, n-1}$;

6° $\lambda_i(t) + \lambda_j(t) \neq 0$, $i, j = \overline{1, n-1}$;

7° область допустимих значень для керування $u(t, \varepsilon)$ збігається з усім заданим m–вимірним простором.

Використовуючи теорію асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем з виродженнями, викладену в [1], запропоновано алгоритм побудови псевдорозв'язку крайової задачі, до якої після застосування принципу максимуму Л. С. Понтрягіна зводиться дана задача оптимального керування. Цим самим знайдено керування $u(t, \varepsilon)$, за допомогою якого система може бути переведена із стану, досить близького до x_1, у стан близький до x_2.

1. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.

Построение решений одной вырожденной специальной системы связанной с ортогональными многочленами двух переменных

Ж. Н. Тасмамбетов

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

tasmam@rambler.ru

Теорию вырожденной гипергеометрической функции и соответствующего ей вырожденного гипергеометрического уравнения разрабатывали Куммер, Гумберт, Э.Г.Уиттекер, Ф.Трикоми и др. Были установлены основные интегральные представления, элементарные соотношения между построенными решениями, многие важные свойства и приложения во многих разделах науки и техники. В случае двух переменных решение аналогичных задач намного усложняется. Если в случае функций одной переменной существует только одна функция $\Phi(a, c; x)$ представленное в виде ряда Куммера

$$y = \Phi(a, c; x) = 1 + \frac{a}{c} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \cdot \frac{x^2}{2!} + ..., \tag{1}$$

то Горн доказал, что существует 20 вырожденных гипергеометрических рядов двух переменных. Каждый из этих рядов удовлетворяет некоторой системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Они по сравнению с обыкновенным вырожденным гипергеометрическим уравнением недостаточно изучены. До сих пор, не удается определить всю фундаментальную систему решения каждого из этих 20 систем. Недостаточно изучена связь этих решений с ортогональными многочленами двух переменных.

В данной работе рассматривается специальная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{gathered} x \cdot Z_{xx} + (\gamma - x) \cdot Z_x + (k-1) \cdot y \cdot Z_y + n \cdot Z = 0, \\ y \cdot Z_{yy} + (\gamma' - y) \cdot Z_y + (k-1) \cdot x \cdot Z_x + m \cdot Z = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где γ, γ', k, n и m —некоторые постоянные, $Z = Z(x, y)$ — общая неизвестная.

Требуется установить из (2) ряд систем, имеющих решения в виде вырожденных гипергеометрических функций или ортогональных многочленов двух переменных. Предполагается также изучения условии существования логарифмических решении.

Предполагаем систему (2) совместной. Особенностями являются пары $(0,0)$, $(0,\infty)$, $(\infty,0)$ и (∞,∞) и решения вблизи этих особенностей будут построены в виде обобщенных степенных рядов двух переменных. Доказаны ряд теорем, в частности.

Теорема. Пусть задана система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (2) и $\gamma \neq 0,-1,-2,...;\gamma' \neq 0,-1,-2,...;k \neq 0, n$ и m — некоторые постоянные. Тогда система (2) имеет решение тогда и только тогда, когда постоянные n и m равны между собой.

Изучены ряд частных случаев, при:
1. $k=0, \gamma=\alpha+1(\alpha>-1), \gamma'=\beta+1(\beta>-1), n=m=-\lambda$.
2. $\alpha=0, \beta=0$ и $\lambda=-n$ ($n>0$ — целое число).
3. $\alpha>-1,\ \beta>-1,\ \alpha\neq 0,\ \beta\neq 0,\ \lambda_1=-n,\ \lambda_2=-m$ ($n>0,\ m>0$ — целые числа).

Об одной задаче о фазовом переходе

Ж. О. Тахиров[1], М. С Расулов[2]
[1]ТГПУ им Низами, Ташкент, Узбекистан
[2]Институт математики при НУУз, Ташкент, Узбекистан
prof.takhirov@yahoo.com, m.rasulov@ymail.com

Задачи со свободной границей с учетом конвекции исследованы многими авторами (см. напр. [1,2]). Надо отметить, что учет сжимаемости при построении математической модели требует основательного изучения. В работе [3] исследована задача, когда в уравнении баланса энергии для жидкой фазы пренебрегли слагаемыми, содержащими скорость.

В настоящей заметке для системы уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\ \ (x,t)\in\Omega=\{(x,t):\ 0<x<s(t)\ ,0<t<T\} \tag{1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial p}{\partial x},\quad p=R\rho\upsilon,\ \ (x,t)\in\Omega, \tag{2}$$

$$\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=k\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2},\quad (x,t)\in\Omega, \tag{3}$$

рассматривается задача со свободной границей

$$\rho\left(s\left(t\right),t\right)=c,\quad t\in[0,T], \tag{4}$$

$$u\left(s\left(t\right),t\right)=0,\ \ t\in[0,T], \tag{5}$$

$$\upsilon\left(s\left(t\right),t\right)=c,\quad t\in[0,T], \tag{6}$$

$$L\rho\left(s\left(t\right),t\right)\frac{ds}{dt}=-k\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\left(s\left(t\right),t\right),\ \ t\in[0,T], \tag{7}$$

$$0<s\left(0\right)=s_0, \tag{8}$$

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(x\right),\ \ x\in[0,\ s_0], \tag{9}$$

$$\upsilon\left(x,0\right)=\upsilon_0\left(x\right),\ \rho\left(x,0\right)=\rho_0\left(x\right),\quad x\in[0,\ s_0], \tag{10}$$

$$u(0,t) = 0, v_x(0,t) = v_1(t), \quad t \in [0, T]. \tag{11}$$

Здесь $\rho(x,t)$, $u(x,t)$, $p(x,t)$ и $v(x,t)$ — плотность, скорость, давление и абсолютная температура газа, μ, R, k, L, c — положительные константы. Задача исследуются по следующий схеме. Используя результат работ [3, 4] сначала устанавливаются априорние оценки для искомых функций, а затем аналогично методам [5] доказаны теоремы единственности и существования.

1. Базалий Е. В., Дегтярев С. П. О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости, Мат. Сборник, 1987, 132, 3–19.
2. Костиков А. А. Термодиффузионная задача Стефана при наличии конвекции, Укр. мат. журн, 1992, 44, 269–274.
3. Калиев И. А. Однофазная задача фазового перехода типа твердое телосжимая жидкость, Сиб. журн. инд. мат, 2000, 3, 97–114.
4. Вайгант В. А. Неоднородные граничные задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа. Динами сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1990.
5. Мейрманов А М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986.

Об одной нелокальной задаче для вырождающихся параболических уравнений

Ж. О. Тахиров[1], Р. Н. Тураев[2]

[1]ТГПУ им. Низами, Ташкент, Узбекистан

[2]Институт математики при НУУз, Ташкент, Узбекистан

prof.takhirov@yahoo.com, rasul.turaev@mail.ru

Рассмотрим параболическое уравнение вида

$$u_t = (k(u)u_x + b(u))_x, \tag{1}$$

где k(u) —коэффициент нелинейной теплопроводности, зависящей от температуры $u = u(t,x) \geq 0$, причем $k(u)\epsilon C^2((0,\infty)) \cap C([0,\infty]),\ k(u) > 0$ при $u > 0, \quad k(0) = 0$.

Если начальные и граничные условия таковы, что уравнение (1) не вырождается, то вопросы существования и единственности решений основных краевых задач и задачи Коши подробно изучены во многих работах (см. напр. [1, 2]).

Когда изучаются классические решения, то не было необходимости оговаривать непрерывность теплового потока $w(t,x) = -k(u(t,x))u_x(t,x)$. Это условие, как и непрерывность самого решения (температуры), является естественным физическим требованием к постановке задачи.(см.напр.[3]).

Рассмотрим для уравнения (1) в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, |x| < l\}$ задачу с нелокальными граничными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x),\ -l \leq x \leq l,\ \ u(-l,t) = u(l,t),\ 0 \leq t \leq T,\ \ u_x(-l,t) = u_x(l,t),\ 0 \leq t \leq T. \tag{2}$$

В случае, когда уравнение (1) не вырождается задача (1)–(2) исследована в работе [4]. Надо отметить, что, если начальные и граничные условия влекут за собой вырождение уравнения (1), указанные результаты неприменимы.

Обобщенное решение может не иметь всюду производных, входящих в уравнение, однако в точках вырождения она обладает определенной регулярностью (тепловой поток непрерывен).

Сначала доказывается единственность обобщенного решения.

Далее обсуждается вопрос существование решения. Известно, что обобщенное решение $u(t, x)$ задачи с гладкими данными единственно и может быть получено как предел при $n \to \infty$ монотонной последовательности гладких ограниченных положительных решений $u_n(t, x)$ той же задачи.

Следовательно, обобщенное решение в окрестности всех точек D, где $u > 0$, является классическим и теряет гладкость только на линиях вырождения. При этом непрерывность теплового потока $-k(u)u_x(t, x)$ устанавливается с помощью дополнительных технических приемов.

1. Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Тр. ММО, 1967, Т. 16, С. 329-346.
2. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М., Наука,1985, с. 376.
3. Олейник О. А. Об уравнениях типа уравнений нестационарной фильтрации // ДАН СССР, 1957, Т. 113. N 6, С. 1210–1213.
4. Dzhuraev T. D., Takhirov J. O. A problem for quasilinear parabolic equation with nonlocal boundary conditions // Georg. math. J. 1995, N 6. v. 5. pp. 421–428.

Существование изолированного решения нелинейной нелокальной краевой задачи для одной системы гиперболических уравнений

С. М. Темешева

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

nur15@mail.ru

На $\bar{\Omega} = [0, \omega] \times [0,T]$ рассматривается нелинейная нелокальная краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f\Big(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad u \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

$$g(x, u'_x(x, 0), u'_x(x, T)) = 0, \tag{3}$$

где $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $g : [0, \omega] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ непрерывны.

С помощью замены $v(x, t) = u'_x(x, t)$ задача (1)-(3) сводится к эквивалентной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f\Big(x, t, \int\limits_0^x v(\xi, t) d\xi, v\Big), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad v \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$g\left(x, v(x, 0), v(x, T)\right) = 0, \quad x \in [0, \omega]. \tag{5}$$

Задача (4),(5) исследуется методом параметризации [1]. По шагу $h > 0 : Nh = T$ множество $\bar{\Omega}$ линиями $t = (r - 1)h$, $r = \overline{1, N}$ разбивается на N части. Значения искомой функции $v(x, t)$ на этих линиях вводятся как функциональные параметры $\lambda_r(x)$, $r = \overline{1, N}$, т.е. $\lambda_r(x) = v(x, (r - 1)h)$.

Используя краевое условие (5) и условия непрерывности решений во внутренних линиях разбиения множества $\bar{\Omega}$ составляется однопараметрическое семейство систем неявных нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно функции $\lambda_r(x)$, $r = \overline{1, N}$. Параметром семейства является шаг $h > 0$.

Вводится определение “изолированного” решения нелинейной нелокальной краевой задачи (1)–(3).

Устанавливается взаимосвязь между разрешимостью построенной системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра при некотором значений параметра $h > 0$ и существованием “изолированного” решения.

1. Джумабаев Д. С., Темешева С. М. Метод параметризации решения нелинейных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. No 1. С. 39–63.

Про побудову інваріантних торів зліченних систем еволюційних рівнянь

Ю. В. Теплінський

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Україна

yuriy-teplinsky@yandex.ru

В останні десятиліття метод функції Гріна–Самойленка плідно застосовується до вивчення інваріантних многовидів різного виду рівнянь у різноманітних просторах, зокрема, диференціальних, диференціально-різницевих та різницевих рівнянь у банахових просторах обмежених числових послідовностей $\mathfrak{M}$ [1–5]. У цьому повідомленні ми демонструємо особливості застосування цього методу стосовно дослідження інваріантних торів цих систем у лінійному випадку, що є основою для вивчення інваріантних торів нелінійних рівнянь вказаних вище типів.

Розглянуто такі системи рівнянь:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + c(\varphi); \tag{1}$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n), \quad x_{n+1} = P(\varphi_{n+p})x_n + c(\varphi_{n+g+1}), \quad n \in Z; \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx(t)}{dt} = B(\varphi,t)x(t+\Delta) + c(\varphi,t). \tag{3}$$

Тут $\{\varphi, x\} \subset \mathfrak{M}$; $P(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]_{i,j=1}^{\infty}$ та $B(\varphi,t) = [b_{ij}(\varphi,t)]_{i,j=1}^{\infty}$ — нескінченні матриці; $a(\varphi)$, $c(\varphi)$ та $c(\varphi,t)$ — вектор-функції відповідних розмірностей; елементи $b_{ij}(y_1(\varphi,t), y_2(\varphi,t), \dots)$ матриці $B(\varphi,t)$ та координати $c_i(\varphi,t) = c_i(z_1(\varphi,t), z_2(\varphi,t), \dots)$ функції $c(\varphi,t)$ визначаються рівностями $y_i(\varphi,t) = \varphi_{i_{t+\Gamma_i}}(\varphi)$ та $z_i(\varphi,t) = \varphi_{i_{t+\delta_i}}(\varphi)$ відповідно, $x(t+\Delta) = (x_1(t+\Delta_1), x_2(t+\Delta_2), \dots)$; Γ_i, δ_i та Δ_i — довільні фіксовані дійсні числа, $i = 1, 2, \dots$; Z — множина цілих чисел, p і g – цілочислові параметри; $\varphi = \varphi_t(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, є розв'язком першого рівняння систем (1) або (3).

Накладаючи на коефіцієнти систем (1) – (3) традиційні умови періодичності та інтерпретуючи координати вектора φ як кутові, вважаємо, що ці системи рівнянь визначені на декартовому добутку $\mathfrak{M} \times \mathcal{T}_\infty$, де $\mathcal{T}_\infty$ — нескінченновимірний тор.

Обговорюються достатні умови існування інваріантних торів систем рівнянь (1)–(3), а для системи

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n), \quad x_{n+1} = P(\varphi_n)x_n + c(\varphi_n), \quad n \in Z,$$

додатково розглянуто вироджені випадки, при яких інваріантного тору цієї системи може не існувати, проте для неї існує напівінваріантний тор.

1. Samoilenko A. M. and Teplinskii Yu. V. Countable Systems of Differential Equations. – Utrecht-Boston: VSP, 2003.

2. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В. Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2008.
3. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В., Пасюк К. В. Про існування інваріантних торів зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Нелінійні коливання. – 2009. – 12, №3. – С. 347–367.
4. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В., Пасюк К. В. Про існування нескінченновимірних інваріантних торів нелінійних зліченних систем диференціально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2010. – 13, № 2. – С. 253–271.
5. Самойленко А. М., Теплінський Ю. В., Пасюк К. В. Побудова нескінченновимірного інваріантного тору зліченної системи лінійних диференціально-різницевих рівнянь методом укорочення її за кутовою змінною // Нелінійні коливання. – 2011. – 14, № 2. – С. 267-280.

О построении множества управлений в стохастической обратной задаче

М. И. Тлеубергенов

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

marat207@mail.ru

Рассматривается задача восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито по заданным свойствам движения, которые зависят лишь от части переменных. Определяется множество управлений, обеспечивающих необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В работе [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ [2,3 и др.]. В работах [4–6] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{gathered}\dot{x} = f(x,y,t), \quad x \in R^n, \quad \dot{y} = g(x,y,z,t), \quad y \in R^p, \\ \dot{z} = h(x,y,z,t) + D(x,y,z,\ t)u + \sigma(x,y,z,t)\dot{\xi}, \\ z \in R^l,\ u \in R^r,\ \xi \in R^k.\end{gathered} \tag{1}$$

Требуется определить множество управлений $\{u = u(x,y,z,t)\}$ и множество матриц диффузии $\{\sigma(x,y,z,t)\}$ по заданному интегральному многообразию $\Lambda(t)$:

$$\begin{gathered}\lambda_1(x,t) = 0, \quad \lambda_1 \in R^{m_1}, \quad \lambda_1 \in C^{33}_{xt}, \\ \lambda_2(x,y,t) = 0, \quad \lambda_2 \in R^{m_2}, \quad \lambda_2 \in C^{222}_{xyt}, \\ m_1 + m_2 = m.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\{\xi_1(t,\omega),...,\xi_k(t,\omega)\}$ — система независимых винеровских процессов. Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma \equiv 0$) достаточно полно исследована в [3, с. 27], а стохастический случай задачи восстановления с исходным уравнением Ито второго порядка $\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)u + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}$ и заданным множеством вида $\Lambda(t) : \lambda(x,\dot{x},t) = 0,\ \lambda \in R^m$ — в [6]. В предположении $f \in C^{222}_{xyt},\ g \in C^{1121}_{xyzt}$ с использованием обозначений из [3, 6] доказывается:

Теорема. *Для того чтобы система уравнений* (1) *имела заданное интегральное многообразие* (2) *необходимо и достаточно, чтобы множество управлений* $\{u\}$ *имело вид* $\{u\} = \{\tilde{u}\}\bigcap\{\tilde{\tilde{u}}\}$, *а множество матриц диффузий — вид* $\{\sigma\} = \{\tilde{\sigma}\}\bigcap\{\tilde{\tilde{\sigma}}\}$, *где* $\tilde{u} = s_1[H_1C_1] + (H_1)^+(A_1 - G_1)$, $\tilde{\tilde{u}} = s_2[H_2C_2] + (H_2)^+(A_2 - G_2)$, *а столбцы матриц* $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tilde{\sigma}}$ *имеют соответственно вид* $\tilde{\sigma}_i = s_3[H_3C_1] + (H_3)^+B_{1i}$, $\tilde{\tilde{\sigma}}_i = s_4[H_4C_4] + (H_4)^+B_{2i}$, $i = \overline{1,k}$.

1. Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. М., 1952. Т. 10. В. 6. С. 659–670.
2. Галиуллин А. С. Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986.
3. Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. Уравнения программных движений. – М.: Изд-во РУДН, 1986.
4. Тлеубергенов М. И. Об обратной стохастической задаче динамики //Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика". М., 1999. № 1. С. 48–51.
5. Тлеубергенов М. И. Об обратной стохастической задаче замыкания // Доклады МН-АН РК. Алматы. 1999. № 1. С. 53–60.
6. Тлеубергенов М. И. Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем //Дифференциальные уравнения. М., 2001. Т. 37. № 5. С. 714–716.

О связях между решениями одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом

И. А. Уварова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
sibirochka@ngs.ru

Наши исследования посвящены изучению связей между решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом. Ранее (см., например, [1, 2] и обзорную статью [3]) были введены некоторые классы систем вида

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F_n(t, x), \quad n \gg 1,$$

для которых приближенное нахождение компонент решений можно свести к решению скалярного уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), \quad t > \tau. \tag{1}$$

В данной работе мы рассматриваем систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -n\varphi_1(x)x_1 + g(t, x_n), \quad t > 0, \\ \dfrac{dx_j}{dt} = n\varphi_{j-1}(x)x_{j-1} - n\varphi_j(x)x_j, \quad j = 2, \dots, n-1, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = n\varphi_{n-1}(x)x_{n-1} - \theta x_n. \end{cases} \tag{2}$$

Опираясь на методы, предложенные Г. В. Демиденко, нами сформулированы условия на функции $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n-1$, при которых последняя компонента $x_n(t)$ решения системы (2) при $n \gg 1$ является приближенным решением уравнения с запаздывающим аргументом (1).

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (соглашение № 14.B37.21.0355), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-31030, № 13-01-00329) и Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80).

1. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом. Сиб. мат. журн., 2006, Т. 47, № 1, с. 58–68.
2. Демиденко Г. В. Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом. Сиб. мат. журн., 2012, Т. 53, № 6, с. 1274–1282.
3. Демиденко Г. В. О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом. Итоги науки. Юг России. Сер.: Матем. форум, 2011, Т. 5, с. 45–56.

Аналітичні розв'язки однієї хаотичної системи з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу

Ю. В. Федоренко, С. С. Мясін

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

juliamfed@gmail.com, myasinsergey@gmail.com

Відомо, що диференціальні рівняння з імпульсною дією можуть допускати складну (хаотичну, в сенсі додатності топологічної ентропії) поведінку розв'язків, зокрема, мати широкий спектр періодичних розв'язків [1, 2]. При цьому отримати аналітичне представлення розв'язків хаотичних систем вдається лише в окремих випадках. В доповіді для рівняння математичного маятника з нелінійною імпульсною дією (типу логістичного відображення) в нефіксовані моменти часу, яке має хаотичну поведінку розв'язків, побудовано аналітичне представлення його розв'язків.

Крім того, в доповіді розглянуто питання співіснування періодичних розв'язків рівняння математичного маятника з нелінійною імпульсною дією, які розрізняються як за періодами, так і за типами. Під типом розуміємо взаємне розташування значень періодичного розв'язку в точках локальних екстремумів.

Якщо періодичні розв'язки розрізняти за періодами, то їх співіснування пов'язане з порядком Шарковського [3] на множині на натуральних чисел, а саме

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ ... \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ ... \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ ... \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Так, якщо динамічна система, що породжена неперервним відображенням прямої в себе, має періодичну траєкторію періоду n, то вона має і періодичну траєкторію з будь-яким періодом n', де $n \succ n'$.

Представлено клас хаотичних систем з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу, для якого існує дійсне число α таке, що період будь-якого періодичного розв'язку системи дорівнює αm, де m — натуральне число, що залежить від періодичного розв'язку, а співіснування періодів періодичних розв'язків системи описує наступний аналог порядку Шарковського: якщо система має періодичний розв'язок періоду αm, то вона має і періодичний розв'язок з будь-яким періодом $\alpha m'$, де $m \succ m'$.

Для опису співіснування періодичних розв'язків різних типів деяких класів хаотичних систем з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу використовуються результати комбінаторної динаміки представлені, наприклад, в [4].

1. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев : Вища школа, 1987.
2. Самойленко А. М., Самойленко В. Г., Собчук В. В. Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією. Укр. матем. журн, 1999, т. 51, № 6, 827–834.

3. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя. Укр. матем. журн, 1964, т. 16, № 1, 61–71.
4. Fedorenko V. V., Sharkovsky A. N. Homoclinic trajectories in one-dimensional dynamics. J. of Difference Eq. and Appl., 2012, v. 18, № 4, 579–588.

Проекційно-ітеративний метод для диференціальних рівнянь з обмеженнями

В. А. Ферук
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
feruk.viktor@gmail.com

Розглядається застосування проекційно-ітеративного методу до задачі з обмеженнями

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = f(t) + C(t)\lambda, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(0) = \gamma + Dx(T), \quad \int\limits_0^T S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{2}$$

де $P(t)$, $C(t)$ та $S(t)$ — матриці розмірності $m \times m$, $m \times l$ та $l \times m$ відповідно, елементи яких сумовні з квадратом на відрізку $[0,T]$, причому стовпці матриці $C(t)$ є лінійно незалежними, D — стала $(m \times m)$-матриця, $f \in L_2([0,T],\mathbb{R}^m)$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$, $\gamma \in \mathbb{R}^m$.

Розглядається питання застосування до поставленої задачі методів проекційно-ітеративних типу. Зокрема пропонується метод, суть якого полягає у тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку задачі (1), (2) визначаємо за формулами

$$\frac{dx_k}{dt} + A(t)x_k = y_k(t), \quad x_k(0) = \gamma + Dx_k(T), \tag{3}$$

$$y_k(t) = C(t)\lambda_k + f(t) + B(t)z_k(t), \tag{4}$$

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + \delta_k(t), \quad k \geq 1. \tag{5}$$

Функція $\delta_k(t)$ — це розв'язок крайової задачі

$$\frac{d\delta_k}{dt} + A(t)\delta_k = \Phi(t)\mu_k, \quad \delta_k(0) = D\delta_k(T), \tag{6}$$

а невідомі параметри $\lambda_k \in \mathbb{R}^l$ та $\mu_k \in \mathbb{R}^n$ визначаються з умов

$$\int\limits_0^T S(t)x_k(t)dt = \alpha, \quad \int\limits_0^T \Psi(t)(y_k(t) - y_{k-1}(t) - \Phi(t)\mu_k)dt = 0. \tag{7}$$

Встановлюються умови збіжності та оцінки похибки проекційно-ітеративного методу (3)–(7).

Критерій Михайлова для лінійного диференціального рівняння зі сталими комплексними коефіцієнтами

З. Ю. Філєр, О. І. Музиченко, А. С. Чуйкова

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кіровоград, Україна

filier@rambler.ru, Anytusinichka@mail.ru

Запропонований З. Ю. Філєром у 1980 році метод фінітизації можна використовувати для встановлення стійкості ДР з дійсними коефіцієнтами, комплексними та ДР із запізненнями.

В теорії лінійних диференціальних рівнянь (ДР) зі сталими комплексними коефіцієнтами [1] частинні розв'язки однорідного рівняння шукаються у вигляді $e^{\lambda x}$. ДР $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k + ib_k)y^{(k)} = 0$ при сталих $a_k, b_k \in R$ приводять до характеристичного рівняння $f(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k + ib_r)\lambda^k = 0$. За принципом аргументу з ТФКЗ отримуємо умову асимптотичної стійкості, як умову відсутності коренів $f(\lambda)$ в правій півплощині, рівність приросту аргументу на діаметрі [-R,R] та на правому півколі радіусу R, $\lambda = i\omega$ при $R \to \infty$ отримуємо $u = Ref(i\omega)$ і $v = Imf(i\omega)$:

$$u = (a_0 - b_1\omega) - (a_2\omega^2 - b_3\omega^3) + ..., v = (b_0 + a_1\omega) - (b_2\omega^2 + a_3\omega^3) + ... \tag{1}$$

Криві $y = u(\omega), v(\omega)$ відповідно з алгебраїчною формою критерію Михайлова, повинні мати корені, що перемежаються на числовій осі. Використовуючи верхню і нижню оцінки дійсних коренів многочлена [3, с. 167], можна будувати криві (1) на скінченному відрізку $(-\omega_1, \omega_2)$.

Годограф $(u, v)(\omega)$ $\omega \in (-\omega_1, \omega_2)$ у випадку асимптотичної стійкості повинен робити поворот навколо точки O на кут $\Phi \simeq n\pi$. Корені функцій $(u, v)(\omega)$ не симетричні відносно дійсної осі, як у випадку дійсних коефіцієнтів рівняння. При фінітизації множимо вектор (u, v) на $(1 - |t|)^n$, и замінюємо ω на $t/(1 - |t|)$. Будуємо годограф при $t \in (-1, +1)$.

Якщо шукати комплексну функцію $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ за допомогою двох дійсних функцій $y_k(x), k = 1, 2,$, які можна представити у вигляді вектора $\vec{y} = \vec{h}e^{\lambda x}$, $\vec{h} = (h_1, h_2)^T$ $\vec{y} = (y_1, y_2)^T$, то одержимо для чисел $h_k, k = 1, 2$ однорідну систему рівнянь $Ah_1 - Bh_2 = 0$, $Bh_1 + Ah_2 = 0$. Тут введені позначення $A = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_n\lambda^n$, $B = b_0 + b_1\lambda + ... + b_n\lambda^n$. Існує її ненульовий розв'язок $\Leftrightarrow A^2 + B^2 = 0$. Це і є характеристичне рівняння с дійсними коефіцієнтами степені 2n. Відповідно годограф у випадку стійкості буде мати кут повороту радіус-вектора, рівний $n\pi$.

Розглядаються системи 1-го та 2-го порядків, $\dot{x} = Ax$ та $A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0$, які приводять відповідно до характеристичних рівнянь виду $det(\lambda E - A)$ та $det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0$. Відповідний фінітізований годограф дійсних систем буде $f(t) = det(tE + A(1 - t))$ та $det(At^2 + Bt(1 - t) + C(1 - t)^2)$ $t \in [0; 1]$. При комплексних коефіцієнтах метод фінітизації призводить до схожих операцій на відрізку (-1;1) та заміни $(1 - t)$ на $(1 - |t|)$. Будуються відповідні алгоритми для систем із запізненнями.

1. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Изд. 3., доп. – М.: Наука, 1980. – 272 с.
2. Филер З. Е., Музыченко А. И. Устойчивость линейных механических систем с последействием. Прикл. механика, Т. 46, № 1, 2010. – С. 125 – 137.
3. Шапиро Г. М. Высшая алгебра. Учеб. для высших педвузов. Изд.4, доп. – М.: Учпедгиз, 1938. – 388 с.

Структуры в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной

Ю. А. Хазова

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадвкого, Симферополь, Украина

hazova.yuliya@hotmail.com

В работе рассматривается задача

$$u_t + u = Du_{\varphi\varphi} + K(1 + \gamma \cos u(\pi - \varphi, t)),\ t > 0,\ u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t) \tag{1}$$

Задача (1) моделирует динамику фазовой модуляции $u(\varphi, t)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $t > 0$, световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием отражения. Здесь $D > 0$ — коэффициент диффузии нелинейной среды,коэффициент $K > 0$ пропорционален интенсивности входного поля, γ — видность (контрастность) интерференционной картины, $0 < \gamma < 1$. Данная задача рассматривалась в работе [1] на отрезке.

Исследуются вопросы существования, формы и устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений, бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений, т.е. решений $u(\varphi, t) = w$ определяемых из уравнения $w = K(1 + \gamma \cos w)$. Фиксируем гладкую ветвь решений $w = w(K, \gamma)$, $1 + K\gamma \sin w(K, \gamma) \neq 0$, линеаризуем (1) на $w(K, \gamma)$ и получаем уравнение $u_t + Lu = 0$, где $Lu = u - Du_{\varphi\varphi} + K\gamma \sin w\, Qu$, $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) = -K\gamma \sin w$, Q — оператор, определенный согласно равенству $Qu(\varphi, t) = u(\pi - \varphi, t)$.

Лемма 1. Оператор L имеет полную ортогональную систему собственных функций: $1, \cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi \ldots$, соответствующих собственным значениям $\lambda_0 = 1 - \Lambda$, $\lambda_1 = 1 + D + \Lambda$, $\lambda_2 = 1 + D - \Lambda$, $\lambda_3 = 1 + 4D + \Lambda$, $\lambda_4 = 1 + 4D - \Lambda$...

В качестве бифуркационного параметра принимается параметр D.

Условие 1: $\Lambda = \Lambda(K, \gamma) < -1$. Из леммы 1 и условия 1 следует, что при фиксированном $K : w = w(K, \gamma)$ — устойчивое решение задачи (1). При уменьшении D и его прохождении через значение $D_1 = -(1 + \Lambda)$, w теряет устойчивость. После замены $u = v + w$ уравнение (1) принимает вид

$$\dot{v} + Lv = \Lambda \frac{1}{2!} ctg w \cdot Qv^2 - \Lambda \frac{1}{3!} \cdot Qv^3 + O(v^4). \tag{2}$$

Для исследования вопросов используется метод центральных многообразий [2]. Имеет место суперкритическая бифуркация рождения экспоненциально устойчивых стационарных решений:

$$\begin{gathered} v^{\pm}(\varphi, D) \approx \pm \left(\tfrac{D - D_1}{c_1(D_1)}\right)^{1/2} \cos\varphi + \tfrac{1}{2!}\left(\tfrac{D - D_1}{c_1(D_1)}\right)\left(\tfrac{\Lambda}{2} ctg\, w (\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + (\lambda 2 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2\varphi\right) \pm \\ \pm \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{D - D_1}{c_1(D_1)}\right)^{3/2} (\lambda_5 - 3\lambda_1)^{-1}\left(\tfrac{\Lambda}{4} - \tfrac{3}{4}\Lambda^2 ctg^2\, \omega (\lambda_3 - 2\lambda_1)^{-1}\right) \cos 3\varphi. \end{gathered} \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $0 < D_1 - D < \delta_0$, то задача (1) имеет два решения: $u^{\pm}(\varphi, D) = w + v^{\pm}(\varphi, D)$, где и удовлетворяет (3). Решения $u^{\pm}$ экспоненциально устойчивы.*

1. Белан Е. П. Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной. Кибернентика и системный анализ, 2010, № 5, С. 99–111.
2. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических задач, М.: Мир, 1985, 376 с.

Решение основных краевых задач для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца

Анвар Хасанов

Актюбинский государственный университет им. К. Джубанова, Актобе, Казахстан

anvarhasanov@yahoo.com

Решения краевых задач для вырождающихся уравнений второго порядка находится в центре внимания многих математиков. В этом направлении существенные результаты получены для обобщенного осесимметричного уравнения Гельмгольца

$$H^{\lambda}_{\alpha,\beta}(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y - \lambda^2 u = 0,$$

$$0 < 2\alpha, \quad 2\beta < 1, \quad \alpha,\ \beta,\ \lambda = const.$$

В частном случае Weinstein (1948) ввел понятия обобщенного потенциала уравнения. Отметим также, различные модификации уравнения были изучены математиками: A. Huber (1954), A. Erdelyi (1956), P. Henrici (1957), R. Gilbert (1960), K. Ranger (1965), R. Weinacht (1974), C. Y. Lo (1977), О. И. Маричев (1978), P. A. McCoy (1979), A. J. Fryant (1979), A. Altin (1982), D. Kumar (2005) и другие. Особенно отметим монографию [1], в которой, используя метод комплексного анализа, построено представление решение обобщенного осесимметричного уравнения Гельмгольца $H^{\lambda}_{\alpha,\beta}$. Полученное представление не выражается гипергеометрическими функциями, а самое главное — оно неудобно в приложении. При нахождении фундаментальных решений уравнения $H^{\lambda}_{\alpha,\beta}$ понадобилось определить новый класс конфлуентных гипергеометрических функций Куммера от трех переменных. Например, одна из этих функции имеет вид

$$A_2^{(3)}(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y, z) = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n-p}(b_1)_m (b_2)_n}{(c_1)_m (c_2)_n m! n! p!} x^m y^n z^p$$

Для введенных гипергеометрических функций изучены основные свойства. Построены фундаментальные уравнения $H^{\lambda}_{\alpha,\beta}$, одно из которых имеет вид

$$q_1(x, y; x_0, y_0) = k_1 \left(r^2\right)^{-\alpha-\beta} A_2^{(3)}(\alpha+\beta; \alpha, \beta; 2\alpha, 2\beta; \xi, \eta, \zeta),$$

где

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$
$$r_1^2 = (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$
$$r_2^2 = (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2,$$
$$\xi = \frac{r^2 - r_1^2}{r^2}, \quad \eta = \frac{r^2 - r_2^2}{r^2}, \quad \zeta = -\frac{\lambda^2}{4} r^2,$$
$$2\alpha = n/(n+2),\ 2\beta = m/(m+2),\ k_1 = const$$

и решены основные краевые задачи для решения $H^{\lambda}_{\alpha,\beta}$ [2–5].

1. R. Gilbert. Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations. New York, London: Academic Press. 1969.
2. A. Hasanov. Fundamental solutions of generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. Complex Variables and Elliptic Equations. 52 (8), 2007, 673–683.

3. M. S. Salakhitdinov and A. Hasanov. A solution of the Neumann–Dirichlet boundary value problem for generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. Complex Variables and Elliptic Equations. 53 (4), 2008, p. 355–364.
4. A. Hasanov and E. T. Karimov. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients. Applications Mathematical Letters. 22, 2009, pp. 1828–1832.
5. M. S. Salakhitdinov and A. Hasanov. The Fundamental solution for one class of degenerate elliptic equations. More Progresses in Analysis. Proceedings of the 5-th International ISAAC Congress. World Scientific Publishing Co Pte. Ltd. 2009, 521–531.

Достаточность усиленного условия Лежандра в экстремальных вариационных задачах в пространствах Соболева

А. В. Цыганкова
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Украина
tsygankova_ a_ v@mail.ru

Классический подход к решению экстремальных вариационных задач, как известно, требует в качестве достаточного условия экстремума, проверки усиленного условия Лежандра и условия Якоби для уравнения Якоби. Второй шаг в неквадратичной ситуации является весьма сложным, и поэтому вопрос о возможности "обойти" проверку условия Якоби давно привлекает внимание математиков.

Недавно в работах И. В. Орлова [3], [4] был разработан новый метод исключения уравнения Якоби и условия Якоби в одномерных вариационных задачах.

В настоящем докладе этот метод обобщается на случай многомерной области [1], [2]. Показано, что задача на минимум для классического вариационного функционала Эйлера–Лагранжа $\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y)dx$, $D \subset \mathbb{R}^n$ может быть решена при выполнении уравнения Эйлера-Остроградского, усиленного условия Лежандра, положительности f_{y^2} (в негладкой ситуации) и (в одном из двух случаев) дополнительном ограничении на меру области, которое ослабевает с ростом размерности пространства. Рассмотрен как случай локального минимума в $C^1(D)$, так и случай компактного минимума в $W^{1,p}(D)$.

В качестве приложения получены квадратичные оценки снизу скорости стремления вариационного функционала к минимуму.

1. Цыганкова А. В. Исключение уравнения Якоби в экстремальных вариационных задачах. Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Серия "Физико-математические науки", 2012, Том 25 (64) № 2, с. 161–175.
2. Орлов И. В., Цыганкова А. В. Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах. Донецк, Труды ИПММ НАН Украины, 2013. (В печати.)
3. Orlov I. V. Elimination of Jacobi equation in extremal variational problems. Methods of Functional Analysis and Topology, Kyiv: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 2011, Vol. 17, no. 4, 341–349.
4. Orlov I. V. Inverse extremal problem for variational functionals. Eurasian Mathematical Journal, 2011, Vol. 1, no. 4, 95–115.

О свойствах решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных

Ю. А. Чернецкая[1], Г. Е. Самкова[2]

[1]Киевский университет, Киев, Украина

[2]ОНУ им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина

julia_ adamchyk@mail.ru, SamkovaGalina@i.ua

Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных:

$$\begin{cases} Ax + B\dot{x} = f(t, x, \dot{x}), \\ \\ x(t) \to 0, \quad t \to 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $f : D \to \mathbb{R}^m$ — непрерывна в $D = \{(t, x, \dot{x}) : 0 < |t| \le a, \|x\| \le b, \|\dot{x}\| \le b\}$, $a, b > 0$.

Предлагаются преобразования [1] , приводящие задачу (1) (с дополнительным условием $\dot{x}(t) \to 0$ при $t \to 0$) к различным задачам, частично разрешенным относительно производных, в частности, к задаче:

$$\begin{cases} A_1(t)Y' = B_1(t)Y + f_1(t, Y), \\ \\ Y(t) \to 0, \quad t \to 0, \end{cases} \tag{2}$$

где матрицы $A_1, B_1 : (0, a] \to \mathbb{R}^{n \times k}$ — непрерывны, функция $f_1 : H \to \mathbb{R}^n$ — непрерывна в $H = \{(t, Y) : 0 < |t| \le a, \|Y\| \le d\}$, $a, d > 0$.

Для задачи (2) построена эквивалентная задача:

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt} = D_1(t)B_1(t)Y(t) + D_1(t)f_1(t, Y) + u(t), \\ Y(t) \to 0, \quad t \to 0, \end{cases} \tag{3}$$

вдоль решения которой справедливо:

$$(E - A_1(t)D_1(t))(B_1(t)Y(t) + f_1(t, Y)) = A_1(t)u(t), \tag{4}$$

где вектор $u(t) = (E - D_1(t)A_1(t))\frac{dY(t)}{dt}$, матрица $D_1(t) : (0, a] \to \mathbb{R}^{k \times n}$, $(E - A_1(t)D_1(t))B_1(t) : (0, a] \to \mathbb{R}^{n \times k}$ и такова, что если $Y = Y(t)$ является решением задачи (2) при $t \in (0, t_0]$, $t_0 \in (0, a]$, то пара (Y(t), u(t)) является решением задачи (3)–(4) при $t \in (0, t_0]$, и наоборот.

1. Чернецкая Ю. А., Самкова Г. Е. О существовании решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. Дифференциальные уравнения и их применения, Институт математики НАН Украины, Ужгородский Национальный Университет. – 2012, С. 83.
2. Шарай Н.В, Самкова Г.Є. Асимптотика розв'язків деяких напів'явних систем диференціальних рівнянь. Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314–315. Математика. 2006. с. 181–188.
3. Ю. Е. Бояринцев. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1980.

Асимптотика решений дифференциальных уравнений с быстроменяющимися нелинейностями

А. Черникова

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса, Украина

emden@farlep.net

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$- непрерывная функция, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$- дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\varphi'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{[\varphi'(y)]^2} = 1, \tag{2}$$

Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0}- односторонняя окрестность Y_0.

В силу (2) функция φ является (см. [1]) быстроменяющейся при $y \to Y_0$.

Решение y уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0, \lambda^0_{n-1})$- решением, где $-\infty \leq \lambda^0_{n-1} \leq +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ и удовлетворяет следующим условиям

$$y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0.$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} \quad 0, \\ \text{либо} \quad \pm\infty \end{cases} \quad (k = \overline{1, n-1}), \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n)}(t) y^{(n-2)}(t)} = \lambda^0_{n-1}.$$

Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования у дифференциального уравнения (1) $P_\omega(Y_0, \lambda^0_{n-1})$– решений в случае, когда $\lambda^0_{n-1} \in \mathbf{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\}$. При этом показано, что для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\varphi'(y(t)) = -\frac{\alpha_0 \prod\limits_{j=2}^{n} a_{0j}}{(\lambda^0_{n-1} - 1)^{n-1}} \frac{1 + o(1)}{J(t)},$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}}{(\lambda^0_{n-1} - 1)\pi_\omega(t)} [1 + o(1)] \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

где

$$a_{0j} = (n - j)\lambda^0_{n-1} - (n - j - 1) \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \end{cases} \qquad J(t) = \int\limits_A^t \pi^{n-1}_\omega(\tau) p(\tau)\, d\tau, \quad A \in \{\omega; a\}.$$

В случае правильно меняющейся при $y \to Y_0$ функции φ результаты об асимптотике всех возможных типов $P_\omega(Y_0, \lambda^0_{n-1})$– решений уравнения (1) установлены в [2].

1. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985.
2. Евтухов В. М., Самойленко А. М. Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – т. 47, № 5. – С. 628–650.

Ускорение сходимости итераций для автономной нетеровой краевой задачи методом Ньютона

С. М. Чуйко, О. Е. Любимая

Славянский государственный педагогический университет, Славянск, Украина

chujko-slav@inbox.ru

Для нахождения решения $z(t,\varepsilon) \in C^2[a, b(\varepsilon)],\ C[0,\varepsilon_0],\ b(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ задачи:

$$z'' = Az + f + \varepsilon Z(z, z', \varepsilon),$$
$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon), z'(\cdot,\varepsilon), \varepsilon), \tag{1}$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в решение порождающей краевой задачи

$$z_0'' = Az_0 + f, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f \in \mathbb{R}^n,$$
$$\ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m \tag{2}$$

по схеме Ньютона построена итерационная схема. Здесь $Z(z, z', \varepsilon)-$ нелинейная функция, непрерывно-дифференцируемая по z и z' в окрестности решения порождающей задачи и непрерывно-дифференцируемая по ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный и $J(z, z', \varepsilon)-$ нелинейный векторный функционалы, причем второй функционал непрерывно-дифференцируем по z, z' и по ε в окрестности решения задачи (2) и на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. В критическом случае $(P_{Q^*} \neq 0)$ при условии $P_{Q^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0$ порождающая задача (2) имеет семейство решений [1]

$$z_0(t, c_0) = X_r(t)c_0 + G\Big[f;\alpha\Big](t), \quad X_r(t) = X(t)P_{Q_r}, \quad c_0 \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $Q = \ell X(\cdot)-$ $(m\times n)-$ матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1,\ n - n_1 = r$, P_{Q^*} — $(m\times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2); P_{Q_r} — $(n\times r)$-матрица, составленная из r- линейно-независимых столбцов $(n\times n)$-матрицы-ортопроектора $P_Q : \mathbb{R}^n \to N(Q)$; $K[f](t)$ — оператор Грина задачи Коши.

Предположим выполненными необходимые и достаточные условия разрешимости [1,2] задачи (1). Для нахождения решения задачи (1) в малой окрестности порождающего решения $z_0(t, c_0)$ и функции $\check{c}(\varepsilon) := \operatorname{col}(b(\varepsilon), c(\varepsilon)),\ c(\varepsilon) := z(0,\varepsilon)$ в статье [2] построен оператор

$$\Psi(\check{c}(\varepsilon), z(t,\varepsilon)) : C[0,\varepsilon_0] \longrightarrow C[0,\varepsilon_0],\ \check{c}(0) := \check{c}_0.$$

Нами и предложена итерационная схема, сходящаяся при условии $2\cdot\gamma_1\cdot\gamma_2\cdot\gamma_3 < 1$; величины $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ гарантируют выполнение неравенств

$$||\Psi(\check{c}_0, z(t,\varepsilon))|| \le \gamma_1, \quad ||(\Psi_b'(\check{c}_0, z(t,\varepsilon))^{-1}|| \le \gamma_2, \quad ||\Psi''_{\check{c}^2}(\check{c}(\varepsilon), z(t,\varepsilon)|| \le \gamma_3.$$

1. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
2. Чуйко С. М. Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи. Нелинейные колебания, 2006, 9, № 3, С. 416–432.

О регуляризации периодической краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием

С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко
Славянский государственный педагогический университет, Славянск, Украина
chujko-slav@inbox.ru

Предположим T-периодическую задачу для системы $z' = A(t)z + f(t)$ некорректно поставленной в классе функций $z(t) \in C^1[0,T]$. Нами исследованы условия регуляризации [1] краевой задачи

$$z' = A(t)z + f(t),$$

$$\ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0, \tag{1}$$

$$\Delta z(\tau) = S z(\tau - 0)$$

в пространстве [2]: $z(t) \in C^1\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\}$. Пусть $X_0(t)$ — нормальная ($X_0(\tau) = I_n$) фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (1),

$$\mathcal{K}[f(s)](t) := -X_0(t) \int_t^\tau X_0^{-1}(s) f(s) ds, \quad t \in [0, \tau[,$$

$$\mathcal{K}[f(s)](t) := X_0(t) \int_\tau^t X_0^{-1}(s) f(s) ds, \quad t \in [\tau, T]$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши $z(\tau) = 0$ для дифференциальной системы (1) и $X(t)$ — нормальную фундаментальную матрицу однородной части системы с импульсным воздействием (1)

$$X(t) = X_0(t), \;\; t \in [0, \tau[; \;\; X(t) = X_0(t)(I_n + S), \;\; t \in [\tau, T].$$

Теорема. *Если задача о нахождении T-периодических решений $z(t) \in C^1[0,T]$ дифференциальной системы (1) некорректно поставлена в классе функций $z(t) \in C^1[0,T]$, то для любого корня $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ уравнения*

$$(Q + Q_1 S)(Q + Q_1 S)^+ = I_n, \quad Q := \ell X_0(\cdot), \quad \mathcal{Q} := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

и для произвольной непрерывной функции $f(t)$ в пространстве $z(t) \in C^1\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\}$ существует не менее одного решения $z(t) = \mathcal{G}[f(s)](t)$ краевой задачи (1), где

$$\mathcal{G}[f(s)](t) := \mathcal{K}[f(s)](t) - X(t)\mathcal{Q}^+ \ell \mathcal{K}[f(s)](\cdot)$$

— обобщенный оператор Грина в задаче о регуляризации периодической краевой задачи (1) при помощи вырожденного $(\det(I_n + \mathcal{S}) = 0)$ *импульсного воздействия [3].*

1. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. – 104 с.
2. Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М. Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. 1991. № 27, С. 1516–1521.
3. Чуйко С. М., Чуйко Е. В. Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Докл. НАН Украины. 1999. № 6, С. 43–47.

Асимптотична поведінка розв'язків диференціального рівняння третього порядку

Н. В. Шарай[1], В. М. Шинкаренко[2]
[1]Одеський національний університет ім. І. І. Мечнікова, Одеса, Україна
[2]Одеський національний економічний університет, Одеса, Україна
shinkar@te.net.ua, rusnat@i.ua

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{'''} = \alpha_0 p(t) y |\ln |y||^{\sigma}, \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p : [a, w) \longrightarrow (0, +\infty)$ — неперервна функція; $a < w \leq +\infty$.

Асимптотичні властивості розв'язків рівняння (1) при $\sigma = 0$ досліджено у роботі І. Т. Кігурадзе [1]. У випадку $\sigma \neq 0$ рівняння є близьким до лінійного, проте має свої особливості. Для рівнянь другого порядку вигляду (1) асимптотика розв'язків одного, досить широкого класу, була досліджена в роботі В. М. Євтухова і Абу-Эль-Шаура Муси Джабера [2].

Розв'язок y рівняння (1), який задано на проміжку $[t_y, w) \subset [a, w)$ будемо звати $P_w(\lambda_0)$ розв'язком, якщо він задовольняє наступним вимогам:

$$\lim_{t \longrightarrow w} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty, \end{cases} \ (k = 0, 1, 2), \qquad \lim_{t \longrightarrow w} \frac{(y^{''})^2}{y^{'''} y^{'}} = \lambda_0 \tag{2}$$

У роботі [3] отримані умови існування та асимптотика $P_w(\lambda_0)$ розв'язків диференціального рівняння (1) у випадку $\lambda_0 \in R \backslash \{0, 1, -1, \frac{1}{2}\}$. Встановлено необходні та достатні умови існування у рівняння (1) $P_w(\lambda_0)$ розв'язків для різних значень λ_0. Отримано асимптотичні розвиненя таких розв'язків та їх похідних до другого порядку при $t \longrightarrow w$. Наприклад для $\lambda_0 = \pm\infty$ доведено наступну теорему.

Теорема. *Для існування у рівняння* (1) $P_w(\pm\infty)$ *розв'язків, необхідно и достатньо виконання умов:* $\lim_{t \longrightarrow w} p(t)\pi_w^3(t)|\ln \pi_w^2(t)|^{\sigma} = 0$; $\lim\limits_{t \longrightarrow w} \int_a^t p(\tau)\pi_w^2(\tau)|\ln \pi_w^2(\tau)|^{\sigma} d\tau = \infty$. *Больше того, для кожного такого розв'язку мають місце при* $t \longrightarrow w$ *асимптотичні розвинення*:

$$\ln |y(t)| = \ln \pi_w^2(t) + \frac{\alpha_0}{2} \int_a^t p(\tau)\pi_w^2(\tau)|\ln \pi_w^2(\tau)|^{\sigma} d\tau (1 + 0(1)),$$

$$\ln |y^{'}(t)| = \ln |\pi_w(t)| + \frac{\alpha_0}{2} \int_a^t p(\tau)\pi_w^2(\tau)|\ln \pi_w^2(\tau)|^{\sigma} d\tau (1 + 0(1)),$$

$$\ln |y^{''}(t)| = \frac{\alpha_0}{2} \int_a^t p(\tau)\pi_w^2(\tau)|\ln \pi_w^2(\tau)|^{\sigma} d\tau (1 + 0(1)).$$

1. Кигурадзе И. Т. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. / Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. // М.: Наука. 1990. 430 с.
2. Evtukhov V. M. Asymptotic behaviour of solutions of second order nonlinear differential equations clouse to linear equations / Evtukhov V. M., Mousa Jaber Abu Elshour // Mem. Diff. Eq. Math. Phys. – 2008. – 43. – P. 97–106.
3. Шарай Н. В. Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, близких к линейным // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2010. – т. 15. – С. 88–101.

Асимптотические представления решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, близких к циклическим

М. А. Шкурина

Одесский Национальный Университет им. И.И. Мечникова, Одесса, Украина

marina-shkurina@mail.ua

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_i' = f_i(t, y_1, \dots, y_n), \\ i = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{1}$$

где $f_i : [a, \omega[\times \prod\limits_{i=1}^{n} \Delta_{Y_i^0} \longrightarrow \mathbf{R}$ — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\Delta_{Y_i^0}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ — односторонняя окрестность Y_i^0, Y_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Решение $(y_i)_{i=1}^n$ системы (1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, называется $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решением, где $-\infty \le \Lambda_i \le +\infty$ $(i = \overline{1, n-1})$, если $y_i(t) \in \Delta_{Y_i^0}$ $(i = \overline{1, n})$ при $t \in [t_0, \omega[$ и соблюдаются условия

$$\lim_{t \uparrow \omega} y_i(t) = Y_i^0 \quad (i = \overline{1, n}), \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y_i(t) y_{i+1}'(t)}{y_i'(t) y_{i+1}(t)} = \Lambda_i \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Исследуется вопрос о наличии и асимптотики $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решений у системы (1), для которых $\Lambda_i \in \mathbf{R}/\{0\}$ $(i = \overline{1, n-1})$. При этом предполагается, что для каждого такого решения системы (1) имеют место представления

$$f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t)) = \alpha_i p_i(t) \varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))[1 + o(1)] \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$-непрерывная функция, $\varphi_{i+1} : \Delta_{Y_{i+1}^0} \longrightarrow]0, +\infty[$ — непрерывная и правильно меняюшаяся при $y_{i+1} \to Y_{i+1}^0$ функция, $(i = \overline{1, n})$, $\varphi_{n+1}(y_{n+1}) = \varphi_1(y_1)$.

При выполнении этих условий получены необходимые и достаточные условия существования у системы (1) $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1})$-решений в случае когда $\Lambda_i \in \mathbf{R}/\{0\}$ $(i = \overline{1, n-1})$ и выписаны их неявные асимптотические представления при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau)\, d\tau [1 + o(1)], \quad \text{если} \quad i \in \mathfrak{I},$$

$$\frac{y_i(t)}{\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i \frac{\int\limits_{A_i}^{t} \int\limits_{A_l}^{\tau} p_l(t)\, dt\, p_i(\tau)\, d\tau}{\int\limits_{A_l}^{t} p_l(\tau)\, d\tau} [1 + o(1)], \quad \text{если} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}},$$

где β_i-некоторая постоянная, отличная от нуля, $A_i \in \{\omega, a\}$, $(i = \overline{1, n-1})$, $l = \min \mathfrak{I}$, $\mathfrak{I} = \{i \in \{1, \dots, n\} : 1 - \Lambda_i \sigma_{i+1} \ne 0\}$, $\bar{\mathfrak{I}} = \{1, ..., n\} \backslash \mathfrak{I}$. Приведены также дополнительные условия, при которых эти представления могут быть записаны в явном виде. Полученные результаты существенно дополняют теоремы, установленные в [1].

1. В. М. Евтухов, Е. С. Владова. Асимптотические представления решений существенно нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 2012, том 48, № 5, с. 622–639.

Асимптотические свойства решений циклических систем дифференциальных уравнений с правильно и быстро меняющимися нелинейностями

О. Р. Шлепаков

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина

oleg@gavrilovka.com.ua

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_i' = \alpha_i p_i(t)\varphi_{i+1}(y_{i+1}) \quad (i = \overline{1, n-1}), \\ y_n' = \alpha_n p_n(t)\varphi_1(y_1), \end{cases} \tag{1}$$

в которой $\alpha_i \in \{-1, 1\} \quad (i = \overline{1, n})$, $p_i : [a, \omega[\to]0, +\infty[\quad (i = \overline{1, n})$ - непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi_i : \Delta(Y_i^0) \to]0; +\infty[\quad (i = \overline{1, n})$ ($\Delta(Y_i^0)$ - некоторая односторонняя окрестность точки Y_i^0, Y_i^0 равно либо 0, либо $\pm\infty$)- дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_i'(z) \neq 0 \text{ при } z \in \Delta(Y_i^0), \quad \lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta(Y_i^0)}} \varphi_i(z) = \Phi_i^0, \quad \lim_{\substack{z \to Y_i \\ z \in \Delta(Y_i^0)}} \frac{\varphi_i''(z)\varphi_i(z)}{[\varphi_i'(z)]^2} = \gamma_i,$$

где $\prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i) \neq 1$, $\Phi_i^0 \in \{0, +\infty\}$

Решение $(y_i)_{i=1}^n$ системы (1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, будем называть $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решением, если функции $u_i(t) = \varphi_i(y_i(t))$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{t \uparrow \omega} u_i(t) = \Phi_i^0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{u_i(t) u_{i+1}'(t)}{u_i'(t) u_{i+1}(t)} = \Lambda_i \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Для системы (1) в случае, когда $\Lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$, получены необходимые и достаточные условия существования $\mathcal{P}_\omega(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$-решений. Также, при $t \uparrow \omega$, получены асимптотические представления вида:

$$\frac{\varphi_i(y_i(t))}{\varphi_i'(y_i(t))\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i \int_{A_i}^{t} p_i(\tau)\, d\tau [1 + o(1)], \quad \text{если} \quad i \in \mathfrak{I},$$

$$\frac{\varphi_i(y_i(t))}{\varphi_i'(y_i(t))\varphi_{i+1}(y_{i+1}(t))} = \alpha_i \beta_i \frac{\int_{A_i}^{t} p_i(\tau) \int_{A_l}^{\tau} p_l(s)\, ds\, d\tau}{\int_{A_l}^{t} p_l(\tau)\, d\tau} [1 + o(1)], \quad \text{если} \quad i \in \bar{\mathfrak{I}},$$

где $\mathfrak{I} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, 1 - \Lambda_i - \gamma_i \neq 0\}$, $\bar{\mathfrak{I}} = \{1, ..., n\} \backslash \mathfrak{I}$, $l = \min \mathfrak{I}$, а β_i – некоторые точно определяемые отличные от нуля постоянные.

1. Мирзов Д. Д. Об асимптотических свойствах решений одной системы типа Эмдена-Фаулера. Диф. уравнения, 1985, 21, N 9, С. 1498–1504.
2. Евтухов В. М. Асимптотические представления правильных решений одной двумерной системы дифференциальных уравнений. Доп. НАН України, 2002, N 4, С. 11–17.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
4. Maric V. Regular variation and differential equations. Springer, 2000.

Про зведення нелінійної диференціальної системи до одного спеціального вигляду

С. А. Щоголев

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

sergas1959@gmail.com

Нехай $G = \{\ t, \varepsilon : t \in \mathbf{R}, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\ \}$.

Означення 1. Скажемо, що функція $f(t,\varepsilon)$, у загальному випадку комплекснозначна, належить до класу $S_m(\varepsilon_0)$ ($m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), якщо $t, \varepsilon \in G$, $f(t,\varepsilon) \in C^m(G)$ за t, $d^k f/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon)$ $(0 \le k \le m)$,

$$\|f\|_m \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_G |f_k^*(t,\varepsilon)|.$$

Означення 2. Скажемо, що функція $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ належить до класу $F_{m,l}^{\theta}(\varepsilon_0)$ ($m, l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), якщо ця функція зображувана у вигляді:

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

де $\theta(t,\varepsilon) \in \mathbf{R}$, $f_n(t,\varepsilon) \in S_m(\varepsilon_0)$,

$$\|f\|_{m,l} \stackrel{def}{=} \|f_0\|_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^l \|f_n\|_m < +\infty.$$

Розглядається наступна система диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = \mu X(t,\varepsilon,\theta,x) + \varepsilon a(t,\varepsilon,\theta,x), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega(t,\varepsilon) + \mu\Theta(t,\varepsilon,\theta,x) + \varepsilon b(t,\varepsilon,\theta,x), \tag{1}$$

де $x \in \mathbf{R}$, $|x| \le d$, $X, \Theta, \omega, a, b \in \mathbf{R}$; X, Θ належать до класу $F_{m,l}^{\theta}(\varepsilon_0)$ за t, ε, θ та до класу $C^q[-d,d]$ за x; a, b належать до класу $F_{m-1,l}^{\theta}(\varepsilon_0)$ за t,ε,θ та до класу $C^q[-d,d]$ за x; $\omega \in S_m(\varepsilon_0)$, $\inf\limits_G \omega > 0$; $\mu \in (0,\mu_0)$.

Теорема. $\forall r \in \mathbf{N}$, $r < l$. $r < q$ $\exists \mu_r \in (0,\mu_0) : \forall \mu \in (0,\mu_r)$ *існує перетворення вигляду*:

$$x = y + \sum_{k=1}^{r} u_k(t,\varepsilon,\varphi,y)\mu^k, \quad \theta = \varphi + \sum_{k=1}^{r} v_k(t,\varepsilon,\varphi,y)\mu^k,$$

$|y| \le d_1 < d$, *u_k, v_k належать до класу* $F_{m,l-k+1}^{\varphi}(\varepsilon_0)$ за *t,ε,φ та до класу* $C^{q-k+1}[-d_1,d_1]$ за y *(*$k = \overline{1,r}$ *), яке приводить систему (1) до вигляду*:

$$\tfrac{dy}{dt} = \textstyle\sum_{k=1}^{r} Y_k(t,\varepsilon,y)\mu^k + \mu^{r+1}\widetilde{Y}_r(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu) + \varepsilon a_r(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu),$$

$$\tfrac{d\varphi}{dt} = \omega(t,\varepsilon) + \textstyle\sum_{k=1}^{r} \omega_k(t,\varepsilon,y)\mu^k + \mu^{r+1}\widetilde{\omega}_r(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu) + \varepsilon b_r(t,\varepsilon,\varphi,y,\mu),$$

де Y_k, ω_k належать до класу $S_m(\varepsilon_0)$ за t,ε та до класу $C^{q-k+1}[-d_1,d_1]$ за y; $\widetilde{Y}_r, \widetilde{\omega}_r$ належать до класу $F_{m,l-r}^{\varphi}(\varepsilon_0)$ за t,ε,φ та до класу $C^{q-r}[-d_1,d_1]$ за y; a_r, b_r належать до класу $F_{m-1,l-r}^{\varphi}(\varepsilon_0)$ за t,ε,φ та до класу $C^{q-r}[-d_1,d_1]$ за y.

Непрерывная зависимость по малому параметру решения смешанной задачи для одного нелинейного уравнения в частных производных

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет, Красноярск, Россия

tursunbay@rambler.ru

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^3}{\partial t\, \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial^4}{\partial t^2\, \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) u(t,x) = f\big(t,x,u(t,x)\big) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$u(t,x)_{|t=0} = \varphi_1(x),\ u_t(t,x)_{|t=0} = \varphi_2(x),\ u_{tt}(t,x)_{|t=0} = \varphi_3(x) \qquad (2)$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0} = u(t,x)_{|x=l} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)_{|x=0} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)_{|x=l} =$$

$$= \frac{\partial^4}{\partial x^4}u(t,x)_{|x=0} = \frac{\partial^4}{\partial x^4}u(t,x)_{|x=l} = \frac{\partial^6}{\partial x^6}u(t,x)_{|x=0} = \frac{\partial^6}{\partial x^6}u(t,x)_{|x=l} = 0, \qquad (3)$$

где $f(t,x,u) \in C(D \times R)$, $\varphi_i(x) \in C^9(D_l)$, $i = \overline{1,3}$, $D \equiv D_T \times D_l$, $D_T \equiv [0,T]$, $D_l \equiv [0,l]$, $0 < l < \infty$, $0 < T < \infty$, $0 < \varepsilon$ — малый параметр.

В данном докладе решение смешанной задачи (1)–(3) строится в виде ряда

$$u(t,x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t,\varepsilon) \cdot b_n(x),$$

где $a_n(t,\varepsilon)$ определяется как решение следующей счетной системы нелинейных интегральных уравнений

$$a_n(t,\varepsilon) = \psi_n(t,\varepsilon) + \frac{1}{\omega_n(\varepsilon)} \int_0^t \int_0^l f\Big(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon) b_i(y)\Big) b_n(y) G_n(t,s,\varepsilon)\,dy\,ds, t \in D_T,$$

$$\psi_n(t,\varepsilon) = \frac{\mu_n^2(\varepsilon)\varphi_{1n} + \varphi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)} \exp\big\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\big\} + \frac{\mu_n^4(\varepsilon)\varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)} \cos\mu_n(\varepsilon)t +$$

$$+ \frac{\mu_n^2(\varepsilon)\varphi_{1n} + (1+\mu_n^2(\varepsilon))\varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon) + \mu_n^5(\varepsilon)} \sin\mu_n(\varepsilon)t,\ b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\lambda_n x,\ \lambda_n = \frac{n\pi}{l},$$

$$G_n(t,s,\varepsilon) = \exp\big\{-\mu_n^2(\varepsilon)(t-s)\big\} + \mu_n(\varepsilon)\sin\mu_n(\varepsilon)(t-s) - \cos\mu_n(\varepsilon)(t-s),$$

$$\omega_n(\varepsilon) = \rho_n^2(\varepsilon)\mu_n^2(\varepsilon)(1+\mu_n^2(\varepsilon)),\ \mu_n^2(\varepsilon) = \frac{\lambda_n^4}{\rho_n(\varepsilon)},\ \rho_n(\varepsilon) = 1 + \lambda_n^2\varepsilon,$$

начальные данные φ_{jn} подбирались из (2) так, что

$$\varphi_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{jn} \cdot b_n(x),\ \varphi_j(x) \in L_2(D_l),\ j = \overline{1,3}.$$

Доказана теорема о непрерывной зависимости по малому параметру решения смешанной задачи (1)–(3).

Асимптотичне розв'язання початкової і крайових задач для сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем

В. П. Яковець

Державний вищий навчальний заклад "Університет менеджменту освіти", Київ, Україна

yvp-95@ukr.net

Розглядається система рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

де $x(t,\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon)$ — відповідно шуканий і заданий n -вимірні вектори, $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — $(n\times n)$-матриці з дійсними або комплекснозначними елементами, ε — малий дійсний параметр, h — натуральне число.

Передбачається, що виконуються наступні умови:

1. Матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} A_k(t)\varepsilon^k, \qquad f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} f_k(t)\varepsilon^k,$$

коефіцієнти яких достатньо гладкі на $[0;T]$.

2. $\det B(t) \equiv 0$.

3. Гранична в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярна і має стабільну кронекерову структуру на $[0;T]$.

У роботі [1] доведено, що за виконання умов 1 – 3 система (1) має загальний розв'язок типу Коші, і здійснено його асимптотичний аналіз при різних припущеннях відносно кронекерової структури граничної в'язки матриць.

Виходячи з цього, у останніх роботах автора та його учнів досліджено початкова та крайові задачі для систем даного типу і розроблено методи побудови асимптотики їх розв'язків. Встановлено можливість застосування цих методів до розв'язання деяких сингулярно збурених задач оптимального керування. Доповідь присвячена основним результатам даних досліджень та можливим напрямам їх подальшого розвитку.

1. Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000.

Побудова нелінійної напівгрупи стиску в просторах $L^p(R^l, d^l x)$

М. І. Яременко

Міжнародний математичний центр, Київ, Україна

math.kiev@gmail.com

Робота присвячена дослідженню еволюційних рівнянь та побудові нелінійних напівгруп стиску для таких рівнянь. Вивчається задача Коші для узагальненого параболічного рівняння:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \mathrm{A}u(t), \;\; u(t) \in L^p(R^l, d^l x), \;\; t \in [0, t_0], \;\; u(0) = u_0.$$

Будується напівгрупа стиску, генератором якої є оператор, що погоджений лівою частиною еліптичного рівняння:

$$\lambda u-\sum_{i,j=1}^{l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}u\right)+b(x,u,\nabla u)=f,\quad \lambda>0,\quad f\in L_1\cap L_\infty.$$

Де:
1. $b(x,y,z)$ є скалярною функцією, яка неперервна на $R^l\times R\times R^l$ і неперервно диференційована за другим і третім аргументами;
2. функція $b(x,y,z)$ та її похідні за другим і третім аргументами задовольняють нерівності

$$|b(x,u,\nabla u)|\le \mu_1(x)|\nabla u|+\mu_2(x)|u|+\mu_3(x),$$

$$|b(x,u,\nabla u)-b(x,v,\nabla v)|\le \mu_4(x)|u-v|+\mu_5(x)|\nabla(u-v)|,$$

де $\mu_1^2,\mu_2^2,\mu_4^2\in L_1^{loc}(R^l)$, $\mu_3\in L_p(R^l)$,$\mu_5\in L_\infty\left(R^l\right)$.

Оператор A в параболічній задачі побудовано спеціальним чином за еліптичним рівнянням, а саме: цей оператор є звуженням оператора, що породжений формою, побудованою за лівою частиною еліптичного рівняння, на простір $L^p(R^l,d^lx)$ [1–3].

Теорема 1. (Про узагальнену задачу Коші в $L^p(R^l,d^lx)$.) *Узагальнена задача Коші*:

$$\frac{d}{dt}u(t)\in \mathrm{A}u(t),\qquad u(t)\in L^p(R^l,d^lx),\qquad t\in[0,t_0],u(0)=u_0,$$

де $\mathrm{A}:L^p(R^l,d^lx)\to L^p(R^l,d^lx)$, *має при кожному* $u_0\in D(A)$ *єдиний слабкий розв'язок.*

Також, доведено нелінійний аналог теореми Хілле – Іосіди.

Теорема 2. **1.** *За умови що* $(I-A)^{-1}$ *визначений на* $L^p(R^l,d^lx)$, *де* A — *нелінійний дисипативний оператор в* $L^p(R^l,d^lx)$, *тоді оператор* A *породжує єдину напівгрупу стиску* T_t *в* $L^p(R^l,d^lx)$. **2.** *Якщо* $\tilde{A}$ *локальний генератор нелінійної напівгрупи стиску* T_t *в* $L^p(R^l,d^lx)$, *тоді* $(I-A)^{-1}$ *визначений на всьому* $L^p(R^l,d^lx)$ *і* A *породжує початкову напівгрупу стиску* T_t, *де* A *дисипативне розширення оператора* $\tilde{A}$ *в* $L^p(R^l,d^lx)$.

1. Кухарчук М. М., Яременко М. І. Квазілінійні рівняння другого порядку з матрицею Гільберга – Серріна та нелінійні напівгрупи стиску. Частина 2. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – №3. – С. 150–158.
2. Кухарчук М. М., Яременко М. І. Квазілінійні рівняння другого порядку з матрицею Гільберга – Серріна та нелінійні напівгрупи стиску. Частина 1. // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – №2. – С. 148–155.
3. Кухарчук М. М., Яременко М. І. Про розв'язність одного квазілінійного еліптичного диференціального рівняння другого порядку у всьому евклідовому просторі R^l // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – № 4. – С. 146–151.
4. Кухарчук М. М., Яременко М. І. Про розв'язність квазілінійного рівняння з матрицею Гільберга–Серріна в R^l і побудову нелінійних напівгруп стиску в $L^2(R^l,d^lx)$ // Вісник національного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць. Рівне. – 2008. – Вип. 1:41. – С. 435–443.

On the behavior of the algebric polynomials on whole complex plane

F. G. Abdullayev, C. D. Gün

Mersin University, Mersin, Turkey

fabdul@mersin.edu.tr, cevahirdoganaygun@gmail.com

Let $G \subset \mathbb{C}$ be a finite region, with $0 \in G$, bounded by a Jordan curve $L := \partial G$, $\Delta(t,R) :=$ $:= \{w : |w-t| > R\}$, $\Delta := \Delta(0,1)$, $\Omega := ext\overline{G}$ (with respect to $\overline{\mathbb{C}}$). Let $w = \Phi(z)$ be the univalent conformal mapping of Ω onto the Δ normalized by $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi^{'}(\infty) > 0$.

Let $P_n(z)$, $\deg P_n \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, be an arbitrary algebraic polynomials. Let $h(z)$ be a weight function defined in G_R. Denote by $A(G)$ the class of functions f which are analytic in G; by $A_p(h,G)$, $p > 0$, the class of $f \in A(G)$ such that $\iint_G h(z)\,|f(z)|^p\,dxdy < \infty$, $z = x+iy$;

and when L is rectifiable, by $\mathcal{L}_p(L)$, $p > 0$, the class of integrable on L function f such that $\int_L h(z)\,|f(z)|^p\,|dz| < \infty$.

Well known Bernstein–Walsh Lemma says that:

$$|P_n(z)| \leq |\Phi(z)|^n \, \|P_n\|_{C(\overline{G})}\,, \; z \in \overline{\Omega}. \tag{1}$$

Similar estimations in spaces $\mathcal{L}_p(L)$ and $A_p(h,G)$ were obtained in [1] and [2] for generalized Jacobi weight function $h\,(z)$ having on L zeros and poles, respectively. N.Stylianopoulos in [3] replaced the norm $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$ with norm $\|P_n\|_{A_2(G)}$ on the right-hand side of (1) and found a new version of the Bernstein–Walsh Lemma: *Let L is quasiconformal and rectifiable;* $d(z,L) := \inf\{|\zeta - z| : \; \zeta \in L\}$. *Then there exists a constant $c = c(L) > 0$ depending only on L such that*

$$|P_n(z)| \leq c\frac{\sqrt{n}}{d(z,L)}\,\|P_n\|_{A_2(G)}\,|\Phi(z)|^{n+1}\,, \quad z \in \Omega.$$

In this work we study similar problems for some Jordan regions of complex plane and generalized Jacobi weight function in space $A_p(h,G)$.

1. Abdullayev F. G. On the some properties of the orthogonal polynomials over the region of the complex plane (Part III). Ukr. Math. J., 2001, **53**, № 12, P. 1934–1948.
2. Hille E., Szegö G., Tamarkin J.D. On some generalization of a theorem of A.Markoff. Duke Math., 1937, **3**, p. 729–739.
3. Stylianopoulos N. Fine asymptotics for Bergman orthogonal polynomials over domains with corners. CMFT 2009, Ankara, June 2009.

On the behavior of the algebric polynomials in unbounded regions with piecewise-smooth boundary without cusps

F. G. Abdullayev, N. P. Özkartepe
Mersin University, Mersin, Turkey
fabdul@mersin.edu.tr, pelinozkartepe@gmail.com

Let $G \subset \mathbb{C}$ be a bounded Jordan region with $0 \in G$ and the boundary $L := \partial G$ being a simple closed Jordan curve, $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$; $w = \Phi(z)$ be the univalent conformal mapping of Ω onto the $\{w : |w| > 1\}$ normalized by $\Phi(\infty) = \infty$, $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$.

Let $\wp_n$ denote the class of arbitrary algebraic polynomials $P_n(z)$ of degree at most $n \in \mathbb{N}$. Let $h(z)$ be a weight function. For any $p > 0$ we introduce:

$$\|P_n\|_{A_p(h,G)} := \left(\iint_G h(z) \left|P_n(z)\right|^p dxdy \right)^{1/p} < \infty, \ z = x + iy.$$

In the literature often estimated $|P_n(z)|$ on $\overline{G}$ through its various norms on G. On the other hand, well known Bernstein–Walsh Lemma says that:

$$|P_n(z)| \le |\Phi(z)|^n \|P_n\|_{C(\overline{G})}, \quad z \in \Omega. \tag{1}$$

N. Stylianopoulos replaced the norm $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$with norm $\|P_n\|_{A_2(G)}$ on the right-hand side of (1) [1].

We consider the following problem: For a given region G and weight function $h(z)$ find the numbers $\alpha = \alpha(G, h, n) > 0$ and $\beta = \beta(G, h, n) > 0$ such that for any $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, and constant $c = c(G) > 0$ will fulfilled:

$$|P_n(z)| \le c \|P_n\|_{A_2(h,G)} \begin{cases} n^\alpha, & z \in \overline{G}, \\ \frac{n^\beta}{d(z,L)} |\Phi(z)|^{n+1}, & z \in \Omega, \end{cases}$$

where $d(\Gamma, L) := \inf \{|\zeta - z| : z \in \Gamma, \ \zeta \in L\}$.

In this work we study this problem for regions with piecewise-smooth boundary without cusps.

1. Stylianopoulos N. Fine asymptotics for Bergman orthogonal polynomials over domains with corners. CMFT 2009, Ankara, June 2009.

Univalent functions on the unit disc which fix three given points

Y. Avcı
Bahçeşehir University, İstanbul, Turkey
yusuf.avci@bahcesehir.edu.tr

Let $T(a)$ be the class of univalent functions on $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ such that $f(0) = 0$, $f(a) = a$ and $f(-a) = -a$. In this paper, we will develop a variational formula for the class $T(a)$ and then apply it to solve the extremal problem

$$\max_{f\in T(a)} \text{Re } e^{iy} \log f'(0) = \text{Re } e^{iy} \log f_0'(0).$$

More specifically, we prove

Theorem. *Suppose that the function* $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ *belongs to the class* $T(a)$. *Then, for each real* γ, *the inequality*

$$\cos\gamma \log|a_1| - \sin\gamma \arg a_1 \leq \frac{1}{2}\log\frac{1+a^2}{1-a^2} - \frac{\cos\gamma}{2}\log\frac{1}{1-a^4}$$

is true and the inequality is sharp.

Kolmogorov type inequalities for Marchaud and Hadamard fractional derivatives and their applications

V. F. Babenko[1,2], **M. S. Churilova**[1], **N. V. Parfinovych**[1], **D. S. Skorokhodov**[1]
[1]Dnepropetrovsk National University, Dnepropetrovsk, Ukraine
[2]Institute of Applied Mathematics and Mechanics NAS Ukraine, Dnepropetrovsk, Ukraine
babenko.vladislav@gmail.com, churilova-m@yandex.ru, nparfinovich@yandex.ru, dmitriy.skorokhodov@gmail.com

We consider Marchaud and Hadamard fractional derivatives of the functions defined on the real line or the half-line and obtain new sharp Kolmogorov type inequalities, which estimate the uniform norm of the fractional derivative in terms of the uniform norm of the function itself and L_s-norm of its higher derivative. Simultaneously, the Stechkin problem on best approximation of the Marchaud fractional differentiation operator by bounded ones is solved. Applications of these results to the Kolmogorov problem for three numbers and the problem of the best recovery of unbounded operator by information given with prescribed errors are also given.

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integrals and derivatives of fractional order and their applications. — Minsk: 1987.

On a two-weight criteria for multidimensional Hardy type operator in p-convex Banach function spaces and some application

R. A. Bandaliev
Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan
bandaliyev.rovshan@math.ab.az

We consider the multidimensional Hardy type operator $Hf(x) = \int\limits_{|y|<|x|} f(y)\,dy$ and its dual operator $H^* f(x) = \int\limits_{|y|>|x|} f(y)\,dy$, where $f \geq 0$ and $x \in R^n$.

Now we formulate the criterion of boundedness of multidimensional Hardy type operator acting from the p-convex weighted Banach function spaces (BFS)(see [1], [2]) to weighted Lebesgue spaces.

Теорема. *Let* $v(x)$ *and* $w(x)$ *are weights on* R^n. *Suppose that* X_w *be a p-convex weighted BFSs for* $1 \leq p < \infty$ *on* R^n. *Then the inequality*

$$\|Hf\|_{X_w} \leq C\,\|f\|_{L_{p,\,v}} \qquad (1)$$

holds for every $f \geq 0$ and for all $\alpha \in (0,1)$ if and only if

$$A(\alpha) = \sup_{t>0} \left(\int\limits_{|y|<t} [v(y)]^{-p'}\, dy \right)^{\frac{\alpha}{p'}} \left\| \chi_{\{|z|>t\}}(\cdot) \left(\int\limits_{|y|<|\cdot|} [v(y)]^{-p'}\, dy \right)^{\frac{1-\alpha}{p'}} \right\|_{X_w} < \infty.$$

Moreover, if $C > 0$ is the best possible constant in (1)*, then*

$$\sup_{0<\alpha<1} \frac{p'\, A(\alpha)}{(1-\alpha) \left[\left(\frac{p'}{1-\alpha} \right)^p + \frac{1}{\alpha(p-1)} \right]^{1/p}} \leq C \leq M \inf_{0<\alpha<1} \frac{A(\alpha)}{(1-\alpha)^{1/p'}}.$$

This work was supported by the Science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan MOB-2013-1(1)-40/06-1.

1. Bennett C. and Sharpley R. Interpolation of operators. — New York: Pure Appl. Math., **129**, Academic Press, 1988.
2. Schep A. Minkowski's integral inequality for function norms. Oper. Theory Adv. Appl., 1995, **75**, P. 299–308.

Spherical designs

A. Bondarenko[1], D. Radchenko[1], M. Viazovska[2]
[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
[2]University of Cologne, Germany
andriybond@gmail.com, danradchenko@gmail.com, mviazovs@math.uni-koeln.de

The concept of a spherical design was introduced by Delsarte, Goethals and Seidel [1]. A set of points $x_1, ..., x_N$ in the unit sphere S^d is called a spherical t-design if the average value of any polynomial p of degree at most t on this set equals the average value of p on the whole sphere S^d.

Delsarte, Goethals and Seidel [1] proved that for each $d \in \mathbb{N}$ there is a positive constant c_d such that for each $t \in \mathbb{N}$ the minimal number $N(d,t)$ of points in a spherical t-design on S^d is not less than $c_d t^d$.

Korevaar and Meyers [2] conjectured that for each d there is a constant C_d such that $N(d,t) \leq C_d t^d$ for all $t \in \mathbb{N}$. Our main result is the following theorem [3] implying the conjecture of Korevaar and Meyers:

Theorem. *For each $d \in \mathbb{N}$ there is a constant C_d such that for every $t \in \mathbb{N}$ and $N \geq C_d t^d$ there exists a spherical t-design on S^d consisting of N points.*

Various generalizations of our result and related problems will be also discussed.

1. Delsarte P., Goethals J.M., Seidel J.J. Spherical codes and designs. Geom. Dedicata, 1977, **6**, P. 363–388.
2. Korevaar J., Meyers J.L. Spherical Faraday cage for the case of equal point charges and Chebyshev-type quadrature on the sphere. Integral Transforms Spec. Funct., 1993, **1**, P. 105–117.
3. Bondarenko A., Radchenko D., Viazovska M. Optimal asymptotic bounds for spherical designs. To appear in Annals of Mathematics.

Discrete d-dimensional moduli of smoothness

Z. Ditzian[1], A. Prymak[2]
[1]University of Alberta, Edmonton, Canada
[2]University of Manitoba, Winnipeg, Canada
zditzian@math.ualberta.ca, prymak@gmail.com

We show that on the d-dimensional cube $I^d \equiv [0,1]^d$ the discrete moduli of smoothness which use only the values of the function on a diadic mesh are sufficient to determine the regular moduli of smoothness of that function. As an important special case our result implies for $f \in C(I^d)$ and given integer r that when $0 < \alpha < r$, the condition

$$\left|\Delta^r_{2^{-n}\boldsymbol{e}_i} f\Big(\frac{k_1}{2^n}, \dots, \frac{k_d}{2^n}\Big)\right| \le M 2^{-n\alpha}$$

(where $\boldsymbol{e}_i$ is the unit vector in the i-th direction) for integers $1 \le i \le d$, $0 \le k_i \le 2^n - r$, $0 \le k_j \le 2^n$ when $j \ne i$, and $n = 1, 2, \dots$ is equivalent to

$$\left|\Delta^r_{h\boldsymbol{e}} f(\boldsymbol{\xi})\right| \le M_1 h^\alpha \quad \text{for } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^d,\ h > 0 \text{ and } |\boldsymbol{e}| = 1 \text{ such that } \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} + rh\boldsymbol{e} \in I^d.$$

For the proof we use a special sequence of interpolatory tensor product splines.

Boundedness on Lorentz spaces of Riesz potentials on commutative hypergroups

M. G. Hajibayov
National Aviation Academy of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
hajibayovm@yahoo.com

A hypergroup $(K, *_K)$ consists of a locally compact Hausdorff space K together with a bilinear, associative, weakly continuous convolution on the Banach space of all bounded regular Borel measures on K with the following properties:

1. For all $x, y \in K$, the convolution of the point measures $\delta_x *_K \delta_y$ is a probability measure with compact support.

2. The mapping: $K \times K \to \mathcal{C}(K)$, $(x, y) \mapsto \operatorname{supp}(\delta_x *_K \delta_y)$ are continuous with respect to the Michael topology on the space $\mathcal{C}(K)$.

3. There is an identity $e \in K$ with $\delta_e *_K \delta_x = \delta_x *_K \delta_e = \delta_x$ for all $x \in K$.

4. There is a continuous involution $\sim$ on K such that $(\delta_x *_K \delta_y)^\sim = \delta_{y^\sim} *_K \delta_{x^\sim}$ and $e \in \operatorname{supp}(\delta_x *_K \delta_y) \Leftrightarrow x = y^\sim$ for $x, y \in K$.

A hypergroup K is called commutative if $\delta_x *_K \delta_y = \delta_y *_K \delta_x$ for all $x, y \in K$. It is well known that every commutative hypergroup K possesses a Haar measure that will be denoted by λ. That is, for every Borel measurable function f on K, $\int\limits_K f(\delta_x *_K \delta_y) d\lambda(y) = \int\limits_K f(y) d\lambda(y)$ $(x \in K)$. Define the generalized translation operators T^x, $x \in K$, by $T^x f(y) = \int\limits_K f d(\delta_x *_K \delta_y)$ for all $y \in K$. If K is a commutative hypergroup, then $T^x f(y) = T^y f(x)$ and the convolution of two functions is defined by

$$f *_K \varphi(x) = \int\limits_K T^x f(y) \varphi(y^\sim) d\lambda(y).$$

For $1 \le p < \infty$ and $1 \le q \le \infty$, the Lorentz space $L^{p,q}(K,\lambda)$ is defined as $L^{p,q}(K,\lambda) =$ $= \{f : f \text{ is } \lambda\text{-measurable on } K, \|f\|_{K,p,q} < \infty\}$ where $\|f\|_{K,p,q}$ is defined by

$$\|f\|_{K,p,q} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**_K}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le p < \infty, 1 \le q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**_K}(t), & 1 \le p \le \infty, q = \infty. \end{cases}$$

Define the Riesz potential by

$$I_\alpha f(x) = \int\limits_K T^x \rho(e,y)^{\alpha-N} f(y^\sim) d\lambda(y), \ 0 < \alpha < N,$$

on commutative hypergroup $(K, *_K)$ equipped with the pseudo-metric ρ.
Also define a ball $B(e,r) = \{y \in K : \rho(e,y) < r\}$ with the center e and the radius r.

Theorem. *Let $(K, *_K)$ be a commutative hypergroup, with quasi-metric ρ and Haar measure λ satisfying $\lambda B(e,r) = Ar^N$, where A is a positive constant. Assume that $1 \le q \le \infty$, $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{N}{p}$. If $f \in L^{p,q}(K,\lambda)$, then $I_\alpha f \in L^{r,q}(K,\lambda)$ and*

$$\|I_\alpha f\|_{K,r,q} \le C\|f\|_{K,p,q},$$

where $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{N}$.

Mean oscillations of the logarithmic function

A. A. Korenovskyi[1], V. D. Didenko[2], N. J. Tuah[3]
[1]Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa, Ukraine
[2,3]Universiti Brunei Darussalam, Brunei
anakor@paco.net, victor.didenko@ubd.edu.bn, norjaidi.tuah@ubd.edu.bn

Let R be a (possibly unbounded) subinterval of the real line $\mathbb{R}$, and let $|\cdot|$ denote the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. The mean oscillation of function f on the bounded interval $I \subset R$ is defined by $\Omega(f,I) = |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| \, dx$, where $f_I = |I|^{-1} \int_I f(x) \, dx$. As usual, let $BMO \equiv BMO(R)$ refer to the class of all functions f such that $\|f\|_{*,R} \equiv \sup_{I \subset R} \Omega(f,I) < \infty$, where the supremum is taken over all bounded intervals $I \subset R$.

A fundamental property of the functions $f \in BMO$ consists in the exponential decay of their distribution functions, i.e. there are absolute constants B and b such that for any function $f \in BMO$ and for any bounded interval $I \subset R$, the John—Nirenberg inequality

$$|\{x \in I : |f(x) - f_I| > \lambda\}| \le B|I| \exp\left(-b\lambda / \|f\|_{*,R}\right), \quad 0 < \lambda < \infty, \tag{1}$$

holds [1].

It was shown in [2,3] that for a bounded interval R, the largest value of the constant b in (1) is $2/\mathrm{e}$. Moreover, the John—Nirenberg inequality (1) is valid for $b = 2/\mathrm{e}$, $B = \mathrm{e}^{4/\mathrm{e}}/2$ and these constants b and B are sharp [4]. If R is a semi-infinite interval, the above mentioned constants b and B in (1) are still sharp, cf. [5]. However, for $R = \mathbb{R}$ the authors are not aware of any function f which would show that $b = 2/\mathrm{e}$ is the sharp constant, and our task here is to presents an upper bound for the set of possible values $b \equiv b(\mathbb{R})$ in (1).

Theorem ([5]). *Let $b_0 \equiv b_0(\mathbb{R})$ denote the least upper bound of the set all constants b such that the John—Nirenberg inequality* (1) *holds. Then* $2/\mathrm{e} \le b_0 \le 2c/\mathrm{e}$, *where* $c \approx 1.265$ *and the exact value of c can be obtained from a solution of a transcendental equation.*

Note that the problem of the evaluation of the constant b_0 is closely connected with BMO-norm estimates of the symmetric rearrangements of functions [6] and with the norm estimates of even or periodic extensions of functions with the bounded mean oscillation [7].

This work was partially supported by the University of Brunei Darussalam under Grant UBD/GSR/S&T/19.

1. John F., Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math., 1961, 14, P. 415–426.
2. Korenovskii A. A. On the connection between mean oscillation and exact integrability classes of functions. Math. USSR Sbornik, 1992, **71**, 2, 561–567. (English, transl. from Russian).
3. Korenovskii A. A. Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions. Lect. Notes Unione Mat. Ital., **4**, Springer/UMI, Berlin/Bologna, 2007.
4. Lerner A. K. The John-niremberg inequality with sharp constants. arXiv:1303.3310v1 [math.CA] 13 Mar 2013.
5. Didenko V. D., Korenovskyi A. A., Nor Jaidi Tuah. Mean oscillations of the logarithmic function. Ricerche mat., Published online: 13 December 2012, DOI 10.1007/s11587-012-0141-5.
6. Klemes I. A mean oscilation inequality. Proc. Amer. Math. Soc., 1985, **93**, № 3, P. 497–500.
7. Shanin R. V. On extension of functions with bounded mean oscillation. Ukr. Math. Bull., In Press.

Boundary versions of the Worpitzky theorem for two-dimensional continued fractions

Kh. Kuchminska
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine
khkuchminska@gmail.com

Despite the well known convergence theorem for continued fractions was proposed by J. Worpitzky in 1865, new proofs, interpretations and applications of this theorem one can find till now. We state the theorem here, somewhat rephrased for practical purposes.

Theorem (Woprpitzky rephrased [1]). *Let ρ be any positive number in (0, 1/2]. Let in the continued fraction*

$$\mathop{D}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1} \tag{1}$$

all a_n be complex numbers bounded by

$$|a_n| \le \rho(1-\rho), n = 0, 1, \dots. \tag{2}$$

Then the continued fraction (1) *converges and has its value in the disk* $|w| \le \rho$.

The following question was raised by H. Waadeland [1] for the continued fraction: what happens to the set of values of (1) when the condition (2) $|a_n| \le \rho(1-\rho)$ is replaced by $|a_n| = \rho(1-\rho)$?

The answer is that the set of values is the annulus

$$\rho\frac{1-\rho}{1+\rho} \le |w| \le \rho.$$

For $\rho = 1/2$, i.e. $|a_n| = 1/4$ the annulus is $1/6 \le |w| \le 1/2$.

For a two-dimensional continued fraction

$$\underset{i=0}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i}, \quad \Phi_i = 1 + \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_{i+j,i}}{1} + \underset{j=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_{i,i+j}}{1},$$

a Worpitzky type theorem was also proved [2].

The same question for a two-dimensional continued fraction is answered by obtained results.

1. Waadeland H. A Worpitzky Boundary Theorem for N-Branched Continued Fractions. Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions, 1993, **2**, P. 24–29.
2. Kuchminska Kh. Two-dimensional continued fractions. — Lviv: Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, 2010 (in Ukrainian).

Interpolation problems in the classes of entire functions of zero order

K. G. Malyutin, O. A. Bozhenko
Sumy state university, Sumy, Ukraine
malyutinkg@yahoo.com, ksu21021012@mail.ru

We consider the problem of multiple interpolation in the class E_0 of entire functions of zero order: $F(a_n) = b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, where the sequence $A = \{a_n\}$ has limit point ∞ and the numbers $\{b_n\}$ satisfy the condition

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n|} \le 0\,.$$

Two criteria of resolvability of a problem of simple free interpolation in the class of the entire functions of zero order are received. The first criterion is formulated by the canonical product of the interpolation knots, the second criterion is formulated by the measure generated by these knots.

The following result is valid.

Theorem. *Let $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_i \ne a_j$ $(i \ne j)$, be the sequence of points which has limit point ∞. The following three statements are equivalent*:

(1) *the sequence A is an interpolation sequence in the class E_0*;

(2) *for all $\varepsilon > 0$ the following relation is true*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\varepsilon}} < \infty \tag{1}$$

and canonical product $E_A(z)$ of A satisfies the condition:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln \ln \frac{1}{|E_A'(a_n)|} \leqslant 0\,;$$

(3) (1) *is true and there exists a zero proximate order $\rho(r)$ such that*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \int_0^1 \frac{\Phi_A(z,\alpha)}{\alpha}\, d\alpha < \infty\,.$$

Here

$$\Phi_A(z, \alpha) = \frac{(n_A(C(z, \alpha|z|)) - 1)^+}{|z|^{\rho(|z|)}},$$

n_A — counting function of quantity of points of A.

The research was carried out on a subject No 0111U002152.

1. Lapin G. P. Interpolation in the class of entire functions of finite order. Izvestiya VUZ. Matematika, 1959, 5 (12), P. 146–153.
2. Malyutin K. G., Bozhenko O. A. Free interpolation by entire functions of finite order. DAN Ukrainy, ser. matem., 2012, №12, P. 19–23.

Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces

V. A. Mikhailets, A. A. Murach
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine
mikhailets@imath.kiev.ua, murach@imath.kiev.ua

We describe all Hilbert spaces that are interpolation spaces for an arbitrary couple of inner product Sobolev spaces. These interpolation spaces form the extended Sobolev scale $\{H^\varphi : \varphi \in \mathrm{RO}\}$, where the function parameter $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ serves as a smoothness index and runs over the class of all Borel measurable functions that are RO-varying at $+\infty$ in the sense of V. G. Avakumović. The latter property means that there exist numbers $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, with $s_0 \le s_1$, and a number $c \ge 1$ such that

$$c^{-1}\lambda^{s_0} \le \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \le c\lambda^{s_1} \quad \text{for each} \quad t \ge 1,\ \lambda \ge 1. \tag{1}$$

(the numbers s_0, s_1, and c may depend on φ).

The extended Sobolev scale over $\mathbb{R}^n$ consists of the Hörmander inner product spaces

$$H^\varphi(\mathbb{R}^n) := \big\{w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \varphi(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)\big\}, \quad \|w\|_\varphi := \|\varphi(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi)\|_{L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)},$$

and then is defined over Euclidean domains and smooth compact manifolds in the standard way. Here $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ and $\widehat{w}$ is the Fourier transform of a tempered distribution w. Specifically, if $\varphi(t) \equiv t^s$ for a certain $s \in \mathbb{R}$, then H^φ is the Sobolev space $H^{(s)}$ of order s.

Suppose that Ω is either the whole space $\mathbb{R}^n$ or an open half-space in $\mathbb{R}^n$ or a compact infinitely smooth manifold.

Theorem [1]. *Let $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$. A Hilbert space H is an interpolation space for the couple of Sobolev spaces $[H^{(s_0)}(\Omega), H^{(s_1)}(\Omega)]$ if and only if $H = H^\varphi(\Omega)$ up to norms equivalence for some function parameter $\varphi \in \mathrm{RO}$ satisfying* (1).

Recall that a Hilbert space H is said to be an interpolation space for a couple $[X_0, X_1]$ of Hilbert spaces $X_1 \subset X_0$ if the following properties are fulfilled:

(a) $X_1 \subset H \subset X_0$ with continuous embeddings;

(b) an arbitrary linear operator $T : X_0 \to X_0$, with $T(X_1) \subset X_1$, which is bounded on both spaces X_0 and X_1 is also bounded on H.

The extended Sobolev scale over Ω is characterized by the following interpolation properties:

(i) This scale consists of all Hilbert spaces that are interpolation spaces for couples of inner-product Sobolev spaces $[H^{(s_0)}(\Omega), H^{(s_1)}(\Omega)]$, with $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$.

(ii) Each space $H^\varphi(\Omega)$, with $\varphi \in \mathrm{RO}$, can be obtained by means of the interpolation with an appropriate function parameter of a certain couple $\big[H^{(s_0)}(\Omega), H^{(s_1)}(\Omega)\big]$ of Sobolev spaces.

(iii) This scale is closed with respect to interpolation with a function parameter.

These properties imply various applications of the extended Sobolev scale in the theory of partial differential operators [2–4].

1. Mikhailets V. A., Murach A. A. Interpolation Hilbert spaces for a couple of Sobolev spaces. Preprint arXiv:1106.2049, 14 pp.
2. Mikhailets V. A., Murach A. A. Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2010 [in Russian]. (Available on arXiv:1106.3214.)
3. Mikhailets V. A., Murach A. A. On elliptic operators on a closed compact manifold. Dopov. Nats. Acad. Nauk. Ukr. Mat. Pryr. Tehn. Nauki, 2009, № 3, P. 29–35 [in Russian].
4. Mikhailets V. A., Murach A. A. The extended Sobolev scale and elliptic operators. Ukrainian Math. J., 2013, **65**, № 3, P. 368–380.

The Applications of the Neutrix Calculus to the Distributions and Special Functions

Emin Özçaḡ

Hacettepe University, Ankara, Turkey

ozcag1@hacettepe.edu.tr

The divergent integrals appear in various field of science and engineering. Therefore the finite part of divergent integrals are important in, for instance, quantum field theory, aerodynamics, aeroacoustics and electro magnetics etc.

The technique of neglecting appropriately defined infinite quantities was devised by Hadamard and the resulting finite value extracted from the divergent integral is usually referred to as the Hadamard finite part.

Using the concepts of neutrix which is additive group of negligible functions that does not contain any constant except 0, and neutrix limit due to van der Corput, Fisher gave the general principle for the discarding of unwanted infinite quantities from asymptotic expansions and has been exploited in context of distributions, in connection with the composition, the multiplication and the convolution of distributions.

We here present how the neutrix calculus is used to define the composition, the multiplication and the convolution of distributions and with the examples. And we also apply the neutrix calculus to specials functions in conjunction with incomplete beta and gamma functions in order to extend their definitions for negative integers.

1. J. G. van der Corput. Introduction to the neutrix calculus, 1959-1960, 7, 291-398.
2. Farassat F. Introduction to Generalized Functions with Applications in Aerodynamics and Aeroacoustics, NASA Technical Paper 3428, 1996.
3. Fisher B. Neutrices and the product of distributions. Studia Math., 1976, 57, 263-274.
4. Fisher B. A non-commutative neutrix product of distributions. Math. Nachr., 1982, 108, 117-127.
5. Y. Jack Ng and H. van Dam. Neutrix Calculus and Finite Quantum Field Theory. J. Phys., A; Math. Gen., 2005, 38, 317-323.
6. Özçaḡ E., Ege İ., Gürçay H. and Jolevska-Tuneska B. Some remarks on the incomplete gamma function, in: Kenan Taş et al. (Eds.), Mathematical Methods in Engineering, Springer, Dordrecht, 2007.

One note on level sets of pseudo-harmonic functions in the plane.

E. Polulyakh
Institute of mathematics, NAS Ukraine, Kyiv, Ukraine
polulyah@imath.kiev.ua

A function $f(z)$ is *pseudo-harmonic at a point* $p \in \mathbb{R}^2$ if there exist a neighborhood $U(p)$ and a homeomorphism φ of $U(p)$ onto open unit disk in the plane such that $\varphi(p) = 0$ and $f \circ \varphi^{-1}(z)$ is harmonic and is not constant (see [1]).

A function f is called *pseudo-harmonic in the plane* if it is pseudo-harmonic at all its points (see [1]).

Let T be a locally-finite tree, finite or infinite. Denote by V_0 the set of all vertices of T of degree 1.

Let S^2 be a 2-sphere. We fix a point $s \in S^2$.

A continuous mapping $\Phi : T \to S^2$ is *plane* if it complies with the following properties:

(i) $\Phi^{-1}(s) = V_0$;
(ii) the set $\Phi(T) \cup \{s\}$ is closed in S^2;
(iii) $\Phi|_{T \setminus V_0} : T \setminus V_0 \to S^2$ is the homeomorphism onto its image.

A continuous mapping $\Psi : T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ is *plane*, if there exist a plane mapping $\Phi : T \to S^2$ and a homeomorphism $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{s\}$ such that

$$\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi|_{T \setminus V_0}.$$

Let us consider a finite forest $T = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$ (a finite disjoint union of trees).

A continuous mapping $\Psi : T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ is *plane* if all mappings $\Psi_i = \Psi|_{T_i \setminus V_0} : T_i \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ are plane, and also $\Psi(T_i \setminus V_0) \cap \Psi(T_j \setminus V_0) = \emptyset$ for $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Theorem. *Assume that degree of every vertex of a finite forest T either is 1 or is an even number greater than 2. Let $\Psi : T \setminus V_0 \to \mathbb{R}^2$ be a plane mapping.*
Then there exists a pseudo-harmonic function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, such that $\Psi(T \setminus V_0) = f^{-1}(0)$.

1. Morse M. Topological methods in the theory of functions of a complex variable. Annals of Mathematics Studies. — Princeton, N. J., Princeton University Press, 1947, № 15.

Some extremal problems of approximation theory of functions at the whole real axis

S. B. Vakarchuk
Alfred Nobel University, Dnipropetrovsk, Ukraine
sbvakarchuk@mail.ru

Let us consider one of the obtained results according to the theme, indicated in the title of abstract. Different aspects of the approximation by entire functions of exponential type at the whole real axis $\mathbb{R} := \{x : \infty < x < \infty\}$ were studied in the works of S. N. Bernshtein, N. I. Akhiezer, S. M. Nikolsky, A. F. Timan, M. F. Timan, I. I. Ibragimov and many others (see, for example, [1]). We use the Steklov function $S_h(f),\ h > 0$, instead of the shift operator $T_h f$ under the definition of the characteristic of smoothness of functions $f \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\widetilde{\Omega}_k(f,t) := \sup\{\|\widetilde{\Delta}_h^k(f)\|_2 : 0 < h \leqslant t\},\ k \in \mathbb{N};$$

$$\widetilde{\Delta}_h^k(f,x) := (S_h - \mathbb{I})^k(f,x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}S_{h,i}(f,x),$$

where $\mathbb{I}$ is the unit operator in the space $L_2(\mathbb{R})$; $S_{h,i}(f) := S_h(S_{h,i-1}(f)),\ i \in \mathbb{N}$, and $S_{h,0}(f) \equiv f$. For the classes of 2π-periodic functions the similar characteristic of smoothness has been considered, for example, in the works [2]-[3]. Let $L_2^r(\mathbb{R}),\ r \in \mathbb{N}$, be the class of functions $f \in L_2(\mathbb{R})$, whose derivatives $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} \equiv f$) are locally absolutely continuous and $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$. For $f \in L_2(\mathbb{R})$ we assume

$$\mathcal{A}_\sigma(f) := \inf\{\|f-g\|_2 : g \in \mathbb{B}_{\sigma,2}\}\ ,$$

where $\mathbb{B}_{\sigma,2}$ is the subspace of entire functions of exponential type $\leqslant \sigma$, belonging to $L_2(\mathbb{R})$. We assume the ratio $0/0$ be equal to zero.

Theorem. *Let* $k \in \mathbb{N}; 0 < \sigma < \infty; r, \mu \in \mathbb{Z}_+$ *and* $\mu \leqslant r; 0 < p \leqslant 2; \operatorname{sinc}(x) := \sin(x)/x; t_*$ *is the value of the argument of function* $\operatorname{sinc}(x)$ *at which this function attains the least value on the hulf-interval* $[0,\infty)$ *(*$4,49 < t_* < 4,51$*);* $0 < t < t_*/\sigma$*;* φ *be a nonnegative integrable function, not equivalent to zero on* $[0,t]$*;*

$$\alpha_{x,k,\mu,p}(\varphi,t) := x^\mu\left\{\int_0^t (1-\operatorname{sinc}(x\tau))^{kp}\varphi(\tau)d\tau\right\}^{1/p}.$$

Then the following double inequality holds

$$\frac{1}{\alpha_{\sigma,k,\mu,p}(\varphi,t)} \leqslant \sup_{f\in L_2^r(\mathbb{R})}\frac{\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\left\{\int_0^t \widetilde{\Omega}_k^p(f^{(r)},\tau)\varphi(\tau)d\tau\right\}^{1/p}} \leqslant \frac{1}{\inf\{\alpha_{x,k,\mu,p}(\varphi,t) : \sigma \leqslant x < \infty\}}\ .$$

In the case $r = 0$ *we assume* $L_2^0(\mathbb{R}) \equiv L_2(\mathbb{R})$ *and the value of supremum we calculate in the terms of nonequivalent to zero functions* $f \in L_2(\mathbb{R})$*.*

The exact values of average ν-widths — linear, Bernshtein and Kolmogorov have been obtained too for the classes of functions, defined by the characteristic of smoothness $\widetilde{\Omega}_k$.

1. Vakarchuk S. B. On some extremal problems of approximation theory of functions on the real axis. I. Journal of Mathematical Sciences, 2013, **188**, № 2, P. 146–166.
2. Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I. A sharp inequality of Jackson-Stechkin type in L_2 and the widths of functional classes. Mathematical Notes, 2009, **86**, № 3, P. 306–313.
3. Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I. Jackson-Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of functional classes. Mathematical Notes, 2012, **92**, № 4, P. 3–17.

Quasihomographies in the theory of Teichmüller space

J. Zając

State School of Higher Education in Chełm, Chełm, Poland

jzajac@kul.pl

One of the most powerful tools, when studying Riemann surface, is the notion of Teichmüller space, i.e. a metrizable and complete quotient space of closed Riemann surfaces with genus $g \geq 2$. While the concept was introduced by ingenious German mathematician O. Teichmüller before World War II, the name appears because of L. Bears and L. V. Ahlfors in the late fifties. The function - theoretic model of this, not easy understandable, original Teichmüller space, was built up by the use of equivalence classes of quasiconformal automorphisms of the unit disc or its boundary representation introduced by the author, called quasihomographies. Making use of the Poisson integral extension operator one may construct harmonic representation of the universal Teichmüller space in which, particular, boundary normalized harmonic automorphisms of the unit disc, represent elements of the space, in question.

The main purpose of the lecture is to present a number of theorems and constructions regarding metric and topological feature of harmonic and quasihomographical models of the universal Teichmüller space. This idea links once again extremal quasiconformal automorphisms of the unit disc with two classes of analytic functions, defined in the unit disc and called the conjugate Paprocki spaces of analytic functions. Some basic properties of functions from those spaces will also be presented during this lecture.

Fixed point theorems for multivalued mappings

Yu. B. Zelinskii

Institute of Mathematics Ukrainian National Academy of Science, Kiev, Ukraine

zel@imath.kiev.ua

This talk is devoted to studying of some properties of multivalued mappings in Euclidean space. There were proved theorems on a fixed point for multivalued mappings whose restrictions to some subset in the closure of a domain of Euclidean space satisfy “an acute angle condition” or “a strict acute angle condition”. Obtained results are still true also in the case of non continuous mappings.

Теорема. *Let D be domain of Euclidean space $X = E^n$. Let $K \subset \overline{D}$ be a subset in the closure of this domain and let there exists a restriction F_1 of multivalued mapping $F : \overline{D} \to E^n = Y$ on subset K, which satisfied “a coacute angle condition” and convex hull conv $F_1(K)$ is compact. If $F(\overline{D}) \supset convF_1(K)$, then $0 \in F(\overline{D})$.*

Теоремы Джексона в случае приближения алгебраическими многочленами в метрических пространствах L_ψ

Т. А. Агошкова

Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, Днепропетровск, Украина

tanya_agoshkova@mail.ru

Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — действительнозначные функции;

$L_0 \equiv L_0[-1,1]$ — множество всех таких функций, которые почти всюду на $[-1,1]$ конечны и измеримы;

Ω — класс функций $\psi : R_+ \to R_+$, являющихся модулем непрерывности;

$L_\psi \equiv L_\psi[-1,1] = \{f \in L_0[-1,1] : \|f\|_\psi := \int\limits_{-1}^{1} \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty\}$ — метрическое пространство;

$\omega_k(f,h)_\psi = \sup\limits_{0 \le t \le h} \int\limits_{-1}^{1-kt} \psi\left(| \triangle_t^k f(x)|\right) dx$ — модуль непрерывности k-го порядка, $k \in \mathbb{N}$, функции f в пространстве L_ψ при $0 \le h \le \frac{2}{k}$, где $\triangle_t^k {=} \triangle_t \left(\triangle_t^{k-1}\right)$, $\triangle_t^1 f(x) := \triangle_t f(x) :=$ $:= f(x+t) - f(x)$;

$E_n(f)_\psi = \inf\limits_{P_n} \|f - P_n\|_\psi$ — наилучшее приближение f в L_ψ алгебраическими многочленами степени не выше n;

γ_ψ — нижний показатель растяжения функции ψ [1, с. 76].

В метрических пространствах $L_p[-1,1]$, $0 < p < 1$, в работе [2] доказаны теоремы Джексона для приближения алгебраическими многочленами. Нами исследовалась аналогичная задача в пространствах L_ψ.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_\psi[-1,1]$, $\gamma_\psi > 0$. Тогда для любых натуральных k, $n \geq k-1$, выполняются неравенства*

$$E_n(f)_\psi \leq C_{\psi,k}\omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_\psi.$$

Теорема 2. *Если $\gamma_\psi = 0$, то в пространстве L_ψ неравенства Джексона в форме*

$$\sup_n \sup_{f\in L_\psi, f\neq const} \frac{E_{n-1}(f)_\psi}{\omega_k(f,\alpha_n)_\psi} < \infty$$

невозможны ни при каком выборе последовательности $\{\alpha_n\}$ такой, что $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \downarrow 0$.

Аналогичный результат в случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами смотри в [3] (при $k = 1$).

1. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. — М: Наука, 1978.
2. Стороженко Э. А. Приближения алгебраическими многочленами в L_p, $0 < p < 1$. Вестник МГУ, Серия: Математика, Механика. 1978, № 4, С. 87–92.
3. Пичугов С. А. О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II. Укр. мат. журн., 2011, **63**, № 11, С. 1524–1533.

Оценки тригонометрических поперечников класса Никольского–Бесова в пространстве Лоренца

Г. Акишев

Карагандинский государственный университет, Караганда, Казахстан

akishev@ksu.kz

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, p_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$ имеющих 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{p_m}-1}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}\left(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1]).

$a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m}$, где $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$. Для функции $f \in L(I^m)$ и числа $s \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\delta_0(f,\bar{x}) = a_0(f), \quad \delta_s(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(s)} a_{\overline{n}}(f)e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$

$$\rho(s) = \left\{\overline{k} = (k_1,...,k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad [2^{s-1}] \leq \max_{j=1,...,m}|k_j| < 2^s\right\}.$$

Рассматриваются классы Никольского–Бесова. Пусть $1 < p_j < +\infty$, $1 < \theta_j < \infty$, $j = 1, ..., m$, $1 \le \tau \le \infty$ и $r > 0$

$$B^r_{\bar p,\bar\theta,\tau} = \Big\{ f \in L^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m) : \Big(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr\tau} (\|\delta_s(f)\|^*_{\bar p,\bar\theta})^\tau \Big)^{\frac{1}{\tau}} \le 1 \Big\}.$$

Пусть дан некоторый класс $F \subset L^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m)$. Рассматривается тригонометрический n-поперечник $d^T_n(F, L^*_{\bar p,\bar\theta})$ класса F в пространстве $L^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m)$. Точные порядки тригонометриических поперечников класса Соболева $W^{\bar r}_p$, Никольского $H^{\bar r}_p$, Бесова $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q установлены Р. С. Исмагиловым, Э. С. Белинским, В. Е. Майоровым, Г. Г. Магарил-Ильяевым, В. Н. Темляковым, А. С. Романюком, С. А. Стасюком и другими.

Теорема 1. *Пусть* $\bar p = (p_1, ..., p_m)$, $\bar q = (q_1, ..., q_m)$ *и* $1 < p_j < 2 \le q_j < \frac{p_j}{p_j - 1}$, $1 < \theta^{(1)}_j, \theta^{(2)}_j < \infty$, $j = 1, ..., m$, $1 \le \tau \le \infty$, $r > m$. *Тогда*

$$d^T_n(B^r_{\bar p,\bar\theta^{(1)},\tau}, L^*_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}) \asymp n^{-\frac{r}{m} + \frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^m (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{2})}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\bar p = (p_1, ..., p_m)$, $\bar q = (q_1, ..., q_m)$ *и* $1 < p_j < q_j \le 2$, $1 < \theta^{(1)}_j, \theta^{(2)}_j < \infty$, $j = 1, ..., m$, $1 \le \tau \le +\infty$, $r > \sum\limits_{j=1}^m (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})$. *Тогда* $d^T_n(B^r_{\bar p,\bar\theta^{(1)},\tau}, L^*_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}) \asymp n^{-\frac{r}{m} + \frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^m (\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j})}$.

В случае $p_j = \theta^{(1)}_j = p$, $q_j = \theta^{(2)}_j = q$, $j = 1, ..., m$ из этих теорем следуют результаты [2].

1. Blozinski A. P. Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms. Transactions American mathematical society. 1981, **263**, № 1, P. 146–167.
2. Romanyuk A. S., Romanyuk V. S. Trigonometric and orthoprojection widths of classes of periodic functions of many variables. Ukr. Mathem. J., 2009, **61**, № 10, P. 1589–1609.

Неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина

babenko.vladislav@gmail.com, nparfinovich@yandex.ru

Пусть C — пространства непрерывных на R^m, а L_∞ — пространства существенно ограниченных на R^m функций с соответствующими нормами $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_\infty$. Обозначим через $L^\Delta_{\infty,\infty}$ класс функций $f \in L_\infty$, для которых значения оператора Лапласа Δf принадлежат пространству L_∞. При этом Δf понимается в смысле Соболева.

Для дробных интегралов порядка α $(0 < \alpha < 1)$ вида

$$(I^\alpha_{x_k} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x \mp te_k)}{|t|^{1-\alpha}}\, dt,$$

где $e_k = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 0)$, нами доказана

Теорема. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Для всех функций* $u \in L^\Delta_{\infty,\infty}$ *имеет место точное неравенство*

$$\left\| I^\alpha_{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_\infty \le \frac{2 \cdot 2^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|u\|_C^{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \|\triangle u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{1}$$

Экстремальными функциями в (1) *являются функции*

$$u(x)=\begin{cases}\frac{x_i}{h^2}(h-x_i)+\frac{x_i}{h} & 0\le x_i\le h,\\ \frac{x_i}{h^2}(h-x_i)+\frac{x_i}{h} & -h\le x_i\le 0,\\ 1 & x_i\ge h,\\ -1 & x_i\le -h,\end{cases}$$

$h>0, i=1,2,...,n.$

Отметим, что точные неравенства, оценивающие $\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_C$ через нормы $\|u\|_C$ и $\|\Delta u\|_\infty$ были получены В. Г. Тимофеевым в [1].

1. Тимофеев В. Г. Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных. Мат. заметки, 1985, **37**, № 5, С. 676–689.

Деякі кругові області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду

О. Є. Баран

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

boe13@ukr.net

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{D}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{1},\tag{1}$$

де $i(k)$ — мультиіндекс, $i(k)\in I=\{i(k):\ i(k)=i_1i_2\ldots i_k,\ 1\le i_p\le i_{p-1},\ p=\overline{1,k},\ k\ge 1,\ i_0=N\}$, N — максимальна кількість гілок розгалужень, $a_{i(k)}$ — комплексні числа.

Задамо відображення $l: I\to\mathbb{N}$ за таким правилом: $l=l(i(k))=\sum_{s=1}^{k}\delta_{i_k}^{i_s}$, де $\delta_{i_k}^{i_s}$ — символ Кронекера. Залежно від значення величини l і значення останнього індексу i_k в мультиіндексі $i(k)$, розіб'ємо множину всіх мультиіндексів I на підмножини, які попарно не перетинаються:

$$I_1^p=\{i(k):\ i(k)\in I,\ i_k=p,\ l=1,\ k\ge 1\},$$
$$I_2^p=\{i(k):\ i(k)\in I,\ i_k=p,\ l-\text{парне},\ k\ge 2\},$$
$$I_3^p=\{i(k):\ i(k)\in I,\ i_k=p,\ l-\text{непарне},\ l>1,\ k\ge 3\},\quad p=\overline{1,N}.$$

Теорема. *ГЛД* (1) *збігається, якщо виконуються умови:*

а) $N>1$ *і елементи* $a_{i(k)}$ *належать областям*

$$\left|a_{i(k)}\right|\le\frac{\rho_1-\varepsilon_1}{i_{k-1}-1},\quad \text{якщо}\quad i(k)\in I_1^{i_k},$$
$$\left|a_{i(k)}\right|\le\rho-\varepsilon_3,\quad \text{якщо}\quad i(k)\in I_3^{i_k},\tag{2}$$
$$\left|a_{i(k)}\right|\ge(2+\rho_1)(1+\rho_1+\rho+\varepsilon_2),\quad \text{якщо}\quad i(k)\in I_2^{i_k},\tag{3}$$

або

б) $N=1$ *і елементи* $a_{i(k)}$ *належать областям* (2)*, якщо* $i(k)\in I_1^{i_k}\cup I_3^{i_k}$*, або* (3)*, якщо* $i(k)\in I_2^{i_k}$*, де* $\rho_1=0$ *при* $N=1$ *і* $\rho_1>0$ *при* $N>1$, $\rho>0$, $0<\varepsilon_1<\rho_1$, $0<\varepsilon_3<\rho$, $\varepsilon_2>0$.

Дана теорема є багатовимірним узагальненням ознаки збіжності Лейтона–Уолла неперервних дробів [1].

1. Leighton W., Wall H. On the transformation and convergence of continued fractions. Amer. J. Math., 1936, **58**, 267–281.

Об одной задаче теории аналитических функций с конечной группой сдвигов

П. Г. Башкарёв[1]**, З. М. Лысенко**[2]
[1]Одесский государственный экологический университет, Одесса, Украина
[2]Одесский национальный университет им. И. И.Мечникова, Одесса, Украина
vergos@rambler.ru, ivanpribegin@rambler.ru

Пусть простой замкнутый контур Ляпунова Γ ограничивает конечную односвязную область D^+. Дополнение $D^+\bigcup\Gamma$ до полной плоскости обозначим через D^-. На контуре Γ задана конечная группа гомеоморфизмов кривой Γ на себя

$$G=\{e,\alpha,\ldots,\alpha^{n-1},\alpha\circ\beta,\ldots,\alpha^{n-1}\circ\beta\},$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, соответственно, сохраняют и изменяют ориентацию, $\alpha^i(t)$, $\beta(t)$ $(i=\overline{0,n-1})$ удовлетворяет условию Гёльдера на Γ. Определим ещё на контуре Γ сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\gamma(t)$ таким образом, чтобы полученная после его присоединения группа гомеоморфизмов контура Γ на себя уже не была конечной.

Рассмотрим краевую задачу

$$F^+[\gamma(t)]=\sum_{i=1}^{n-1}\Big\{a_i(t)F_-[\alpha^i(t)]+b_i(t)F^-[\beta(\alpha^i(t))]+c_i(t)\overline{F^-[\alpha^i(t)]}+d_i(t)\overline{F^-[\beta(\alpha^i(t))]}\Big\}+h(t)$$

об отыскании кусочно аналитической функции $F(z)$, исчезающей на бесконечности. Здесь a_i, b_i, c_i, d_i $(i=\overline{0,n-1})$ и $h(t)$ — известные непрерывные функции на Γ.

Для рассматриваемой задачи построена союзная задача, вычислен индекс как разность k линейно независимых решений исходной однородной задачи и числа l линейно независимых решений союзной задачи. Условия разрешимости неоднородной задачи выражаются через решения соответствующей союзной задачи.

Рассматриваемая краевая задача содержит искомую функцию под знаком комплексного сопряжения, поэтому линейная независимость решений однородной и условия разрешимости неоднородной задачи рассматриваются над полем вещественных чисел.

О третьих модулях непрерывности

С. И. Безкрылая[1]**, А. Н. Нестеренко**[2]**, А. В. Чайковский**[2]
[1]Национальный педагогический университет имени М.П. Драгоманова, Киев, Украина
[2]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина
BezkrulaSI@gmail.com, NesterenkoON@ukr.net, ChaikovskiyAV@ukr.net

Для функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ рассматриваем первую, вторую и третью конечные разности в точке $x\in\mathbb{R}$ с шагом $h>0:$

$$\Delta_h^1(f,x)=f(x+h)-f(x),$$

$$\Delta_h^2(f,x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x),$$
$$\Delta_h^3(f,x)=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x).$$

Пусть $UC(\mathbb{R})$ — пространство равномерно непрерывных функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Для функции $f\in UC(\mathbb{R})$ рассматриваем ее (равномерный) k-й модуль непрерывности

$$\omega_k(f,\delta)=\sup\{\,|\Delta_h^k(f,x)|:x\in\mathbb{R},0<h\le\delta\},\delta>0,$$

при $k = 1$, $k = 2$ і $k = 3$. Легко доказать, что модули непрерывности $\omega = \omega_k(f, \cdot)$ при $k = 1, 2, 3$ удовлетворяют таким условиям:

1) $\omega(0) = 0$;

2) функция ω непрерывна на $[0, +\infty)$;

3) функция ω неубывающая на $[0, +\infty)$;

4) для произвольных $\delta \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\omega(n\delta) \leq n^k \omega(\delta)$.

Очевидно, что условие 4) для неотрицательных функций следует из условия:

5) функция $(0,\ +\infty) \ni \delta \mapsto \omega(\delta)/\delta^k$ монотонно не возрастает на $(0, +\infty)$.

В монографии [1] функции, удовлетворяющие условиям 1) – 3) и 5), называются k-мажорантами.

И.А. Шевчук обратил внимание авторов на следующий вопрос. Правильно ли, что при $k = 3$ каждая k-мажоранта является модулем непрерывности k-го порядка какой-либо функции из пространства $UC(\mathbb{R})$ на некотором отрезке $[0, \delta_0], \delta_0 > 0$? При $k = 1$ положительный ответ на подобный вопрос замечен еще С. М. Никольским [2]. Для $k = 2$ отрицательный ответ на этот же вопрос дан С. В. Конягиным [3].

Нами установлено, что для случая $k = 3$ ответ также отрицательный.

Теорема. *Для каждого числа $\alpha > 2$ существует ненулевая функция $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям 1) – 3), такая, что функция $(0,\ +\infty) \ni \delta \mapsto \omega(\delta)/\delta^\alpha$ монотонно не возрастает на $(0, +\infty)$ и при этом ни для какой функции $f \in UC(\mathbb{R})$ не выполняется равенство $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_3(f, \delta)/\omega(\delta) = 1$.*

Для доказательства теоремы мы в целом повторяем рассуждения С. В. Конягина из работы [3], но при этом используем установленное нами неравенство

$$2\omega_3(f, Nt) \leq \omega_3(f, (N+1)t) + \omega_3(f, (N-1)t) + 6N\omega_3(f, t), t > 0, N \in \mathbb{N}, f \in UC(\mathbb{R}),$$

аналог которого для второго модуля непрерывности получил С. В. Конягин в [3] :

$$2\omega_2(f,\ T) \leq \omega_2(f,\ T + t) + \omega_2(f,\ T - t) + 2\omega_2(f,\ t), 0 \leq t \leq T, f \in UC(\mathbb{R}).$$

1. Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. — К.: Наук. думка, 1992.
2. Никольский С. М. Ряд Фурье с данным модулем непрерывности. ДАН СССР., 1946, **52**, № 3, С. 191–194.
3. Конягин С. В. О вторых модулях непрерывности. Тр. Мат. ин-та РАН, 2010, **269**, С. 1–3.

Оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій в метриках просторів C та L

В. В. Боденчук, А. С. Сердюк

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

bodenchuk@ukr.net, serdyuk@imath.kiev.ua

Нехай C^ψ_β — множина 2π-періодичних функцій f, що зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = A + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_\beta(t)dt,\ A \in \mathbb{R}, \varphi \perp 1, \beta \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

з фіксованим сумовним ядром $\Psi_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\psi(k)>0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty$. Функцію φ в рівності (1) називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають через f^ψ_β. Розглядаються класи $C^\psi_{\beta,p}=\{f\in C^\psi_\beta : \|f^\psi_\beta\|_p\leqslant 1\}$, $p=1,\infty$. Через $\mathcal{D}_q$ позначимо множину послідовностей $\psi(k)>0$, для яких виконується умова $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)}=q$, $q\in(0,1)$.

Розглядається задача про знаходження точних значень колмогоровських поперечників класів $C^\psi_{\beta,p}$, $p=1,\infty$, тобто величин вигляду

$$d_m(C^\psi_{\beta,p},L_p)=\inf_{F_m\subset L_p}\sup_{f\in C^\psi_{\beta,p}}\inf_{g\in F_m}\|f-g\|_{L_p},$$

де зовнішній inf береться по всіх m-вимірних лінійних підпросторах F_m із L_p. Має місце наступне твердження.

Теорема. *Нехай $\psi(n)\in\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$ і $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)}<1$. Тоді існує номер n_q такий, що для довільного номера $n\geqslant n_q$ і довільного $\beta\in\mathbb{R}$ виконуються рівності*

$$d_{2n}(C^\psi_{\beta,\infty},L_\infty)=d_{2n-1}(C^\psi_{\beta,\infty},L_\infty)=d_{2n-1}(C^\psi_{\beta,1},L_1)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\psi((2\nu+1)n)}{2\nu+1}\sin\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|, \qquad (2)$$

де $\theta_n=\theta_n(\psi,\beta)$ — корінь рівняння

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi((2\nu+1)n)\cos\left((2\nu+1)\theta_n\pi-\frac{\beta\pi}{2}\right)=0.$$

У випадку $\psi(n)=q^n$ і $\beta=0$ теорему встановлено в [1]. Для довільних $\beta\in\mathbb{R}$ та $\psi(n)=q^n$ рівності (2) встановлено у роботах [2, 3] для усіх номерів $n\geqslant 9$, що задовольняють нерівності

$$\frac{43}{10(1-q)}q^{\sqrt{n}}+\frac{q}{(1-q)^2}\min\left\{\frac{160}{57(n-\sqrt{n})},\frac{8}{3n-7\sqrt{n}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{2q}{(1+q^2)(1-q)}\right)\left(\frac{1-q}{1+q}\right)^{\frac{4}{1-q^2}}.$$

1. Нгуен Тхи Тхьеу Хоа. Экстремальные задачи на некоторых классах гладких периодических функций. Дис. ... доктора физ.-мат. наук. — М.: МИАН им. Стеклова, 1994.
2. Serdyuk A. S., Bodenchuk V. V. Exact values of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals. Arxiv preprint, arXiv:1212.3364, 2012.
3. Сердюк А. С., Боденчук В. В. Оцінки знизу колмогоровських поперечників класів інтегралів Пуассона. Arxiv preprint, arXiv:1304.0650, 2013.

Оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого дробу спеціального вигляду

Д. І. Боднар, М. М. Бубняк, О. Я. Ковальчук

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна

dmytro_ bodnar@hotmail.com, maria.bubnyak@gmail.com, olhakov@gmail.com

Розглянемо 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де c_j — комплексні числа ($j=\overline{1,N}$); N — фіксоване натуральне число.

Вирази вигляду $F_n=\left(1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}$ ($n\ge 1$; $F_0=1$) та $R_n^{(q)}=1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j_k=1}^{j_{k-1}}\frac{c_{j_k}}{1}$ назвемо відповідно підхідним дробом n-го порядку та n-м залишком q-го порядку дробу (1) ($q=\overline{1,N}$; $n\ge 1$; $j_0=q$; $R_0^{(q)}=1$; $R_n^{(0)}=1$).

Якщо всі $R_n^q\ne 0$, то для підхідних дробів (1) встановлено наступну оцінку при $n>m\ge 0$

$$|F_n-F_m|\le \frac{1}{g_n\cdot g_m}\left[\sum_{k=0}^{m}\frac{C^k}{\prod_{r=1}^{k}g_{n-k}\cdot g_{m-k}}\left|R_{n-k}^{(1)}-R_{m-k}^{(1)}\right|+\frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1}g_{n-k}\cdot g_{m-k}}\right],$$

де $C=\sum_{j=2}^{N}|c_j|$ і $|R_n^{(q)}|\ge g_n>0$ ($n\ge 0$, $q=\overline{2,N}$, $g_{-1}=1$).

Нехай елементи c_j дробу (1) задовольняють умови: $c_1\in G$ і $\sum_{j=2}^{N}|c_j|=C\le\frac{\mu^2}{4}$, де

$$G=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|\arg\left(z+\frac{1}{4}\right)\right|<\pi\right\}$$

та $\mu=\frac{1}{2}\left(|1+\sqrt{1+4c_1}|-|1-\sqrt{1+4c_1}|\right)$.

Тоді справджуються такі оцінки швидкості збіжності

1) якщо $C=\frac{\mu^2}{4}$, то

$$|F-F_m|\le L_1\frac{1}{m+1}\qquad (m>0),$$

2) якщо $C<\frac{\mu^2}{4}$, то

$$|F-F_m|\le L_2\frac{p_1^{m+1}-p_2^{m+1}}{p_1-p_2}\quad (m>0, p_1\ne p_2);$$

$$|F-F_m|\le L_2(m+1)p^{m+1}\quad (m>0, p_1=p_2=p),$$

де $L_1=\frac{4|1+\sqrt{1+4c_1}|(p_1+(1-p_1)^2)}{\mu^2(1-p_1)^3}$, $L_2=\frac{4|1+\sqrt{1+4c_1}|}{\mu(1-p_1)(1-p_2)}$, $p_1=\left|\frac{1-\sqrt{1+4c_1}}{1+\sqrt{1+4c_1}}\right|$, $p_2=\frac{1-\sqrt{1-4C/\mu^2}}{1+\sqrt{1-4C/\mu^2}}$, F — скінченне значення дробу (1).

Абсолютная суммируемость интегралов Фурье

Л. Г. Бойцун, Т. И. Рыбникова

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина

t.rybnikova@gmail.com

Пусть функция $f(u)$ интегрируема на конечном промежутке $[0, A], A > 0$. Пусть дана интегрируемая на каждом конечном промежутке $[0, y], y > 0$ функция $p(t)$ и $P(y) = \int_0^y p(t)dt \neq 0$.

Говорят, что интеграл $\int_0^\infty f(u)du$ абсолютно суммируется методом Вороного, $|W, p(y)|$-суммируем, если $\int_0^\infty |\tau'(y)|dy < \infty$, где

$$\tau(y) = \frac{1}{P(y)} \int_0^y P(y-u)f(u)du.$$

Интеграл Фурье функции $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ есть

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_\infty^\infty f(t) cosu(x-t)dt.$$

Используем обозначение

$$\phi(t) = u_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x).$$

Авторами доказано ряд теорем о достаточных условиях, накладываемых на функцию, порождающую метод Вороного, и на функцию $f(t)$, при которых интеграл Фурье абсолютно суммируется методом Вороного. Одна из таких теорем приводится ниже.

Теорема. *Пусть $\alpha \geq 0$ и постоянное число $K > \pi$. Если функция $\phi(t) \left(ln\frac{K}{t}\right)^\alpha$ является функцией ограниченной вариации на $(0, \infty)$, а функция $p(y)$-положительная невозрастающая и удовлетворяет условию*

$$\int_y^\infty \frac{du}{uP(u)} \leq A \frac{(lny)^\alpha}{P(y)} \text{ для } y > 1,$$

тогда интеграл Фурье функции $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ $|W, p(y)|$-суммируем.

Про інтерполяцію α-фрактальною функцією

Т. А. Брязкало, М. О. Назаренко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

tianan@yandex.ru, oleksij@uos.net.ua

У сучасній математиці важливу роль відіграють фрактали, які дають змогу будувати математичні моделі, що адекватніше відображають навколишній світ. Зокрема, класичні методи інтерполяції дійсних даних можуть бути узагальнені за допомогою застосування фрактальної техніки. Теорію фракталів використовують для визначення сім'ї інтерполяційних відображень, пов'язаних зі сплайнами. При цьому додається степінь вільності, який дозволяє зберігати або змінювати властивості функції, до якої здійснюється наближення.

Нехай $t_0 < t_1 < ... < t_N$ — дійсні числа, $I = [t_0, t_N]$ — відрізок, що включає ці точки. Маємо $g \subset C(I)$, позначимо через $\triangle : t_0 < t_1 < ... < t_N$ — розбиття відрізка $I = [t_0, t_N]$. Нехай $\alpha = (\alpha_1 ..., \alpha_N)$ — вектор системи ітераційних функцій [1]:

$$\begin{cases} L_n(t) = a_n t + b_n, \\ F_n(t, x) = \alpha_n x + q_n(t), \end{cases}$$

де
$$a_n = \frac{t_n - t_{n-1}}{t_N - t_0}$$
і
$$b_n = \frac{t_N t_{n-1} - t_0 t_n}{t_N - t_0},$$
$$q_n(t) = g \circ L_n(t) - \alpha_n b(t),$$
$g(t_i) = x_i$, $i = 0, 1, \ldots N$, і $b(t)$ — дійсна неперервна функція, $b \neq g$, така, що $b(t_0) = x_0$ і $b(t_N) = x_N$.

Нехай $g^{\alpha}_{\triangle b}$ —відповідна фрактальна інтерполяційна функція. Будемо позначати її просто g^{α} Дана функція називається α-фрактальною функцією g відносно Δ та функції b [2].

Теорема. *α-фрактальна функція g^{α} функції g відносно $\triangle$ і b задовольняє нерівність*
$$\|g^{\alpha} - g\|_{\infty} \leqslant \frac{|\alpha|_{\infty}}{1 - |\alpha|_{\infty}} \|g^{\alpha} - b\|_{\infty},$$
$$|\alpha|_{\infty} = \max_{1 \leqslant n \leqslant N} \{|\alpha_n|\}.$$
Зокрема, g^{α} наближається до g, тобто
$$g^{\alpha}(t_n) = g(t_n), n = 0, 1, ...N.$$

Таку процедуру інтерполяції можна також провести в просторі L_p, $1 < p < \infty$.

1. Барнслі М. Ф. Фрактальні функції та інтерполяція. Констр. Апроксимація, 1986, **2**, № 4, С. 303–329.
2. Navascues M. A. and Sebastian M. V. Generalization of Hermite functions by fractal interpolation. J. Approx. Theory, 2004, **131**, № 1, P. 19–29.

Наближення періодичних функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена

В. А. Войтович

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

viktorvojtovich@gmail.com

Нехай $C^{\psi}_{\overline{\beta}} L_s$, $1 \leq s < \infty$, — множина неперервних 2π–періодичних функцій що зображуються згортками
$$C^{\psi}_{\overline{\beta}} L_s = \Big\{ f \in C : f(x) = \frac{a_0}{2} + (\varphi * \mathcal{D}_{\psi,\overline{\beta}})(x), a_0 \in \mathbb{R}, \varphi \in L_s, \varphi \perp 1 \Big\},$$
де $\mathcal{D}_{\psi,\overline{\beta}}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos(kt + \frac{\pi \beta_k}{2})$, $\psi(k) > 0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, а $\psi \in \mathcal{D}_0$ і $\mathcal{D}_0$ — множина послідовностей $\psi(k) > 0$, що задовольняють умову $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0$.

Якщо $f \in C$, то через $\widetilde{S}_{n-1}(f; x)$ позначимо тригонометричний поліном порядку $n - 1$, що інтерполює $f(x)$ в точках $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, а через $\widetilde{V}_{n,p}(f; x)$ — інтерполяційні аналоги сум Валле Пуссена з параметрами n і p, тобто поліноми $\widetilde{V}_{n,p}(f; x) = \frac{1}{p} \sum\limits_{k=n-p}^{n-1} \widetilde{S}_k^{(n-1)}(f; x)$, де $\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x)=\frac{a_0^{(n-1)}}{2}+\sum\limits_{i=1}^{k}(a_i^{(n-1)}\cos kx+b_i^{(n-1)}\sin kx)$, $a_i^{(n-1)}$ і $b_i^{(n-1)}$ — коефіцієнти Фур'є–Лагранжа функції f. У випадку $p=1$ суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ співпадають з поліномами $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$.

Через $E_m(\varphi)_{L_s}$ — позначимо найкраще наближення в просторі L_s функції $\varphi\in L_s$ тригонометричними поліномами t_{m-1} порядку не вищого $m-1$, тобто

$$E_m(\varphi)_{L_s}=\inf_{t_{m-1}}\|\varphi(\cdot)-t_{m-1}(\cdot)\|_{L_s}.$$

Встановлено асимптотично непокращувані нерівності типу Лебега для відхилень $|\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)|=|f(x)-\widetilde{V}_{n,p}(f;x)|$, коли $f\in C^{\psi}_{\bar\beta}L_s$, $1\le s\le\infty$, $\psi\in\mathcal{D}_0$, $\beta_k\in\mathbb{R}$.

Теорема. *Нехай $\psi\in\mathcal{D}_0$, $\beta_k\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$. Тоді для довільних $f\in C^{\psi}_{\bar\beta}L_s$, $1\le s<\infty$, $n,p\in\mathbb{N}$, $2\le p\le n$, справедлива нерівність*

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)|\le\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p}\psi(n-p+1)+O(1)\sum_{k=n-p+2}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\right)E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}. \tag{1}$$

При цьому для будь-якої функції $f\in C^{\psi}_{\bar\beta}L_s$, $1\le s<\infty$, і довільних $n,p\in\mathbb{N}$, $p\le n$, в множині $C^{\psi}_{\bar\beta}L_s$, $1\le s<\infty$, знайдеться функція $F(x)=F(f;n;p;x)$ така, що $E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}=$ $=E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}$ і для неї при $n-p\to\infty$ виконується рівність

$$|\widetilde{\rho}_{n,p}(F;x)|=\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p}\psi(n-p+1)+O(1)\sum_{k=n-p+2}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\right)E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}. \tag{2}$$

В (1) та (2) $s'=\frac{s}{s-1}$, коефіцієнти $\tau_{n,p}(k)$ означаються рівністю

$$\tau_{n,p}(k)=\begin{cases}1-\frac{n-k}{p}, & n-p+1\le k\le n-1,\\ 1, & k\ge n,\end{cases}$$

а $O(1)$ — величини рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.

Интерполяционные сплайны чётной степени по Субботину и по Марсдену

Ю. С. Волков
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
volkov@math.nsc.ru

Классические интерполяционные сплайны нечётной степени возникли как решение задачи о минимизации функционала, их узлы совпадают с точками интерполяции. Для сплайнов же чётной степени оказалось, что множество точек интерполяции и сетку узлов сплайна вообще говоря надо выбирать несовпадающими, иначе задача интерполяции будет не всегда разрешима.

Рассматривая использование сплайнов второй степени в задаче интерполяции, Ю.Н.Субботин [1] предложил узлы параболического сплайна выбирать посередине между заданными точками интерполяции, а М.Марсден [2], наоборот, стал считать сетку узлов сплайна заданной, а точки интерполяции выбирал посередине между узлами сплайна. Сейчас при интерполяции сплайнами чётной степени распространены именно такие два подхода: по Субботину и по Марсдену.

Конечно, в случае равномерных сеток получается одна и та же конструкция, но в общем случае эти два разных сплайна обладают различными аппроксимативными свойствами.

Несмотря на принципиальные отличия интерполянтов, между сплайнами по Субботину и по Марсдену существует тесная связь, и между свойствами этих разных конструкций был переброшен своеобразный мостик [3]. Матрицы систем определяющих уравнений в одном подходе являются транспонированными от соответствующих матриц в другом. На основе связи систем определяющих уравнений установлены достаточные условия формосохранения для интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину и по Марсдену [4].

В докладе изучаются аппроксимативные свойства интерполяционных сплайнов чётной степени по Субботину и по Марсдену. Получены некоторые условия сходимости процессов интерполяции для сплайнов чётной степени и производных, установлена связь между условиями сходимости обоих подходов. Впервые получены какие-либо условия сходимости для сплайнов чётной степени выше второй.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-07-00447) и программы поддержки совместных интеграционных проектов СО РАН и УрО РАН (проект 2012-Б32).

1. Субботин Ю. Н. О кусочно полиномиальной интерполяции. Матем. заметки, 1967, **1**, вып. 1, С. 63–70.
2. Marsden M. Quadratic spline interpolation. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, **80**, № 5, 903–906.
3. Волков Ю. С. Две конструкции интерполяционных сплайнов чётной степени. Препринт № 169. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2006.
4. Волков Ю. С., Шевалдин В. Т. Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену. Тр. ИММ УрО РАН, 2012, **18**, №4, С.145–152.

Безусловные базисы из экспонент и связанные с ними базисы из значений косинусов

М. Г. Волкова

Южноукраинский национальный педагогический университет, Одесса, Украина

volkovamg@mail.ru

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty} (0 \notin \Lambda)$ удовлетворяет условиям:
1) $|\mathrm{Im}\,\lambda_k| \le h, \lambda_k \in \Lambda$,
2) если $\lambda_k \in \Lambda$, то $-\lambda_k \in \Lambda$.

Предположим, что семейство $\{e^{i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda\}$ образует безусловный базис пространства $L_2(-a, a)$. Тогда семейство косинусов $\{\cos \lambda_k t : \lambda_k \in \Lambda, \mathrm{Re}\,\lambda_k > 0\}$ образует безусловный базис пространства $L_2(0, a)$.

Обратное утверждение не имеет места. Рассмотрим целую функцию

$$F_\nu(z) = (z^2 - \sigma)E_{1/2}(-z^2, 1+\nu), \sigma > 0, \quad E_{1/2}(z, \mu) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + 2n)},$$

причем $\frac{1}{2} < \nu < 2$. Обозначим через Λ_ν множество корней F_ν, которые простые и вещественные. Пусть также $\Lambda_\nu^+ := \{\lambda_k \in \Lambda_\nu, \lambda_k > 0\}$. Доказывается, что семейство косинусов $\{\cos \lambda_k t : \lambda_k \in \Lambda_\nu^+\}$ образует безусловный базис $L_2(0, 1)$. Вместе с тем, соответствующее семейство экспонент $\{e^{i\lambda_k t} : \lambda_k \in \Lambda_\nu\}$ является безусловным базисом $L_2(-1, 1)$ лишь при условии $\frac{3}{2} < \nu < 2$.

Про нерівність Лебега на класах $\bar{\psi}$ -диференційовних функцій

М. В. Гаєвський[1]**, П. В. Задерей**[2]

[1]Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кіровоград, Україна

[2]Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна

mgaevskij@gmail.com, zadereypv@ukr.net

Введемо позначення: L — простір 2π-періодичних сумовних за Лебегом функцій f з нормою $\|f\|_L = \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt$, C — підпростір L, що складається з неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f|$; ряд Фур'є функції $f \in L$ має вигляд

$$S[f] := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x), \tag{1}$$

$S_n(f;x)$ — частинна сума ряду Фур'є порядку n; $\rho_n(f;x) = f(x) - S_n(f;x)$; T_n — множина тригонометричних поліномів t_n порядку не вище n; $E_n(f)_C := \inf_{t_n \in T_n} \|f(x) - t_n(x)\|_C$ — найкраще наближення функції f тригонометричними поліномами $t_n \in T_n$.

Нехай $f \in L$ і (1) — її ряд Фур'є, $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, причому для довільного $k \in \mathbb{N}$ $\bar{\psi}^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)}A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)}\widetilde{A}_k(f;x)\right)$, де $\widetilde{A}_k(f;x) = a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ назвемо $\bar{\psi}$-похідною функції f в розумінні О. І. Степанця [1, с. 132] і позначимо її через $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Через $C^{\bar{\psi}}$ будемо позначати множину всіх неперервних функцій f, у яких існують $\bar{\psi}$-похідні і покладемо $C^{\bar{\psi}}C = \{f \in C^{\bar{\psi}} : f^{\bar{\psi}} \in C\}$, $C_\varepsilon = \{f \in C : E_k(f)_C \leq \varepsilon_k, k = 0,1,2,\ldots\}$, $C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon = \{f \in C^{\bar{\psi}} : f^{\bar{\psi}} \in C_\varepsilon\}$, де $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}, k = 0,1,2,\ldots$ — монотонно спадна до нуля послідовність дійсних чисел. Кажуть, що послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови Боаса–Теляковського, якщо

$$\lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0, \sum_{k=0}^{\infty}|\triangle\psi(k)| < \infty, \quad \sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{\triangle\psi(k-l) - \triangle\psi(k+l)}{l}\right| < \infty. \tag{2}$$

Теорема. *Якщо послідовності $\psi_1(k)$ та $\psi_2(k)$ задовольняють умови (2) і $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k} < \infty$, то для будь-якої функції $f \in C^{\bar{\psi}}C$ при $n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність*

$$\|\rho_n(f;x)\|_C \leq \Bigg(\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{\psi}(n+k)}{k} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=2n+3}^{\infty}\frac{|\psi_2(k)|}{k} +$$

$$+O(1)\Bigg(\sum_{k=n+1}^{\infty}(|\triangle\psi_1(k)| + |\triangle\psi_2(k)|) + B_{n+1}(\psi_1) + B_{n+1}(\psi_2)\Bigg)\Bigg)E_n(f^{\bar{\psi}})_C, \tag{3}$$

де для числової послідовності $\gamma = \gamma(k)$, $B_m(\gamma) = \sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{\triangle\gamma(k+m-l) - \triangle\gamma(k+m+l)}{l}\right|$.

Нерівність (3) є точною на класі $C^{\bar{\psi}}C_\varepsilon$.

1. Степанец А. И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. I, 427 с.

Побудова апроксимант Паде за допомогою методу узагальнених моментних зображень для деяких рядів Аппеля та Гумберта

А. П. Голуб, Л. О. Чернецька
Інститут математики НАН, Київ, Україна
apgolub@zeos.net, chernets.liliya@yandex.ua

Узагальнені моментні зображення були запропоновані В.К. Дзядиком [1] у 1981 році і виявилися зручним інструментом для побудови та вивчення апроксимацій Паде та їх узагальнень [2]. Доповідь присвячена поширенню методу узагальнених моментних зображень на випадок двовимірних числових послідовностей.

Даний метод застосовано до побудови та дослідження апроксимант Паде функцій

$$f(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^k w^m}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)},$$

$$f(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+m+\nu+1)\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)}z^k w^m,$$

$$f(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(m+\sigma+1)}{\Gamma(k+m+\nu+\sigma+2)}z^k w^m,$$

що є частинними випадками відповідно:

виродженого гіпергеометричного ряду Гумберта

$$\Phi_2(\alpha,\beta,\gamma,z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_m}{(\gamma)_{k+m}k!m!}z^k w^m$$

при $\alpha = \beta = 1,\ \gamma = \nu+\sigma+2$;

гіпергеометричного ряду Аппеля

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{k+m}(\beta)_k(\beta')_m}{(\gamma)_{k+m}k!m!}z^k w^m$$

при $\alpha = \nu+1,\ \beta = \beta' = 1,\ \gamma = \nu+\sigma+2$,

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\alpha')_m(\beta)_k(\beta')_m}{(\gamma)_{k+m}k!m!}z^k w^m$$

при $\alpha = \nu+1,\ \alpha' = \sigma+1,\ \beta = \beta' = 1,\ \gamma = \nu+\sigma+2$.

1. Дзядик В. К. Про узагальнення проблеми моментів. Доп. АН УРСР., 1981, № 6, С. 8 – 12.
2. Голуб А. П. Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — Київ, 2002, 222 с.

Рівномірні наближення класів згорток періодичних функцій сумами Зигмунда

У. З. Грабова

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

grabova_u@ukr.net

Нехай $C^{\psi}_{\beta,1}$ — клас неперервних 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$ таких, що при всіх $x\in\mathbb{R}$ зображаються згортками

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + (\Psi_\beta * \varphi)(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt,\ a_0\in\mathbb{R},\ \|\varphi\|_{L_1}\le 1,\ \varphi\perp 1,$$

з фіксованими твірними ядрами Ψ_β вигляду

$$\Psi_\beta(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\big(kt-\beta\pi/2\big),\ \psi(k)>0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)<\infty,\ \beta\in\mathbb{R}.$$

Сумами Зигмунда сумовної 2π-періодичної функції f називають тригонометричні поліноми вигляду

$$Z^s_n(f;t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^s\right)(a_k(f)\cos kt+b_k(f)\sin kt), s>0,$$

де $a_k(f)$ і $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Вважаючи, що послідовність $\psi(k)$, що визначає клас $C^{\psi}_{\beta,1}$, є слідом на множині $\mathbb{N}$ деякої неперервної функції $\psi(t)$ неперервного аргументу $t\ge 1$, позначимо через Θ_1 множину монотонно незростаючих функцій $\psi(t)$, для яких існує стала $\alpha>1$ така, що функція $t^\alpha\psi(t)$ майже спадає. Розглядається задача про знаходження порядкових оцінок величин

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,1};Z^s_n\big)_C=\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,1}}\|f(\cdot)-Z^s_n(f;\cdot)\|_C$$

при $n\in\mathbb{N}$, $\psi\in\Theta_1$.

Будемо казати, що додатна функція $g(t)$, задана на $[1,\infty)$, належить до множини A^+, якщо існує $\varepsilon>0$ таке, що $g(t)t^{-\varepsilon}$ зростає на $[1,\infty)$. Якщо ж існує $\varepsilon>0$ таке, що $g(t)t^{\varepsilon}$ спадає на $[1,\infty)$, то будемо казати, що g належить до множини A^-. Через $\mathcal{Z}$ позначимо множину додатних неперервних функцій $g(t)$, визначених на $[1,\infty)$, таких, що при довільному $\delta>0$ функція $g(t)t^{\delta}$ зростає, а $g(t)t^{-\delta}$ спадає, для достатньо великих t.

Теорема. *Нехай $s>0$ і $g_s(t):=\psi(t)t^{s+1}$. Тоді*

1) якщо $\psi\in\Theta_1$, $g_s\in A^+$ і функція $1/\psi(t)$ опукла вгору або вниз, то для довільних $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,1};Z^s_n\big)_C\asymp\psi(n)n;$$

2) якщо $g_s\in\mathcal{Z}$, $\int\limits_1^n\frac{\psi(t)t^{s+1}}{t}dt\ne O(1)$ і $\cos\frac{\beta\pi}{2}\ne 0$, то при $n\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,1};Z^s_n\big)_C\asymp\frac{1}{n^s}\int\limits_1^n\frac{\psi(t)t^{s+1}}{t}dt;$$

3) якщо $g_s\in A^-$, то для довільних $\beta\in\mathbb{R}$ і $n\in\mathbb{N}$

$$\mathcal{E}_n\big(C^{\psi}_{\beta,1};Z^s_n\big)_C\asymp n^{-s}.$$

До питання існування нерухомої точки відображення векторного простору нескінченного виміру

О. Грецький
Національний інститут стратегічних досліджень, Київ, Україна
ag@imath.kiev.ua

Нехай L — довільний нескінченновимірний векторний простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ а $\mathbb{R}_+$ — множина невід'ємних дійсних чисел. *Ядром* $\mathcal{J}(E)$ довільної множини $E \subset L$ назвемо множину таких її точок x, що для кожного $y \in L$ існує таке число $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$, що $x + ty \in E$ для $|t| < \varepsilon$ [1]. *Випуклу оболонку* E позначимо $co(E)$. Нехай $\mathcal{P}_x$ — пучок гіперплощин l_x простору E, що проходять через точку $x \in L$. Кожна гіперплощина l_x розбиває простір на два півпростори: $L = \Pi^+_{l_x} \cup \Pi^-_{l_x}$ та $\Pi^+_{l_x} \cap \Pi^-_{l_x} = l_x$. Множину $K \subset L$ назвемо *конусом* [2], якщо вона відповідає таким умовам:

1) $(\forall y \in K)\ (\forall \alpha \in \mathbb{R}_+)\ [\alpha y \in K]$;
2) $(\forall z \in K)\ [(z \neq 0) \Rightarrow (-z \notin K)]$.

Множину всіх конусів у просторі позначимо $\mathcal{K}$. *Транслятом конуса* $K \in \mathcal{K}$ *у точці* x є множина $K_x \overset{\text{def}}{=} x + K$ Множину всіх K_x у точці x позначимо $\mathcal{K}_x$.

Означення 1. *Конус* $K^+_{l_x} \in \mathcal{K}$ підпирає гіперплощину l_x *у точці* x, *якщо його транслят* $\overset{\rightharpoonup}{K^+_{l_x}}$ *у точці* x *має такі властивості:* $\overset{\rightharpoonup}{K^+_{l_x}} \cap l_x = \{x\}$ *та* $\overset{\rightharpoonup}{K^+_{l_x}} \subset \Pi^+_{l_x}$.

Відповідно визначається і конус $K^-_{l_x} \in \mathcal{K}$. Нехай $T \subset E \subset L$, $x \in E$ та $\mathbb{I}_L$ — тотожне відображення простору L, а через $\mathcal{B}(L)$ позначимо булеан L (множину всіх підмножин L), що не містить порожньої множини.

Означення 2. *Відображення* $f : E \to \mathcal{B}(L)$ *назвемо* конусоформантним на T відносно точки $x \in E$, *якщо для довільної гіперплощини* $l_x \in \mathcal{P}_x$ *існують конуси* $K^+_{l_x}, K^-_{l_x} \in \mathcal{K}$, *які підпирають цю гіперплощину у точці* x *так, що для їхніх транслятів* $\overset{\rightharpoonup}{K^+_{l_x}}, \overset{\rightharpoonup}{K^-_{l_x}} \in \mathcal{K}$ *справджуються включення* $\{y\} \cup f(y) \subset \overset{\rightharpoonup}{K^+_{l_x}}$ *та* $\{z\} \cup f(z) \subset \overset{\rightharpoonup}{K^-_{l_x}}$ *при деяких* $y, z \in T$.

Теорема 1. *Нехай* $T \subset E \subset L$ *та* $x \in E$, *відображення* $f : E \to \mathcal{B}(L)$ *є конусоформантним на* T *відносно точки* x *і* $\mathcal{J}(co(f(T))) \neq \varnothing$. *Якщо* $co(f(T)) \subset f(E)$, *то* $x \in f(E)$.

Теорема 2. *Нехай* $T \subset E \subset L$ *та* $0 \in E$, *відображення* $f - \mathbb{I} : E \to \mathcal{B}(L)$ *є конусоформантним на* T *відносно точки* 0 *і* $\mathcal{J}(co((f-\mathbb{I})(T))) \neq \varnothing$. *Якщо* $co((f-\mathbb{I})(T)) \subset (f-\mathbb{I})(E)$, *то існує така точка* $z \in E$, *що виконується* $z \in f(z)$.

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981.
2. Наймарк М. А. Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.

Умови екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих функцій рівномірної апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень

У. В. Гудима, В. О. Гнатюк

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
Кам'янець–Подільський, Україна
g-ul@yandex.ru

Нехай S — компакт, X — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел топологічний простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір всіх неперервних однозначних відображень g компакта S в X, $K(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору X, $\tilde{C}(S,K(X))$ — множина багатозначних півнеперервних зверху на S відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$, $a(s) = K_s \in K(X)$, $V \subset C(S,X)$, $\{p_s\}_{s\in S}$ — сім'я неперервних на X опуклих функцій таких, що відображення $(s,x) \in S \times X \to p_s(x)$ півнеперервне зверху на $S \times X$.

Задачею найкращої у розумінні сім'ї $\{p_s\}_{s\in S}$ рівномірної апроксимації відображення $a \in \tilde{C}(S,K(X))$ множиною $V \subset C(S,X)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*(a) = \inf_{g\in V} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s(y - g(s)). \tag{1}$$

Якщо існує елемент $g^* \in V$ такий, що $\max\limits_{s\in S} \max\limits_{y\in a(s)} p_s(y - g^*(s)) = \alpha_V^*(a)$, то його назвемо екстремальним елементом для величини (1).

Множину M лінійного простору Y будемо називати Γ_*-множиною відносно точки $y_0 \in M$, якщо для кожної точки $y \in M$ та кожного числа $\varepsilon > 0$ існує число $t_\varepsilon \in (0,\varepsilon)$ таке, що $y_0 + t_\varepsilon(y - y_0) \in M$. Зрозуміло, що до Γ_*-множин відносно точки $y_0 \in M$ відносяться, зокрема, зіркові відносно y_0, в тому числі опуклі множини.

Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для величини (1). Має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай V є Γ_*-множиною відносно $g^* \in V$ (зірковою відносно $g^* \in V$ або опуклою множиною). Для того, щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (1) необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S, y_g \in a(s_g)$ такі, що*

$$\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s(y - g^*(s)) = \max_{y\in a(s_g)} p_{s_g}(y - g^*(s_g)) = p_{s_g}(y_g - g^*(s_g)),$$

$$p'_{s_g}(y_g - g^*(s_g), g^*(s_g) - g(s_g)) \geq 0.$$

Якщо X — віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір, елемент $g^* \in V$ буде екстремальним елементом для величини (1) тоді і тільки тоді, коли для кожного елемента $g \in V$ існують елементи $s_g \in S, y_g \in a(s_g)$, $f_g \in \partial_C p_{s_g}(y_g - g^*(s_g))$ такі, що

$$\max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} p_s(y - g^*(s)) = \max_{y\in a(s_g)} p_{s_g}(y - g^*(s_g)) = p_{s_g}(y_g - g^*(s_g)),$$

$$\mathrm{Re} f_g(g(s_g) - g^*(s_g)) \leq 0,$$

де $\partial_C p_{s_g}(y_g - g^*(s_g)) = \{f \in X^* : \mathrm{Re} f \in \partial p_{s_g}(y_g - g^*(s_g))\}$.

Об оптимальном восстановлении n-линейных функционалов по линейной информации

М. С. Гунько, А. А. Руденко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина

MS-Gunko@rambler.ru, AA-Rudenko@yandex.ru

Будем изучать задачу оптимизации приближённого вычисления n-линейных функционалов в следующей постановке. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в пространстве H, $\hat{x}_k = (x, e_k)$. С помощью последовательностей g^j, $j = 1, \ldots, n$, комплексных чисел $g^j = \{g_k^j\}_{k=1}^{\infty}$ таких, что последовательности $\{|g_k^j|\}_{k=1}^{\infty}$ неубывают, определим классы элементов $W^{g^j} = = \left\{x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^j| \, |(x, e_k)|^n \leq 1\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать n-линейные функционалы, обладающие следующим свойством:

$$\Omega(e_{k_1}, ..., e_{k_n}) = \begin{cases} f_k > 0 & \text{, если } k_1 = ... = k_n = k, \\ 0 & \text{, в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

Пусть также на линейных оболочках $\operatorname{span}(W^{g^j})$ множеств W^{g^j} заданы наборы непрерывных функционалов $T_j = (T_{j,1}, ..., T_{j,m_i})$, $T_{j,l} : \operatorname{span}(W^{g^j}) \to \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n$, $l = 1, ..., m_j$. Для $x_j \in W^{g^j}$ вектор $T_j(x_j) = (T_{j,1}(x_j), ..., T_{j,m_i}(x_j))$ будем называть информацией об элементе x_j. Произвольную числовую функцию F от $m_1 + ... + m_n$ переменных будем называть методом восстановления функционала Ω по информации $T_1(x_1), ..., T_n(x_n)$.

Положим

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g_1}, ..., W^{g_n}) = \inf_{T_1,...,T_n} \inf_{F} \sup_{x_1 \in W^{g^1}, ..., x_n \in W^{g^n}} |\Omega(x_1, ..., x_n) - F(T_1(x_1), ..., T_n(x_n))|.$$

Величина $R_{m_1,...,m_n}(W^{g_1}, ..., W^{g_n})$ — это погрешность оптимального метода восстановления функционала Ω на классах $W^{g_1}, ..., W^{g_n}$ по оптимальной $(m_1, ..., m_n)$-информации.

Один из основных результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть задан n-линейный функционал вида* (1)*, для которого последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно убывает, и числа $m_1, ..., m_n$. Тогда*

$$R_{m_1,...,m_n}(W^{g^1}, ..., W^{g^n}) = \frac{f_{M+1}}{|g_{M+1}^1 \cdot ... \cdot g_{M+1}^n|^{\frac{1}{n}}},$$

где $M = \min\{m_1, ..., m_n\}$. При этом информация об элементах $x_1 \in W^{g^1}, ..., x_n \in W^{g^n}$ вида

$$T_1(x_1) = ((x_1, e_1), ..., (x_1, e_{m_1})), ..., T_n(x_n) = ((x_n, e_1), ..., (x_n, e_{m_n}))$$

и метод

$$\tilde{F}(x_{1,1}, ..., x_{1,m_1}, ..., x_{n,1} ..., x_{n,m_n}) = \sum_{k=1}^{\min\{m_1,...,m_n\}} f_k \; x_{1,k} ... x_{n,k}$$

ее использования будут оптимальными.

Работа выполнена совместно с В. Ф. Бабенко.

Ортопроекційні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних

Н. В. Дерев'янко
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
nadyaderevyanko@gmail.com

У доповіді мова буде йти про точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q. При певному виборі функції Ω дані класи співпадають з відомими класами Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}$. Надалі будемо вважати, що $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тобто Ω задана функція типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови Барі–Стєчкіна (S^{α}) і (S_l) [1].

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір і $L_q(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi, \pi]$, — простір вимірних 2π-періодичних по кожній змінній функцій f для яких

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty \ , \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Ортопроекційний поперечник функціонального класу $F \subset L_q$ означається згідно з формулою [2]:

$$d^{\perp}_m(F, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^m} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{i=1}^{m} (f, u_i) u_i \right\|_q ,$$

де $\{u_i\}_{i=1}^m$ — ортонормована система функцій $u_i \in L_{\infty}(\pi_d)$.

Сформулюємо отримані результати.

Теорема 1. *Нехай* $1 \leq p < q \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і функція* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. *Тоді*

$$d^{\perp}_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d}) m^{1/p-1/q}.$$

Теорема 2. *Нехай* $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $(p, q) \notin \{(1, 1),\ (\infty, \infty)\}$ *і функція* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$. *Тоді*

$$d^{\perp}_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d}).$$

При встановлені оцінок знизу поперечників $d^{\perp}_m(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ отримані також оцінки наближення функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ деякими лінійними операторами, які підпорядковуються певним умовам.

Зауваження. *У випадку* $\Omega(t) = t^r$ *відповідні до теорем* 1 *і* 2 *результати були отримані раніше у роботі* [3].

1. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, **5**, С. 483–522.
2. Темляков В. Н. Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных. Докл. АН СССР, 1982, **267**, № 2, С. 314–317.
3. Романюк А. С., Романюк В. С. Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных. Укр. мат. журн., 2009, **61**, № 10, С. 1348–1366.

О почти периодических функциях Безиковича

И. Ш. Джаббаров
Гянджинский университет, Гянджа, Азербайджан
jabbarovish@rambler.ru

Нашей целью является установление свойств, указанных Бором ([1-3]), для почти периодических функций Безиковича из класса B_2:

$$\|f\|_{B_2}^2 = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Метод работы основан на новой мере построенной в [6-7].

Теорема 1. *Пусть f — некоторая функция из класса B_2. Тогда найдется функция $\bar{f}(x)$ эквивалентная $f(x)$ по норме Безиковича такая, что*

$$\bar{f}(x) = \lim_{k\to\infty} F_k(x)$$

поточечно почти всюду, причем $(F_k(x))$ — последовательность почти периодических функций Бора.

Пусть $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times\cdots$ обозначает бесконечномерный единичный куб. При условиях теоремы 1 существует не более, чем счетная система показателей Фурье (λ_n). Пусть (μ_n) рациональный базис (см. [4], с. 30) для показателей Фурье. Обозначим $L_2(\Omega)$ Лебеговый класс, при этом мера определена как в [6-7].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда, найдется функция $F(\bar{\theta}) \in L_2(\Omega)$ и функция $\bar{f} \sim f$ (по норме Безиковича) такая, что*

$$\bar{f}(x) = F(\mu_1 x, \mu_2 x, ...)$$

почти всюду в R (по Лебегу).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и (a_n) — последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$. Тогда,*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 .$$

1. Бор Г. Почти периодические функции. — М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009.
2. Besicovitch A. S. Almost periodic functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1932.
3. Левитан Б. М. Почти — периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953.
4. Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти — периодические функции и дифференциальные уравнения. Изд. МГУ, 1978.
5. Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М. О приближении функций тригонометрическими суммами. Избранные труды Боголюбова Н. Н. В 3-х томах., т. 1. Киев: Наукова думка, 1969, С. 57–62.
6. Jabbarov I. Sh. On the connection between measure and metric in infinite dimensional space. Inter. Conf. on diff. equat. and Dynam. Systems. Abstracts. Suzdal, 2010, P. 213–214.
7. Jabbarov I. Sh. On a new measure in infinite dimensional unite cube. arXiv:1102.5668.

Приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними для ФПСР

Р. І. Дмитришин
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
dmytryshynr@hotmail.com

Розглядається приєднаний гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) з двома нерівнозначними змінними

$$1 + F_0(z_1) + \frac{k_{01}z_2}{1 + l_{01}z_2 + z_2F_1(z_1)} - \frac{k_{02}z_2^2}{1 + l_{02}z_2 + z_2F_2(z_1)} - \frac{k_{03}z_2^2}{1 + l_{03}z_2 + z_2F_3(z_1)} - \ldots, \qquad (1)$$

де

$$F_p(z_1) = \frac{k_{1p}z_1}{1 + l_{1p}z_1} - \frac{k_{2p}z_1^2}{1 + l_{2p}z_1} - \frac{k_{3p}z_1^2}{1 + l_{3p}z_1} - \ldots, \quad p \geq 0,$$

k_{rs}, l_{rs}, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, — комплексні сталі, $k_{rs} \neq 0$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Доведено існування єдиного формального подвійного степеневого ряду (ФПСР)

$$L(z_1, z_2) = 1 + \sum_{r,s=1}^{\infty} c_{rs} z_1^r z_2^s, \qquad (2)$$

де $c_{rs} \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, відповідного приєднаному ГЛД з двома нерівнозначними змінними (1) і встановлено, що порядок відповідності його n-го підхідного дробу рівний $2n + 1$. Побудовано алгоритм розвинення заданого ФПСР (2) у відповідний приєднаний ГЛД з двома нерівнозначними змінними (1) і встановлено необхідні та достатні умови існування такого алгоритму. Крім того, досліджено зв'язок між приєднаними ГЛД з двома нерівнозначними змінними (1) і двовимірними J-дробами з нерівнозначними змінними

$$\Psi_0(\xi_1) + \frac{k_{01}}{l_{01} + \xi_2 + \Psi_1(\xi_1)} - \frac{k_{02}}{l_{02} + \xi_2 + \Psi_2(\xi_1)} - \frac{k_{03}}{l_{03} + \xi_2 + \Psi_3(\xi_1)} - \ldots, \qquad (3)$$

де

$$\Psi_p(\xi_1) = \frac{k_{1p}}{l_{1p} + \xi_1} - \frac{k_{2p}}{l_{2p} + \xi_1} - \frac{k_{3p}}{l_{3p} + \xi_1} - \ldots, \quad p \geq 0,$$

$k_{rs}, l_{rs}, r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1,$ — комплексні сталі, $k_{rs} \neq 0, r \geq 0, s \geq 0, r+s \geq 1, (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$, і, як результат, доведено відповідність двовимірного J-дробу з нерівнозначними змінними (3) до ФПСР

$$L^*(\xi_1, \xi_2) = \sum_{r,s=1}^{\infty} \frac{c_{rs}}{\xi_1^r \xi_2^s},$$

де $c_{rs} \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$.

Гармонические всплески в многосвязной области с круговыми границами

Г. А. Дубосарский

Институт математики и механики Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия

glebUU@mail.ru

В докладе описываются всплески, которые являются базисом пространств типа Харди гармонических функций в области с круговыми компонентами границы. Основой для построения всплесков является ортогонализация Грама-Шмидта специальной системы гармонических рациональных функций относительно введенного скалярного произведения и всплески статьи [1]. Всплески данной работы являются удобным инструментом для решения классических задач математической физики: задач Дирихле, Шварца и Неймана.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-00004 и Интеграционного проекта, выполняемого учеными УрО РАН совместно с СО РАН (проект 12-С-1-1018).

1. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием. Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций, Тула: Изд-во ТулГУ, 2007, С. 129–149.

Условия единственности элемента наилучшего несимметричного L_1-приближения для вектор-функций с ограничениями на коэффициенты

Ю. С. Загорулько, М. Е. Ткаченко, В. Н. Трактинская

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина

yuliya.zagorulko@gmail.com, mtkachenko2009@ukr.net, victoria-dp@yandex.ru

Пусть Q — метрически выпуклый компакт с метрикой ρ, Σ — σ-поле борелевских подмножеств Q и μ — неотрицательная, конечная, безатомная мера, положительная на любом непустом открытом подмножестве Σ.

Пусть $C(Q)$ — пространство непрерывных функций $f : Q \to \mathbf{R}$, $C(Q, \mathbf{R}^m)$ — пространство вектор-функций $f : Q \to \mathbf{R}^m$ с нормой $||\bar{f}||_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_Q |f^i(x)|_{\alpha_i,\beta_i} d\mu(x)$, где $|f(x)|_{\alpha,\beta} = \alpha f_+(x) + \beta f_-(x)$, $\bar{f} = (f^1, f^2, ..., f^m)$, $f^i \in C(Q)$, $i = 1, 2, ..., m$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1, 2, ..., m$.

Для $\bar{f} \in C(Q, \mathbf{R}^m)$, $H \subset C(Q, \mathbf{R}^m)$ величину

$$E(\bar{f}, H)_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}} = \inf\{\|\bar{f} - \bar{u}\|_{1;\bar{\alpha},\bar{\beta}} : \bar{u} \in H\}$$

будем называть наилучшим $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближением вектор-функции $\bar{f}$ множеством H в метрике L_1, а функцию из H, реализующую точную нижнюю грань в правой части верхнего равенства, — элементом наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения $\bar{f}$ множеством H в метрике L_1.

Пусть U — n-мерное подпространство $C(Q)$ и $u_1, ..., u_n$ — базис U.

Для заданных числовых векторов $\bar{\varepsilon}_i = (\varepsilon_i^1, ..., \bar{\varepsilon}_i^m)$ и $\bar{\delta}_i = (\delta_i^1, .., \delta_i^m)$, удовлетворяющих $-\infty \le \varepsilon_i^j < \delta_i^j \le +\infty$, $i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$, положим

$$M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}) = \{\bar{u} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i u_i : \bar{a}_i = (a_i^1, ..., a_i^m), \varepsilon_i^j \le a_i^j \le \delta_i^j, i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\}.$$

Пусть $N_j = \{i : \varepsilon_i^j = -\infty, \delta_i^j = +\infty\}$, Z_f — множество нулей функции f, $\omega(t) = \max_{i=1,...,n} \omega(u_i, t)$, где $\omega(u_i, t) = \sup\{|u_i(x_1) - u_i(x_2)| : x_1, x_2 \in Q, \rho(x_1, x_2) \le t\}, i = 1, ..., n$, $E(x, M) = \inf\{\rho(x, y) : y \in M\}$.

Тогда положим

$$H' = \{\bar{h} \in C(Q, \mathbf{R}^m) | \exists \bar{g}_h \in M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon}) : \forall x \in Q \quad |h^j(x)| = |g_h^j(x)|, j = 1, ..., m\},$$

$$H'' = \{\bar{h} \in C(Q, \mathbf{R}^m) | \exists \bar{g}_h \in M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon}) : |h^j(x)| = \omega(E(x, Z_{g_h^j})), x \in Q, j = 1, ..., m\}.$$

Теорема. *Для того, чтобы каждая функция $\bar{f} \in C(Q, \boldsymbol{R}^m)$ имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$, достаточно, а если $\forall i \notin N_j$, $-\infty < \varepsilon_i^j < \delta_i^j < +\infty$, $j = 1, ..., m$, то и необходимо, чтобы каждая функция $\bar{h} \in H'$ (или H'') имела единственный элемент наилучшего $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$-приближения в $M(\bar{\varepsilon} - \bar{\delta}, \bar{\delta} - \bar{\varepsilon})$.*

Задача наилучшего приближения с ограничениями на коэффициенты рассматривалась в [1]. Теорема обобщает полученные ранее результаты в [2] на случай несимметричного приближения.

1. Pinkus A., Strauss H. L_1-approximation with Constraints. Transaction of the American Mathematical Society. 1990, **322**, № 1, P.239–261.
2. Ткаченко М. Е. О единственности элемента наилучшего L_1-приближения с ограничением на коэффициенты для векторнозначных функций. Вiсник ДНУ, Серiя:Математика. 2002, **7**, С. 92–102.

Приближение прямоугольными суммами Фурье на классах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций многих переменных

Н. Н. Задерей[1], В. И. Бодрая[2], О. В. Иващук[2]

[1] Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев, Украина

[2] Киевский национальный университет технологий и дизайна, Киев, Украина

Bodrayaviktoriya@mail.ru

Пусть $\overline{m} = \{1, 2, ..., m\}$, $\mu \subset \overline{m}$, $|\mu|$ — число элементов множества μ, $c\mu = \overline{m} \setminus \mu$, $\{\psi_i^{(1)}(k_i), \psi_i^{(2)}(k_i)\}$, $i = \overline{1, m}$, — пары произвольных систем чисел $\psi_i^{(j)}(k_i)$, $j = 1, 2$; $k_i = 0, 1, ...$, $\psi_i^{(1)}(0) = 1$, $\psi_i^{(2)}(0) = 0$, $i = \overline{1, m}$. Предположим, что для данной функции $f \in L(T^m)$ и $\mu \subset \overline{m}$ ряд

$$\sum_{k_i=1, i\in\mu}^{\infty} \frac{1}{\pi^{|\mu|}} \int\limits_{T^{|\mu|}} f(t^\mu + x^{c\mu}) \prod_{i\in\mu} \frac{1}{\overline{\psi}_i^2(k_i)} \Big(\psi_i^{(1)}(k_i) \cos k_i(t_i - x_i) + \psi_i^{(2)}(k_i) \sin k_i(t_i - x_i)\Big) dt^\mu,$$

$$\overline{\psi}_i^2(k_i) := \Big(\psi_i^{(1)}(k_i)\Big)^2 + \Big(\psi_i^{(2)}(k_i)\Big)^2 \ne 0, \quad k_i \in N, \quad i \in \overline{m},$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L(T^m)$ по переменным x_i, $i \in \mu$. Эту функцию обозначим через $f^{\overline{\psi}_\mu}(x)$ и назовем $\overline{\psi}_\mu$ производной функции $f(x)$. Множество непрерывных функций таких, что для $\forall \mu \in \overline{m}$ существуют непрерывные $f^{\overline{\psi}_\mu}(x)$ производные обозначим $C^{\overline{\psi}}C^0$.

Теорема. *Пусть* $\lim_{k\to\infty} \psi_i^{(1)}(k) = \lim_{k\to\infty} \psi_i^{(2)}(k) = 0$, $i \in \overline{m}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Big|\psi_i^{(2)}(k)\Big| < \infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} k\Big(|\Delta^2 \psi_i^{(1)}(k_i - 1)| + |\Delta^2 \psi_i^{(2)}(k_i - 1)|\Big) < \infty,$$

где $\Delta^2\psi_i^{(j)}(k-1)=\psi_i^{(j)}(k-1)-2\psi_i^{(j)}(k)+\psi_i^{(j)}(k+1)$, $j=1,2$, $i\in\overline{m}$.

Тогда для $\forall f\in C^{\overline{\psi}}C^0$, $n\in N^m$ *справедливо неравенство*

$$\Big|\Big|f(x)-S_n(f;x)\Big|\Big|_C\le\sum_{k=1}^{m}\sum_{|\mu|=k}E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})\prod_{i\in\mu}\mathcal{E}_{n_i}(C_\infty^{\overline{\psi}_i})+b_n^{\overline{\psi}}(f),$$

где $S_n(f;x)$ *— прямоугольная частная сумма ряда Фурье функции* $f\in L(T^m)$,

$$\mathcal{E}_{n_i}(C_\infty^{\overline{\psi}_i})=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k_i=1}^{n_i}\frac{1}{k_i}\sqrt{\Big(\psi_i^{(1)}(n_i+k_i)\Big)^2+\Big(\psi_i^{(2)}(n_i+k_i)\Big)^2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k_i=2n_i+1}^{\infty}\frac{1}{k_i}\Big|\psi_i^{(2)}(k_i)\Big|,$$

$$E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})=\inf_{t_{\mu,n}\in\mathcal{T}_{\mu,n}}\Big|\Big|f^{\overline{\psi}_\mu}(x)-t_{\mu,n}(x)\Big|\Big|_C.$$

Локальні властивості одного класу функцій з $C[0,1]$

І. В. Замрій, М. В. Працьовитий

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

irina-zamrij@yandex.ru

Нехай $Q_s=\{q_0,q_1,\dots,q_{s-1}\}$ — впорядкована множина додатних дійсних чисел таких, що $\sum\limits_{k=0}^{s-1}q_k=1$; $\beta_0=0$, $\beta_1=q_0$, $\beta_2=q_0+q_1,\dots$, $\beta_k=\sum\limits_{i=0}^{k-1}q_i$.

Теорема 1. *Для будь-якого* $x\in[0,1]$ *існує послідовність* (α_n), $\alpha_n\in\{0,1,\dots,s-1\}\equiv A$ *така, що*

$$x=\beta_{\alpha_1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{\alpha_j}\right]=\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{1}$$

Означення 1. *Розклад числа* x *у ряд* (1) *називається його* Q_s*-представленням, а скорочений формальний запис*

$$x=\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} \tag{2}$$

— Q_s*-зображенням. При цьому* α_k *називається* k*-тим* Q_s*-символом числа* x.

Означення 2. *Нехай* $Q_3=\{q_0,q_1,q_2\}$ *і* $Q_2=\{g_0,g_1\}$. *Функція, аргумент якої подається* Q_3*-зображенням*

$$x=\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

а значення функції Q_2*-зображенням*

$$f(x)=\Delta^{Q_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},$$

$$\text{де }\beta_1=\begin{cases}0, & \text{якщо } \alpha_1=0,\\ 1, & \text{якщо } \alpha_1\ne0;\end{cases}\qquad \beta_{k+1}=\begin{cases}\beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1}=\alpha_k,\\ 1-\beta_k, & \text{якщо } \alpha_{k+1}\ne\alpha_k;\end{cases}$$

називається трибін-функцією [1].

У доповіді пропонуються еквівалентні означення трибін-функції (за допомогою системи функціональних рівнянь, автоматів зі скінченною пам'яттю, перетворювачів цифр одного зображення дійсного числа в інше тощо), результати дослідження її інтегрально-диференціальних, самоафінних та фрактальних властивостей. Основний акцент зробиться на результати дослідження фрактальних (локальних та глобальних) властивостей графіка і рівнів функції.

Окрема увага приділяється питанню інваріантності раціональності (збереженню та втраті раціональності числа при відображенні f).

Цілком повно розглядаються три модельні випадки:
1) $Q_3 = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ і $Q_2 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$;
2) $Q_3 = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ і $Q_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$;
3)$Q_3 = \{\frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}\}$ і $Q_2 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$.

1. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. К.: Наукова думка, 1992, 208 с.

Зображення дійсних чисел за допомогою нескінченно малих знакододатних узагальнених послідовностей Фібоначчі

Д. М. Карвацький

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

dinaris-mail@mail.ru

Означення. *Послідовність дійсних чисел* (u_n), $n \in N$, *яка має властивість*

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n,$$

називатимемо узагальненою послідовністю Фібоначчі.

Узагальнені послідовності Фібоначчі потенційно можуть бути використані для подання та зображення дійсних чисел, побудови метричної, ймовірнісної та фрактальної теорії. Найбільш придатними для подання дійсних чисел є збіжні знакододатні узагальнені послідовності Фібоначчі.

Розглянемо знакододатній ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

для членів якого виконуються такі умови:

1. $u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n,\ n \in N$, причому $u_1,\ u_2,\ p,\ s \in R^+$;
2. $\begin{cases} 0 < p < 1 \\ 0 < s < 1 - p \end{cases}$;
3. $u_{n+1} \geq (1 - p - 2s)u_n,\ n \in N.$

Нехай $A = \{0\,, 1\}$, $L = A \times A \times A \times A \times \ldots$. Відповідність f між множинами L і R^1

$$L \supset (\alpha_n) \xrightarrow{f} x \in R^1,$$

яка встановлюється рівністю

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n,$$

очевидно є функціональною.

Теорема. *Для будь-якого* $x \in \left[0\,,\, \frac{u_0(1-p)+u_1}{1-p-s}\right]$, *існує послідовність дійсних чисел* (a_n), $a_n \in \{0,1\} \equiv A$ *така, що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n.$$

У доповіді будуть розглядатися властивості циліндричних множин, що відповідають даному зображенню, детально буде показано специфіку їх перекриттів.

1. Василенко Н. М., Працьовитий М. В. Математичні структури в просторі послідовностей Фібоначчі. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2008, 9, С. 129–150.
2. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів. — Київ: Видавництво НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998, 296 с.

Характеризація k-неперервних відображень

О. О. Карлова, О. В. Собчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

maslenizza.ua@gmail.com, ss220367@ukr.net

Д. Чжао в [1] ввів поняття *правого* B_1*-композитора*, тобто такої функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що композиція $g \circ f$ належить до першого класу Бера для довільної функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ першого класу Бера. Крім того, в [1] було введене поняття k-неперервної функції. А саме, для метричного простору $(X, |\cdot|)$ функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається *k-неперервною*, якщо для довільної функції $\varepsilon : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ існує функція $\delta : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, така, що для всіх $x', x'' \in X$

$$|x' - x''| < \min\{\delta(x'), \delta(x'')\} \implies |f(x') - f(x'')| < \min\{\varepsilon(f(x')), \varepsilon(f(x''))\}.$$

У згаданій роботі [1] Д. Чжао встановив, що кожна k-неперервна функція є правим B_1-композитором і зауважив, що йому невідомо, чи вірна обернена імплікація. Ми даємо позитивну відповідь на це питання.

Нагадаємо, що відображення f між топологічними просторами X і Y є *G_δ-вимірним*, якщо прообраз довільної відкритої в Y множини є типу G_δ в X; *кусково неперервним*, якщо існує така послідовність замкнених множин $(F_n)_{n=1}^{\infty}$, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ і звуження $f|_{F_n}$ неперервне для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Нехай X — спадково берівський метризовний простір. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) f — кусково неперервне;

(ii) f — k-неперервне;

(iii) f — G_δ-вимірне;

(iv) f — правий B_1-композитор.

1. Zhao D. Functions whose composition with Baire class one functions are Baire class one. Soochow J. Math., 2007, **33** (4), P. 543–551.

Про узагальнення теореми типу Келлога для інтегральних модулів гладкості похідних вищих порядків

О. В. Карупу

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

karupu@ukr.net

Нехай на кривій $\gamma \subset \mathbb{C}$ задано скінченну функцію $w = f(z)$. На спрямлюваних жорданових кривих П. М. Тамразовим були введені інтегральні модулі гладкості порядку k функції $w = f(z)$ на кривій γ за формулою

$$\omega_k(f(z), \delta)_p = \left\{ \int\limits_{\gamma} [\omega_{k,z}(f(z), \delta)]^p \, d\lambda(z) \right\}^{1/p},$$

$1 \le p < +\infty$, де $\lambda(z)$ — лінійна лебегова міра на кривій γ, а $\omega_{k,z}(f(z), \delta)$ — нецентрований локальний арифметичний модуль гладкості порядку k.

Нехай у комплексній площині задано однозв'язну область G, обмежену спрямлюваною гладкою жордановою кривою Γ. Позначимо через $\tau = \tau(s)$ кут між дотичною до Γ та додатною дійсною віссю, через $s = s(w)$ позначимо довжину дуги на кривій Γ. Нехай $w = \varphi(z)$ — гомеоморфізм замкненого одиничного круга $\overline{D} = \{z : |z| \le 1\}$ на замикання $\overline{G}$ області G, конформний у відкритому крузі $D = \{z : |z| < 1\}$, а функція $z = \psi(w)$ — обернена до функції $w = \varphi(z)$.

Келлог у 1912 році довів, якщо функція $\tau = \tau(s)$ належить класу Гельдера з показником α, $0 < \alpha < 1$, то тому ж класу належить і функція $\varphi'(e^{i\theta})$. Згодом було отримано багато різноманітних узагальнень теореми Келлога.

Наступна теорема узагальнює результати [1]–[3].

Теорема. *Нехай інтегральний модуль гладкості $\omega_k(\tau^{(m)}(s), \delta)_p$ порядку k похідної порядку m $(m < k)$ функції $\tau(s)$ задовольняє умові Гельдера*

$$\omega_k(\tau^{(m)}(s), \delta)_p = O\left(\delta^{\alpha}\right) \; (\delta \to 0),$$

де $0 < \alpha < k$.

Тоді існує неперервна на $\overline{G}$ похідна $\psi^{(m+1)}(w)$ функції $\psi(w)$, що не перетворюється в нуль в жодній точці $w \in \overline{G}$. Крім того, інтегральний модуль гладкості $\omega_k(\psi^{(m+1)}(w(s)), \delta)_{pk}$ того ж порядку k похідної $\psi^{(m+1)}(w)$ функції $\psi(w)$ на кривій Γ задовольняє умові

$$\omega_k(\psi^{(m+1)}(w(s)), \delta)_{pk} = O\left(\delta^{\alpha}\right) \; (\delta \to 0).$$

1. Karupu O. W. On properties of moduli of smoothness of conformal mappings. In: Complex Analysis and Potential Theory, Proceedings of the Confertence Satellite to ICM 2006. – Singapore: World Scientific, 2007, P. 231–238.
2. Карупу О. В. Про деякі скінченно-різницеві властивості конформних гомеоморфізмів однозв'язних областей. Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 2010, **7**, № 2, С. 365–368
3. Karupu O. W. On some properties of integral moduli of smoothness of conformal mappings. Bulletin de la société des sciences et des lettres de Łódź. Recherches sur les déformations , 2012, LXII, № 2, P. 111–116.

Интегральные представления для гипергеометрической функции $F_8^{(4)}$

К. К. Кенжебаев, А. Н. Новицкая

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан

nannanovitskaya@mail.ru

Разнообразие прикладных задач, приводящих к гипергеометрическим функциям, вызвало быстрый рост числа функций, применяемых в приложениях. Например, в монографии [1] определены и изучены области сходимости 205 гипергеометрических функции от трех переменных. В этой монографии также можно найти ссылки на научные работы до 1985 года, посвященных изучению свойств гипергеометрических функций. Поскольку число гипергеометрических функций велико, полное множество их преобразований исчисляется сотнями. Лучшим средством для вывода преобразований являются интегральные представления типа Эйлера рассматриваемых функций. В данном докладе для гипергеометрической функции от четырех переменных $F_8^{(4)}$ [2, с. 122 (2.8)]:

$$F_8^{(4)}\left(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, c_4; x, y, z, t\right) = \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(a_2)_{p+q}(b_1)_{m+p}(b_2)_n(b_3)_q}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p(c_4)_q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}$$

доказываются несколько интегральных представлений типа Эйлера. Нахождения интегральных представлений для более простых гипергеометрических функций рассмотрены в работах [3-10].

1. Srivastava H. M., Karlsson P. W. Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), Wiley, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1985, 427 p.
2. Sharma C., Parihar C.L. Hypergeometric functions of four variables. Indian Acad. Math., 1989, **11**, P. 121–133.
3. Choi J., Hasanov A. and Turaev M. Integral Representations for Srivastava's Hypergeometric Functions. Honam Mathematical J., 2012, **34**, № 4, P. 473–482.
4. Choi J., Hasanov A. and Turaev M. Integral Representations for Srivastava's Hypergeometric Functions. Journal of the Korea Society of Mathematical Education, 2012, **19**, № 2, P. 137–145.
5. Choi J., Hasanov A. and Turaev M. Certain Integral Representations of Euler type for the Exton Function. Commun. Korean Math. Soc., 2012, **27**, № 2, P. 257–264.
6. Choi J., Hasanov A. and Turaev M. Integral Representations for Srivastava's Hypergeometric Function. Honam Mathematical J., 2012, **34**, № 1, P. 113–124.
7. Choi J., Hasanov A. and Srivastava H. M. Relations between Lauricella's triple hypergeometric function and the Srivastava function. Integral Transforms and Special Functions, 2012, **23**, № 1, P. 69–82
8. Choi J., Hasanov A., Srivastava H. M. and TuraevM. Integral representations for Srivastava's triple hypergeometric Functions. Taiwanese Journal of Mathematics, 2011, **15**, № 6, P. 2751–2762.
9. Choi J., Hasanov A. and Turaev M. Several Integral Representations Involving Triple Hypergeometric Functions. Honam Mathematical J., 2011, **33**, № 2, P. 129–142.
10. Choi J., Hasanov A. and Turaev M. Certain Integral Representations of Euler Type for the Exton Function. Honam Mathematical J., 2010, **32**, № 3, P. 389–397.

О наилучшем восстановлении функций некоторых классов

О. В. Коваленко

Днепропетровский национальный университет им. О.Гончара, Днепропетровск, Украина

olegkovalenko90@gmail.com

Пусть задано подмножество $\mathfrak{M}$ множества C непрерывных 2π-периодических функций $x(t)$ и числа $0 \le u_1 < u_2 < \ldots < u_{2n} < 2\pi$, $u := (u_1, \ldots, u_{2n})$.

Произвольную функцию $\Phi\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ мы будем называть методом восстановления значения функции $x \in \mathfrak{M}$ в точке $\tau \in [0, 2\pi)$, а величину

$$e(\mathfrak{M}, u, \Phi, \tau) := \sup_{x\in\mathfrak{M}} |\, x(\tau) - \Phi(x(u_1), \ldots, x(u_{2n}))|$$

— погрешностью восстановления методом Φ.

Задача наилучшего восстановления значения функции $x \in \mathfrak{M}$ в точке τ по ее значениям в точках u формулируется следующим образом.

Задача 1. *Найти наилучшую погрешность восстановления*

$$E(\mathfrak{M}, u, \tau) := \inf_{\Phi} e(\mathfrak{M}, u, \Phi, \tau),$$

а также наилучший метод восстановления $\tilde{\Phi}$, на котором достигается наилучшая погрешность восстановления.

Если нас интересует вся функция $x(t)$, а не только ее значение в фиксированной точке τ, то возникает задача наилучшего восстановления функции $x \in \mathfrak{M}$ по ее значениям в точках u.

Произвольную функцию $\Psi\colon \mathbb{R}^{2n} \to C$ мы будем называть методом восстановления функции $x \in \mathfrak{M}$, а величину

$$e(\mathfrak{M}, u, \Psi, \|\cdot\|) := \sup_{x\in\mathfrak{M}} \|\, x - \Psi(x(u_1), \ldots, x(u_{2n}))\|$$

— погрешностью восстановления методом Ψ ($\|\cdot\|$ — некоторая норма в пространстве C).

Задача 2. *Найти наилучшую погрешность восстановления*

$$E(\mathfrak{M}, u, \|\cdot\|) := \inf_{\Psi} e(\mathfrak{M}, u, \Psi, \|\cdot\|),$$

а также наилучший метод восстановления $\tilde{\Psi}$, на котором достигается наилучшая погрешность восстановления.

Кроме того, интерес представляет нахождение наилучшего расположения информационных узлов.

Обзор результатов касательно задач наилучшего восстановления и дальнейшие ссылки можно найти в монографиях [1–2].

Нами получено решение задач 1 и 2 на следующих классах функций:

$$W^r_{r-1}(M) := \left\{x \in L^r_\infty\colon \|x^{(r)}\|_\infty \le 1, \|x^{(r-1)}\|_\infty \le M\right\},$$

$$W^r_{r-2}(M) := \left\{x \in L^r_\infty\colon \|x^{(r)}\|_\infty \le 1, \|x^{(r-2)}\|_\infty \le M\right\},$$

$$W^r_{r-1,r-2}(M, N) := \left\{x \in L^r_\infty\colon \|x^{(r)}\|_\infty \le 1, \|x^{(r-1)}\|_\infty \le M, \|x^{(r-2)}\|_\infty \le N\right\}.$$

Результаты работы получены совместно с В. Ф. Бабенко.

1. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. — Москва: Издательство Московского Университета, 1976.
2. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. — Москва: Наука, 1987.

О классе функций, представимых в виде интеграла Фурье

Ю. С. Коломойцев

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина

kolomus1@mail.ru

Задача о представлении функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье изучалась многими математиками в виду важности ее в различных вопросах анализа (см., напр., [1]).

В настоящей работе получены новые достаточные условия представления функции в виде интеграла Фурье в $\mathbb{R}^d$ от функции, принадлежащей пространству $L_1 \cap L_p$ при $0 < p < 2$, т.е. достаточные условия принадлежности функции классу

$$A_p(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \,:\, f(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{i(x,y)} dx, \quad g \in L_1 \cap L_p(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Приведем один из основных результатов работы [2] в случае $d = 1$.

Теорема. *Пусть $0 < p < 2$, $f \in C_0(\mathbb{R})$ и при некотором натуральном $r > 1/p - 1/2$ имеет на $\mathbb{R}$ локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$, $f_0(t) = \sup_{|s|\ge|t|} |f(s)|$, и при некоторых $\delta_+^{(\nu)}, \delta_-^{(\nu)}$, $\nu = \overline{1, r}$, удовлетворяющих неравенствам*

$$-1 \le \delta_-^{(1)} < 0 < \delta_+^{(1)} \le 1 \quad \text{и} \quad -1 \le \delta_-^{(r)} < \frac{2}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) - 1 < \delta_+^{(r)} \le 1,$$

имеет место

$$\int_0^\infty \left[f_0^{1-\delta_+^{(\nu)}}(t) F_\nu^{1+\delta_+^{(\nu)}}(t) + f_0^{1-\delta_-^{(\nu)}}(t) F_\nu^{1+\delta_-^{(\nu)}}(t) \right] dt < \infty, \quad \nu = \overline{1, r},$$

где

(a) *если $f^{(\nu)}$ принадлежит L_∞ вне любой окрестности нуля, то $F_\nu(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{|s|\ge|t|>0} |f^{(\nu)}(s)|$,*

(b) *если $f^{(\nu)}$ не ограничена около бесконечности и принадлежит L_∞ вне любой окрестности бесконечности, то $F_\nu(t) = f_\infty(t + 2\nu\pi)$, где $f_{\nu,\infty}(t) = \operatorname{ess\,sup}_{0<|s|\le|t|} |f^{(\nu)}(s)|$.*

Тогда $f \in A_p(\mathbb{R})$.

Подобные достаточные условия в терминах L_p интегрируемости функции и ее частных производных (с различными p) получены в работе [3].

1. Liflyand E., Samko S. and Trigub R. The Wiener Algebra of Absolutely Convergent Fourier Integrals: an overview. Anal. Math. Phys., 2012, **2**, № 1, P. 1–68.
2. Коломойцев Ю.С. О представлении функций в виде интеграла Фурье. Матем. заметки, 2013, **93**, № 4, С. 555–565.
3. Kolomoitsev Yu. and Liflyand E. Absolute convergence of multiple Fourier integrals. Studia Math., 2013, **214**, № 1. P. 17–35.

Колмогоровські поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності

А. Ф. Конограй
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Konogray@i.ua

Досліджуються розглянуті в [1] класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, які визначаються функцією $\Omega(t)$, яка задовольняє умови Барі–Стєчкіна [2] (позначаємо (S) і (S_l)), деякого спеціального вигляду

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = \overline{1,d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Нами розглядаються логарифми за основою 2, крім того $\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\{1, \log \frac{1}{t_j}\}$ та $b_j < r, j = \overline{1,d}$, $0 < r < l$.

Нехай $L_q(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ зі стандартною нормою. Одержано точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в просторі L_q, які визначаються наступним чином:

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) = \inf_{L_M} \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \inf_{u \in L_M} \|f - u\|_q,$$

де L_M — підпростір в L_q розмірності M.

Теорема 1. *Нехай $1 \le p < 2 \le q < \infty,\ 1 \le \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (1) з $r > \frac{1}{p}$, тоді виконується співвідношення*

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\log M\right)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема 2. *Нехай $2 \le p \le q < \infty,\ 1 \le \theta < \infty$, а $\Omega(t)$ задана формулою (1) з $r > \frac{1}{2}$, тоді має місце оцінка*

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r} \left(\log M\right)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}.$$

1. Sun Youngsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1997, **219**, 356–377.
2. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, **5**, 483–522.

Min-проблема моментов в задачах линейного быстродействия

В. И. Коробов[1,2], **Г. М. Скляр**[1,2]

[1]Institute of Mathematics, Szczecin University, Szczecin, Poland

[2]Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, Украина

$\{korobow, sklar\}$*@univ.szczecin.pl,* $\{vkorobov, sklyar\}$*@univer.kharkov.ua*

Аналитическое решение проблемы быстродействия с ограничением вида $|u(t)| \leq L$ потребовало развития классической области математики — *проблемы моментов А. А. Маркова* [1]–[3]. Таким развитием является *проблема моментов Маркова на минимально возможном отрезке — min-проблема моментов*, поставленная В. И. Коробовым и Г. М. Скляром в работе [4]. Min-проблема моментов состоит в следующем: *для заданной последовательности функций* $\{g_k(t)\}_{k=1}^n$, $t \in [0,T]$, *и вектора* $s \in \mathbb{R}^n$ *найти минимально возможный интервал* $[0,\theta_s] \subset [0,T]$ *и функцию* $u(t) = u_s(t)$ *такие, что для* $\theta = \theta_s$ *справедливы соотношения* $s_k = \displaystyle\int_0^\theta g_k(t)u(t)dt$, $k = 1,\ldots,n$, $|u(t)| \leq 1$. Пара $(\theta_s, u_s(t))$ называется решением min-проблемы моментов.

Задача быстродействия для системы $\dot{x} = A(t)x + b(t)u$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega \subset \mathbb{R}$, где $A(t)$ — $(n\times n)$-матрица, $b(t)$ — n-мерный вектор, $\Omega = \{u : |u| \leq 1\}$, сводится к *min-проблеме моментов*. Пусть управление $u = u(t)$ переводит систему из некоторого начального состояния $x(0) = x^0$ в конечное состояние $x(T) = 0$ за минимальное время T. Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, такая, что $\Phi(0) = I$. Тогда по формуле Коши имеем $x(T) = 0 = \Phi(T)x^0 + \Phi(T)\displaystyle\int_0^T \Phi^{-1}(t)b(t)u(t)dt$. Следовательно, функция $u(t)$ удовлетворяет следующим моментным равенствам $x_k^0 = \displaystyle\int_0^T g_k(t)u(t)dt$, $k = 1,\ldots,n$, где $g(t) = (g_1(t),\ldots,g_n(t))^* = -\Phi^{-1}(t)b(t)$, и, при условии $|u(t)| \leq 1$, получаем min-проблему моментов Маркова.

Аналитическое решение задачи быстродействия было получено в работах [4]–[10].

1. Марков А. А. Избранные труды. — М.: Гостехиздат, 1948, 320 с.
2. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. — Харьков: ГНТИ Укр., 1938, 254 с.
3. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973, 551 с.
4. Коробов В. И., Скляр Г. М. Проблема моментов Маркова на минимально возможном отрезке. Докл. АН СССР., 1989, **308**, № 3, С. 525–528.
5. Коробов В. И., Скляр Г. М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов. Мат. сб., 1987, **134 (176)**, № 2 (10), С. 186–206.
6. Коробов В. И., Скляр Г. М. Решение задачи быстродействия для колебательной системы. Докл. АН УССР, сер. А., 1987, № 10, С. 6–9.
7. Коробов В. И., Скляр Г. М. Точное решение одной n-мерной задачи быстродействия. Докл. АН СССР, 1988, **298**, № 6, С. 1304–1308.
8. Коробов В. И., Скляр Г. М. Оптимальное быстродействие и тригонометрическая проблема моментов. Известия АН СССР, сер. Математика, 1989, **53**, № 4, С. 868–885.
9. Коробов В. И., Скляр Г. М. Min-проблема моментов Маркова и быстродействие. Сибирский математический журнал, 1991, **32**, № 1, С. 60–71.
10. Korobov V. I., Sklyar G. M. Markov power min-problem with periodic gaps. Journal of Mathematical Sciences, 1996, **80**, № 1.

О некоторых экстремальных задачах для непериодических сплайнов на действительной оси

В. А. Кофанов
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина
vladimir.kofanov@gmail.com

Решены экстремальные задачи:

$$1)\ \|s^{(k)}\|_{L_q[\alpha,\beta]} \to \sup \qquad , \qquad 2)\ \|s^{(k)}\|_{W_q} \to \sup$$

на пространстве $\sigma_{h,r}$ всех сдвигов сплайнов порядка r минимального дефекта с узлами в точках lh, $l \in \mathbb{Z}$, $h > 0$, таких что $L(s)_p \le M$, в следующих случаях: a) $k = 0$, $q \ge p > 0$, и b) $k = 1, ..., r-1$, $q \ge 1$, где $[\alpha, \beta]$ — произвольный отрезок действительной оси,

$$L(x)_p := \sup\left\{\|x\|_{L_p[a,b]} :\ a, b \in \mathbb{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a,b)\right\},$$

а $\|\cdot\|_{W_q}$ — функционал Вейля, т.е.

$$\|x\|_{W_q} := \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{a\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\Delta}\int_a^{a+\Delta} |x(t)|^q\, dt\right)^{1/q}.$$

Получены некоторые обобщения одного неравенства Лигуна для периодических сплайнов. В частности, в случаях: a) $k = 0$, $q \ge p > 0$, и b) $k = 1, ..., r-1$, $q \ge 1$, доказано точное неравенство

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{W_q} \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{k+1/p} \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right\}^{1/q} \frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}, \quad s \in \sigma_{h,r},$$

где φ_r — идеальный сплайн Эйлера порядка r.

В качестве приложения решена задача (аналогичная проблеме Эрдёша для тригонометрических полиномов) о характеризации сплайна $s \in \sigma_{h,r}$ с фиксированной равномерной нормой, график которого на заданном отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ имеет максимальную длину.

О сферических частичных суммах Фурье

О. И. Кузнецова[1], А. Н. Подкорытов[2]
[1]Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина
[2]Санкт-Петербургский гос. университет, Санкт-Петербург, Россия
kuznets@iamm.ac.donetsk.ua, a.podkorytov@gmail.com

Пусть

$$S_R(f,x) = \sum_{\|k\|\le R} \widehat{f}(k)\, e^{ik\cdot x}, \quad \text{где} \ \ \widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{T}^m} f(u)\, e^{-ik\cdot u} du \quad \text{для} \ \ k \in Z^m,$$

— сферическая частичная сумма ряда Фурье функции f, интегрируемой на m-мерном торе $T^m = [-\pi, \pi)^m$. Рассмотрим два близких варианта сильных средних таких сумм (далее $p \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$):

$$H_{n,p}(f,x) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |S_j(f,x)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{и} \quad \mathscr{H}_{n,p} = \Big(\frac{1}{R}\int_0^R |S_r(f,x)|^p dr\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Их поведение тесно связано с поведением норм

$$H_{n,p} = \sup_{|f|\le 1} H_{n,p}(f,0) \quad \text{и} \quad \mathscr{H}_{R,p} = \sup_{|f|\le 1} \mathscr{H}_{R,p}(f,0).$$

В одномерном случае рассматриваемые средние совпадают и, как показали Харди и Литлвуд [1], при каждом фиксированном p их нормы ограничены. В кратном случае ($m \ge 2$) ситуация иная — при любом $p \ge 1$ нормы $H_{n,p}$ и $\mathscr{H}_{R,p}$ не ограничены [2, 3]. В [2] найден точный порядок роста норм $H_{n,p}$. Нетрудно видеть, что оценивая $\mathscr{H}_{R,p}$, можно считать R целым.

Мы доказываем, что нормы $H_{n,p}$ и $\mathscr{H}_{R,p}$ имеют одинаковый порядок (оценки снизу и сверху различаются на коэффициенты, зависящие лишь от размерности m):

$$\mathscr{H}_{n,p} \asymp H_{n,p} \asymp \begin{cases} n^{\frac{m-1}{2}-\min\{\frac{1}{2},\frac{1}{p}\}} & \text{при } m \ge 3,\ p \ge 1; \\ n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \min^{\frac{1}{p}}\{\ln(n+1), \frac{1}{p-2}\} & \text{при } m = 2,\ p > 2; \\ \sqrt{\ln(n+1)} & \text{при } m = 2,\ p \in [1,2]. \end{cases}$$

Эти оценки стандартным методом доказательства приводят к условиям на непрерывную функцию f, обеспечивающим равномерную H_p и $\mathscr{H}_p$-суммируемость ее ряда Фурье.

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. Sur la serie de Fourier d'une function á carré summable. C.R. Acad. Sci. Paris, 1913, **156**, 1303–1309.
2. Кузнецова О. И., Подкорытов А. Н. О сильных средних сферических сумм Фурье. Алгебра и Анализ, 2013, **25**, 121–130.
3. Кузнецова О. И. Сильные сферические средние кратных рядов Фурье. Известия НАН Армении, 2009, **25**, 27–40.

Приближение функций на сфере линейными методами

Р. А. Ласурия
Абхазский государственный университет, Сухум, Абхазия
rlasuria67@yandex.ru

Пусть S^{m-1} — единичная сфере в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \ge 3$, функция $\psi(k) \ne 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ такова, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\, z_k(x), \quad x \in S^{m-1},$$

является рядом Фурье некоторой зональной функции $g_\psi(x) \in L(S^{m-1})$ по системе зональных сферических гармоник $\{z_k(x)\}$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через $C_p^\psi(S^{m-1})$, $1 \le p \le \infty$, множество всех функций $f(x)$ таких, что

$$f(x) = C_0 + [f * z_k](x) = C_0 + \int\limits_{S^{m-1}} h(x') g_\psi\left(\sigma^{-1}x'\right) dx',$$

$$h(x) \in B_p^0\left(S^{m-1}\right) = \left\{ h(x) \in L_p\left(S^{m-1}\right) : \|h\|_{L_{p(S^{m-1})}} \le 1,\ h \perp 1 \right\},$$

с ядром $g_\psi(x) \in L_{p'}(S^{m-1})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Пусть, далее, матрица $\alpha = \left\|\alpha_k^{(n)}\right\|$, $k = 0, 1, ...; n = 0, 1, ...$ такова, что

$$\alpha_0^{(n)} = 1,\ n = 0, 1, ...;\ \alpha_k^{(n)} = 0,\ k \geq n;\ \lim_{n\to\infty} \alpha_k^{(n)} = 1;$$

$$U_n^{(\lambda)}(f; x; \alpha) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} [f * z_k](x).$$

В работе рассматривается задача нахождения точных значений величин

$$\mathcal{E}_n\Big(C_2^{\psi}\left(S^{m-1}\right); \alpha\Big)_C = \sup_{f \in C_2^{\psi}(S^{m-1})} \left\|f(x) - U_{n-1}^{(\lambda)}(f; x; \alpha)\right\|_{C(S^{m-1})}.$$

Теорема. *Пусть функция $\psi(k) \neq 0$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) a_k < \infty$, $a_k = \|z_k(k)\|^2_{L_2(S^{m-1})}$, $\alpha = \left\|\alpha_k^{(n)}\right\|$ — матрица, удовлетворяющая приведенным выше условиям. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}_n\Big(C_2^{\psi}\left(S^{m-1}\right); \alpha\Big)_C = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \alpha_k^{(n)}\right)^2 \psi^2(k) a_k + \sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k) a_k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогичные задачи в периодическом случае функций одной переменной изучались в работах В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов, А. С. Сердюка, И. В. Соколенко.

1. Бабенко В. Ф., Пичугов С. А. О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций. Мат. заметки, 1980, **27**, № 5, С. 683–689.
2. Сердюк А. С., Соколенко И. В. Рівномірні наближення класів $(\psi, \bar{\beta})$-диференційовних функцій лінійними методами. Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2011, **8**, № 1, С. 181–189.

Интегральные операторы с ядром Бергмана

З. М. Лысенко

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина

ivanpribegin@rambler.ru

Пусть $S = \{w \in \mathbb{C} : |Rew| < \frac{\pi}{4}\}$ — полоса в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, B_s — ортогональный проектор (проектор Бергмана) пространства $L_2(S)$ на его замкнутое подпространство — пространство Бергмана $A^2(S)$, состоящее из всех функций, аналитических в области S.

Теорема 1. *Проектор Бергмана $B_s : L_2(S) \to A^2(S)$ является двумерным интегральным оператором вида:*

$$(B_s\varphi)(v) = \frac{1}{\pi} \int\limits_s \frac{\varphi(w)}{\cos^2(v + \overline{w})} d\nu(w).$$

Пусть $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ — преобразование Фурье, определяемое формулой

$$(F\varphi)(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iu\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

Теорема 2. *Ортогональный проектор* $B_1 = U_1 B_s U_1^{-1} : L_2(S) \to A_1^2 = U_1(A^2(S))$, *где* $U_1 = I \bigotimes F : L_2(S) \to L_2(S)$, *представим в виде*:

$$(B_1\varphi)(u_1 v) = \frac{ve^{uv}}{sh\frac{\pi}{2}v} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \varphi(\xi, v)e^{\xi v} d\xi.$$

Обозначим $\widetilde{S} = \{(x, y)|\ y \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{4}C_y < x < \frac{\pi}{4}C_y\}$, где $C_y = y/sh(\frac{\pi}{2}y)$, если $y \neq 0$ и $C_y = 2/\pi$, если $y = 0$. Введём унитарный оператор: $U_2 : L_2(S) \to L_2(\widetilde{S})$ следующим образом:

$$U_2 : \varphi(u, v) \to \frac{1}{\sqrt{C_y}} \varphi\left(\frac{x}{C_y}, y\right).$$

Теорема 3. *Унитарный оператор* $U = U_2 U_1 : L_2(S) \to L_2(\widetilde{S})$ *устанавливает изометрический изоморфизм пространств* $L_2(S)$ *и* $L_2(\widetilde{S})$, *при котором:*

1) *пространство Бергмана* $A^2(S)$ *отображается на* $L_{0,y} \bigotimes\limits_{y\in\mathbb{R}} L_2(\mathbb{R})$, *где* $L_{0,y}$ *— одномерное подпространство пространства* $L_2\left(-\frac{\pi}{4}C_y; \frac{\pi}{4}C_y\right)$, *порождённое* $e^{xsh(\frac{\pi}{2}y)}$;

2) *проектор Бергмана* B_s *унитарно эквивалентен оператору*

$$UB_sU^{-1} = P_{0,y} \bigotimes_{y\in\mathbb{R}} I,$$

где $P_{0,y}$ *— одномерный проектор* $L_2\left(-\frac{\pi}{4}C_y; \frac{\pi}{4}C_y\right)$ *на* $L_{0,y}$.

Ранее аналогичнные результаты были полученны в [1] для единичного круга и верхней полуплоскости.

1. Nikolai L. Vasilevski. Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space. Series Operator Theory: Advances and Applications, 2008, XXIX, **185**, P. 417.

Обобщение теоремы Фекете о емкости ограниченного замкнутого множества

А. Н. Марковский

Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

mark@kubsu.ru

Пусть задано конечное число различных точек z_j комплексной плоскости и множество положительных кратностей $a_j \in \mathbb{R}_+$, $(j = 1, 2, ..., n)$, соответствующих этим точкам.

Обозначим

$$\alpha := \sum_{j=1}^{n} a_j,$$

и рассмотрим комплекснозначную функцию

$$\pi_n^\alpha(z) := \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)^{a_j},\ z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

В частном случае, когда кратности a_j натуральные числа, ф ункция $\pi_n^\alpha(z)$ — полином натуральной степени α. По аналогии с теорией полиномов, множество

$$L(\pi_n^\alpha, B) := \{z : |\pi_n^\alpha(z)| = B\} \tag{2}$$

будем называть лемнискатой. Обозначим $\Theta = \left\{(\pi_n^\alpha(z))' = 0\right\}$ — множество критических точек π_n^α и $B_2 = \max_{z\in\Theta}\pi_n^\alpha(z)$. При $B > B_2$ лемниската $L(\pi_n^\alpha, B)$ ограничивает односвязную область, содержащую все точки z_j.

Из интегрального представления линейной комбинации фундаментальных решений уравнения Лапласа [1] вытекает следующее утверждение.

Лемма. *Если π_n^α, $L(\pi_n^\alpha, B)$ определены равенствами (1), (2) и $B > B_2$, то справедливо*

$$cap(L(\pi_n^1, B)) = B.$$

Геометрически последнее равенство означает, что для области, ограниченной лемнискатой $L(\pi_n^1, B)$, нули функции π_n^1 соответствуют равновесному распределению точечных зарядов z_j с интенсивностями a_j [2].

Теорема. *Дано ограниченное замкнутое множество E, и функция $\pi_n^\alpha(z)$ определена равенством (1). Если E^* есть множество всех точек z таких, что $\pi_n^\alpha(z) = w \in E$, то*

$$cap(E^*) = [cap(E)]^{\frac{1}{\alpha}}\,.$$

Замечание. В случае натуральных кратностей a_j нулей z_j функции $\pi_n^\alpha(z)$ теорема в точности составляет содержание известного утверждения Фекете о емкости ограниченного замкнутого множества [3] ([4], с. 290).

Можно показать, что при дополнительных условиях на нули z_j теорема остаётся верной и в случае, когда (1) является бесконечным произведением $\pi_\infty^\alpha(z)$ при $\alpha < \infty$.

1. Марковский А. Н. Интегральное представление линейной комбинации фундаментальных решений уравнения Лапласа. Экологический вестник ЧЭС., 2011, №4, С. 49–54.
2. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966.
3. Fekete M. Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmenge II. Math. Z., 1930, **32**, №2 , С. 215–221.
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966.

Про наближення нарізно неперервних функцій

В. К. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

vmaslyuchenko@ukr.net

Дослідження питань наближення нарізно неперервних функцій розпочалось у піонерській праці А. Лебеґа [1], який з допомогою апроксимації неперервних функцій ламаними довів, що кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ належить до першого класу Бера. Цей результат Лебеґа був значно розвинутий у працях Г. Гана, В. Морана, Б. Джонсона, Ж. Сан-Ремо, В. Рудіна, Ґ. Вери, В. Маслюченка, В. Михайлюка, О. Собчука, Т. Банаха, О.Маслюченка, О.Карлової та інших. Дослідження в цьому напрямку продовжуються і зараз (див., наприклад, [2]). Хоча отримано багато результатів, але тут залишаються ще не розв'язані проблеми, одна з яких виникла у зв'язку з відомим результатом Рудіна [3].

Проблема 1. *Чи існують метричний простір X, топологічний простір Y, топологічний векторний простір Z і нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$, яке не належить до першого класу Бера?*

Перша частина доповіді буде присвячена обговоренню цієї проблеми.

М. Цуджі [4] вперше помітив, що коли застосувати конструкцію Лебеґа до нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, то виходять сукупно неперервні функції $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, у яких всі вертикальні x-розрізи f_n^x збігаються до f^x рівномірно на $[0,1]$. Звідси він вивів слабку версію добре відомої теореми Бера про проекцію. Це спостереження Цуджі останнім часом дістало значний розвиток у працях [5-8] де використовувалися многочлени Бернштейна, Фейєра і Джексона і розглядалися загальні питання пошарової рівномірної апроксимації. Минулого року на перший план висунулася

Проблема 2. *Чи для кожної нарізно неперервної функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ існує така послідовність многочленів $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що для довільних x і y з $[0,1]$ вертикальні x-розрізи f_n^x рівномірно прямують до f^x на $[0,1]$ і горизонтальні y-розрізи $(f_n)_y$ рівномірно прямують до f_y на $[0,1]$?*

Друга частина доповіді буде присвячена обговоренню результатів, що виникли у зв'язку з проблемою 2, перші з яких анонсовані в [9,10].

1. Lebesgue H. Sur l'approximation des fonctions. Bull. Sci. Math., 1898, **22**, P. 278–287.
2. Karlova O., Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V. Equiconnected spaces and Baire classification of separately continuous functions and their analogs. Cent. Eur. J. Math., 2012, **10**, № 3, C. 1042–1053.
3. Rudin W. Lebesgue first theorem. Math. Analysis and Aplications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 78. Academic Press, 1981, P. 741–747.
4. Tsuji M. On Bair's Theorem concerning a function $f(x, y)$ which is continuous with respect to each variable x and y. J. Math. Soc. Japan, 1951, **2**, № 3–4, P. 210–212.
5. Власюк Г.А., Маслюченко В.К. Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції. Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика. Чернівці: Рута, 2007, С. 52–59.
6. Волошин Г. А., Маслюченко В. К. Про наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної. Карп. матем.публ., 2010, **2**, № 1, С. 4–14.
7. Волошин Г. А., Маслюченко В. К., Маслюченко О. В. Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій. Карп. матем.публ., 2010, **2**, № 2, С. 11–21.
8. Волошин Г. А., Маслюченко В. К., Нестеренко О. Н. Про апроксимацію відображень зі значеннями у просторі неперервних функцій. Карп. матем.публ., 2012, **4**, № 1, С. 23–27.
9. Masluychenko V., Voloshyn H. Closure of the set of polynomials in the space of separately continuous functions. Int. conf. ded. to the 120th ann. of Stefan Banach, Lviv, 2012, P. 97.
10. Волошин Г. А., Маслюченко В. К. Про секвенціальне замикання поліномів у просторі нарізно неперервних функцій. Всеукр. наук. конф. "АТАС", Микуличин, 2012, С. 3–5.

Об одной оценке равноизмеримых перестановок функций из обобщённых пространств Лоренца

Л. В. Матвиюк

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса, Украина

lmatviuk@yandex.ru

Пусть функция $\psi(x)$ не убывает и неотрицательна на $(0,1)$, а функция $M(x)$ возрастает и неотрицательна на $[0,+\infty)$, кроме того

$$M(+0) = 0, \lim_{x\to+\infty} M(x) = +\infty.$$

Далее будем считать, что функции $M(x)$, $\psi(x)$ и число $\gamma \in [0,+\infty)$ таковы, что

$$\int\limits_0^1 M(\psi(x))\frac{dx}{x^\gamma} < +\infty.$$

Через $M_{\psi,\gamma}$ обозначим класс измеримых на единичном кубе $I_N = [0,1]^N$, $N \in \mathbb{N}$, 1-периодических по каждой переменной функций $f \in L(I_N)$ для которых

$$||f||^*_{M_{\psi,\gamma}} = \int\limits_0^1 M\left(\frac{\psi(x)}{x}\int\limits_0^x f^*(t)dt\right)\frac{dx}{x^\gamma} < +\infty.$$

Здесь $f^*(t)$ — невозрастающая на $[0,1]$ функция, равноизмеримая с функцией $|f(t)|$ на единичном кубе I_N. Заметим, что $||f||^*_{M_{\psi,\gamma}}$, вообще говоря, нормой не является.

Пусть $f \in M_{\psi,\gamma}$. Модулем непрерывности функции f назовем

$$\omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f,\delta) = \sup_{\substack{0\le|h_i|\le\delta,\\(i=1,\dots,N)}} ||\Delta_{\overline{h}} f||^*_{M_{\psi,\gamma}},$$

где $\Delta_{\overline{h}} f(\overline{x}) = f(\overline{x}+\overline{h}) - f(\overline{x}), \delta \in (0,1)$.

Будем говорить, что функция $M(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если существует постоянная $C_M \geq 0$ такая, что для всех $x \in (0,+\infty)$ выполняется неравенство $M(2x) \leq C_M M(x)$.

Будем говорить, что функция $M(x)$ удовлетворяет $\triangle'$-условию, если существует постоянная $C_M > 0$ такая, что для всех $x, y \in (0,+\infty)$ выполняется неравенство $M(x,y) \leq$ $\leq C_M M(x) M(y)$.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Если функция $M(x)$ удовлетворяет $\triangle'$-условию, то для любой функции $f \in M_{\psi,\gamma}$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\sum_{n=1}^{s} M(\psi(2^{-nN})2^n[f^*(2^{-nN}) - f^*(2^{-(n-1)N})])2^{nN(\gamma-1)} \leq C_{M,N,\psi} M(2^s)\omega^*_{M(\psi,\gamma)}(f,2^{-s}).$$

Эта оценка при приближении скорости убывания модуля непрерывности к предельной существенно дополняет полученную ранее оценку [1]

$$\sum_{n=s}^{\infty} M\left(\psi(2^{-nN})\left(f^*(2^{-nN}) - f^*(2^{-(s-1)N})\right)\right)2^{nN(\gamma-1)} \leq C_{M,N,\gamma}\omega^*_{M_{\psi,\gamma}}(f,2^{-s}),$$

которая была доказана в предположении, что функция $M(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию.

1. Матвиюк Л. В. Об одной оценке равноизмеримых перестановок функций из обобщенных M-пространств Лоренца. Вісник Одеського національного університету, 2011, **16**, вып. 16, С. 95–102.

Оцінка змішаної похідної голоморфної функції в полікрузі

І. Ю. Меремеля[1], М. В. Савчук[2]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

[2]Інститут підготовки кадрів державної служби зайнятості України, Київ, Україна

iramеremelya@gmail.com, savchuk_m@ukr.net

Нехай d — натуральне число, $\mathbb{C}^d$ — множина всіх впорядкованих наборів $\mathbf{z} := (z_1,\dots,z_d)$ з d комплексних чисел, $\mathbb{D}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : \max_{1\le j\le m}|z_j| < 1\}$ — одиничний полікруг і $\mathbb{T}^d := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^d : |z_j| = 1,\ j = \overline{1,d}\}$ — кістяк полікруга $\mathbb{D}^d$. Нормовану міру Лебега на

$\mathbb{T}^d$, тобто добуток нормованих мір Лебега одиничних кіл, з яких складається $\mathbb{T}^d$ будемо позначати через σ.

Простір Гарді $H_1 := H_1(\mathbb{D}^d)$ складається з усіх голоморфних функцій $f : \mathbb{D}^d \to \mathbb{C}$, для яких

$$\|f\|_1 := \sup_{0<\varrho<1} \int_{\mathbb{T}^d} |f_\varrho| d\sigma < \infty,$$

де $f_\varrho(\mathbf{w}) := f(\varrho \mathbf{w})$, $\varrho \mathbf{w} := (\varrho w_1, \ldots, \varrho w_d)$.

Оцінки похідних голоморфних функцій утворюють окрему групу екстремальних задач сучасної геометричної теорії функцій однієї змінної. Останнім часом спостерігається значний інтерес до аналогічних досліджень у випадку голоморфних функцій багатьох змінних, які переважно стосуються оцінок типу Шварца–Піка.

У даній доповіді ми наведемо точну оцінку змішаної похідної голоморфної функції з простору Гарді H_1 в полікрузі.

Позначимо через $\mathbf{D}(f) := \partial^d f / (\partial z_1 \cdots \partial z_d)$ змішану похідну функції f.

Теорема. *Нехай функція $f \in H_1(\mathbb{D}^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Тоді для будь–яких $\mathbf{z} \in \mathbb{D}^d$*

$$|\mathbf{D}(f)(\mathbf{z})| \le \|f\|_1 \prod_{j=1}^{d} \frac{|z_j| + \sqrt{1 + |z_j|^2}}{(1 - |z_j|^2)^2}. \tag{1}$$

Рівність в (1) *досягаєтъся для функції*

$$f(\mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{d} \frac{(1 - \overline{y}_j w_j)^2}{(1 - \overline{z}_j w_j)^4},$$

де $y_j := z_j - e^{i \arg z_j}(1 - |z_j|^2)/\sqrt{1 + |z_j|^2}$.

Даний результат є поширенням відомої теореми А. Макінтайра та В. Рогозинського [1] на багатовимірний випадок.

1. Macintyre A. J., Rogosinski W. W. Some elementary inequalities in function theory. Edinburgh Math. Notes, 1945, **35**, P. 1—3.

Наближення функцій багатьох змінних з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями експоненціального типу

В. В. Миронюк
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
vetalmyronjuk@ukr.net

У доповіді буде йти мова про наближення функцій багатьох змінних із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ (див., наприклад, [1]) у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$. Зазначимо, що у випадку $\Omega(t) = t^r$, $r > 0$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ співпадають з відомими класами Нікольського–Бєсова $B^{r}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ [2]. В якості апарату наближення використовуються цілі функції експоненціального типу. При цьому суттєве значення відіграє встановлена автором декомпозиційна теорема, яка дає можливість представити норму функцій із просторів $B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ в еквівалентному вигляді.

Нехай $\Phi_{\alpha,l}$ — множина функцій типу модуля неперервності порядку l, які задовольняють умови Барі–Стєчкіна (S^{α}) та (S_l) [3]; $A_{2^n} = \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) : |\lambda_j| < 2^n, \ \ j = \overline{1,d}\}$,

$n \in \mathbb{Z}_+$; $G_q(A_{2^n})$ — множина цілих функцій експоненціального типу, які належать $L_q(\mathbb{R}^d)$ і носій перетворення Фур'є яких міститься в A_{2^n}. Для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, покладемо

$$S_{2^n}[f] = \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{t}) \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin 2^n (x_j - t_j)}{x_j - t_j} d\boldsymbol{t}$$

і означимо такі апроксимативні характеристики:

$$\mathcal{E}_n(B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d))_q = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \|f - S_{2^n}[f]\|_q; \tag{1}$$

$$E_n(B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d))_q = \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)} \inf_{g \in G_q(A_{2^n})} \|f - g\|_q. \tag{2}$$

Теорема. *Нехай $1 < p \leqslant q < \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, $l \in \mathbb{N}$. Тоді при $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ справедливі порядкові оцінки*

$$\mathcal{E}_n(B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d))_q \asymp E_n(B^{\Omega}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d))_q \asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}.$$

Зауважимо, що при $\Omega(t) = t^r$ і відповідних умовах на параметри p, q та r точні за порядком оцінки величин (1) і (2) одержано у роботі [4].

1. Liu Yongping, Xu Cuiqiao. The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes. J. Complexity, 2002, **18**, P. 815–832.
2. Бесов О. В. О некотором семействе функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1961, **60**, С. 42–81.
3. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. мат. о-ва., 1956, **5**, С. 483–522.
4. Янченко С. Я. Наближення функцій з класів Бєсова цілими функціями у просторі $L_q(\mathbb{R}^d)$. Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2010, **7**, № 1, С. 380–391.

Конаміокові підпростори добутків лінійно впорядкованих просторів

В. В. Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

vmykhaylyuk@ukr.net

Вивчення величини множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних функцій беруть свій початок з класичної праці Р. Бера [1], який розглядав функції двох дійсних змінних. Новим поштовхом до інтенсифікації даних досліджень став результат І. Наміоки [4], який привів, зокрема, до виникнення наступних понять.

Нехай X, Y — топологічні простори. Кажуть, що нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *має властивість Наміоки*, якщо існує щільна в X G_δ-множина $A \subseteq X$ така, що f неперервна за сукупністю змінних в кожній точці множини $A \times Y$.

Компактний простір Y називається *конаміоковим*, якщо для довільного берівського простору X кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ має властивість Наміоки.

Властивості конаміокових просторів досліджувались в [2,3], де встановлено, що клас компактних конаміокових просторів замкнений відносно добутку і містить компакти Валдівіа. Крім того, в [5] було показано, що довільний лінійно впорядкований компакт є конаміоковим простором. Тому природно виникає питання: чи обов'язково компактний підпростір Y добутку $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ скінченної кількості лінійно впорядкованих компактів Y_k є конаміоковим?

Теорема. *Нехай $Y_1, \ldots, Y_n$ — лінійно впорядковані простори, $Y \subseteq Y_1 \times \cdots \times Y_n$ — такий компактний простір, що для довільного (можливо виродженого) паралелепіпеда $W = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq Y_1 \times \cdots \times Y_n$ множина $Y \cap W$ зв'язна. Тоді Y конаміоковий.*

1. Baire R. Sur les fonctions de variables reélles. Ann. Mat. Pura Appl., 1899, **3**, P. 1–123.
2. Bouziad A. Notes sur la propriete de Namioka. Trans. Amer. Math. Soc., 1994, **344**, № 2, P. 873 –883.
3. Bouziad A. The class of co-Namioka spaces is stable under product. Proc. Amer. Math. Soc., 1996, **124**, № 3, P. 983–986.
4. Namioka I. Separate continuity and joint continuity. Pacif. J. Math., 1974, **51**, № 2, P. 515–531.
5. Михайлюк В. В. Лінійно впорядковані компакти і конаміокові простори. Укр. мат. журн., 2007, **59**, № 7, С. 1001–1004.

О сходимости в среднем рядов Фурье- Якоби

О. В. Моторная[1], В. П. Моторный[2]

[1]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

[2]Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина

omotorna@ukr.net, motornyivp@yandex.ru

Пусть $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $(\alpha > -1, \beta > -1)$. Через $L_{p,A,B}$ обозначим пространство измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f, для которых $fw^{1/p} \in L^p$, где весовая функция $w(x) = (1-x)^A(1+x)^B$, $A, B > -1$. Норма $\|f\|_{p,A,B} = \|fw^{1/p}\|_p$.

Через $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ будем обозначать частную сумму порядка n ряда Фурье–Якоби функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$. Частные суммы $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ можно рассматривать как оператор, действующий в некотором подпространстве X пространства $L_{1,\alpha,\beta}$. Положим $\sigma(n,\theta,\delta) = (\sqrt{1-x}+1/n)^\theta \times (\sqrt{1+x}+1/n)^\delta$, где $\theta \geq 0, \delta \geq 0$.

Числа

$$D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} := \sup_{\|f/\sigma(n,\theta,\delta)\|_{p,A,B} \leq 1} \|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{p,A,B}$$

называются обобщенными константами Лебега сумм Фурье–Якоби. Для $p > 1$ эти константы оценены в [1, 2] и использованы для оценки $\|S_n^{\alpha,\beta}(f) - f\|_{p,A,B}$. В настоящей работе мы получим оценки уклонений частных сумм ряда Фурье–Якоби в пространстве $L_{1,A,B}$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \geq A, \beta \geq B$. Если $\theta \geq -\alpha + 2A + 1/2 \geq 0$ и $\delta \geq -\beta + 2B + 1/2$, то*

$$D_{n,1,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} \leq C_{\theta,\delta} \ln n.$$

Пусть $H_1^{r+\gamma}$ — класс функций, заданных на отрезке, r-я производная которых интегрируема и удовлетворяет условию:

$$\int_{-1}^{1-h} |f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)| dx \leq Lh^\gamma, \ \ h > 0, \ \ 0 < \gamma \leq 1.$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha = \beta, A = B, \theta = \delta \geq -\alpha + 2A + 1/2 \geq 0$ *и* $f \in H_1^{r+\gamma}$, *где* $r + \gamma \geq -2A$, *если* $A < 0$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\|f - S_n(f)\|_{1,A,A} \leq \frac{C_\gamma \ln n}{n^{r+\gamma}}, r + \gamma > \theta - 2A,$$

$$\|f - S_n(f)\|_{1,A,A} \leq \frac{C \ln^2 n}{n^{r+\gamma}}, r + \gamma = \theta - 2A,$$

$$\|f - S_n(f)\|_{1,A,A} \leq \frac{C_\gamma \ln^2 n}{n^{2(r+\gamma)-A+\theta}}, \theta/2 - A < r + \gamma < \theta - 2A.$$

1. Моторная О. В., Моторный В. П. Свойства обобщенных констант Лебега сумм Фурье–Якоби. Вестник ДНУ. Математика, 2009, 14, С. 91–98.
2. Моторный В. П., Гончаров С. В., Нитиема П. К. О сходимости в среднем рядов Фурье–Якоби. Укр. матем. журн., 2010, **62**, С. 814–828.

Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах цілих періодичних функцій

А. П. Мусієнко
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
mysienkoandrey@gmail.com

Нехай $C^{\psi}_{\bar{\beta}} L_s$ — множина 2π-періодичних функцій f, що зображуються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_{\bar{\beta}}(t)dt,\ a_0 \in \mathbb{R},\ \varphi \in L_s,\ \varphi \perp 1,\ \bar{\beta} = \beta_k,\ k \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

з фіксованими ядрами $\Psi_{\bar{\beta}}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \frac{\beta_k \pi}{2})$, коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову $\mathcal{D}_0$: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0,\ \psi(k) > 0$. Функцію φ з рівності (1) називають $(\psi, \bar{\beta})$-похідною функції f і позначають через $f^{\psi}_{\bar{\beta}}$.

Нехай $E_m(\varphi)_s$ — величина найкращого наближення в просторі L_s функції $\varphi \in L_s$ тригонометричними поліномами t_{m-1} порядку не вищого $m-1$, тобто $E_m(\varphi)_s = \inf\limits_{t_{m-1}} \|\varphi(\cdot) - t_{m-1}(\cdot)\|_s$.

Тригонометричні поліноми $V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum\limits_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$, де $S_k(f;x)$ — частинні суми Фур'є порядку k функції f, називають сумами Валле Пуссена функції f з параметрами n і p.

Встановлено асимптотично непокращувані аналоги нерівності типу Лебега, що виражають відхилення сум Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ для функцій з множини $C^{\psi}_{\bar{\beta}} L_s$ в рівномірній метриці через найкращі наближення $(\psi, \bar{\beta})$-похідних цих функцій в метриці простору L_s.

Теорема. *Нехай* $\psi \in \mathcal{D}_0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тоді при довільних* $f \in C^{\psi}_{\bar{\beta}} L_s$, $1 \leq s \leq \infty$, $n, p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ *для величин* $\rho_{n,p}(f;x) = f(x) - V_{n,p}(f;x)$ *справедлива нерівність*

$$\|\rho_{n,p}(f;x)\|_C \leq \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p}\psi(n-p+1) + O(1)\sum_{k=n-p+2}^{\infty} \psi(k)\tau_{n,p}(k)\right) E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar{\beta}})_{L_s}. \qquad (2)$$

При цьому для будь-якої функції $f \in C^{\psi}_{\bar\beta} L_s$, $1 \le s \le \infty$ *і довільних* $n, p \in \mathbb{N}$, $p \le n$ *в множині* $C^{\psi}_{\bar\beta} L_s$, $1 \le s \le \infty$, *знайдеться функція* $F(x) = F(f; n; p; x)$ *така, що* $E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s} = E_{n-p+1}(f^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}$, *і для неї при* $n - p \to \infty$ *виконується рівність*

$$\|\rho_{n,p}(F;x)\|_C = \left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi p}\psi(n-p+1) + O(1)\sum_{k=n-p+2}^{\infty}\psi(k)\tau_{n,p}(k)\right)E_{n-p+1}(F^{\psi}_{\bar\beta})_{L_s}. \qquad (3)$$

У (2) *і* (3) $s' = \dfrac{s}{s-1}$, *коефіцієнти* $\tau_{n,p}(k)$ *означаються рівністю*

$$\tau_{n,p}(k) = \begin{cases} 1 - \frac{n-k}{p}, & n-p+1 \le k \le n-1, \\ 1, & k \ge n, \end{cases}$$

а $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.*

Зауваження. *При* $\beta_k = \beta$, $k \in \mathbb{N}$ *теорема встановлена в роботі* [1].

1. Сердюк А. С., Мусієнко А. П. Нерівності типу Лебега для сум Валле Пуссена на множинах цілих функцій. Укр. мат. журн., 2013, **65**, №5, С. 630–642.

Наближення періодичних функцій повторними сумами Валле Пуссена

О. О. Новіков[1], **О. Г. Ровенська**[2], **М. С. Шаповалов**[1]

[1]Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

[2]Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ, Україна

o.rovenskaya@mail.ru

Позначимо через $S_n(f;x)$ частинні суми ряду Фур'є функції $f \in L$. Тоді суми Валле Пуссена функції f задаються співвідношенням

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x).$$

Нехай p_1, p_2 — довільні натуральні числа такі, що $p_1 + p_2 < n$. Функції $f \in L$ поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$V_{n,p_1,p_2}(f;x) = V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f;x),$$

які будемо називати повторними сумами Валле Пуссена [1].

Класи періодичних функцій $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ були запроваджені О. І Степанцем [2]. Ця класифікація дозволила єдиним чином ранжувати за апроксимативними властивостями широкий спектр функцій, у тому числі функції малої, скінченної гладкості та нескінченно диференційовні. У вигляді таких класів можна подати класи W^r_{β} та інші. Більш докладно з цими питаннями можна ознайомитися в [3].

У роботі [1] розглянуто питання дослідження асимптотичної поведінки точних верхніх меж відхилень у рівномірній метриці сум $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ на класах інтегралів Пуасона. Повідомлення стосується аналогічних питань для сум $V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f;x)$ на класах $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ функцій з малою та обмеженою гладкістю. Отримано таке твердження.

Теорема. *Нехай* $f \in C^{\overline{\psi}}_{\infty}$, $\psi_i \in \mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \bigcap \mathfrak{M}'$, $i = 1, 2$, $p_1 \leq p_2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_2}{n} = 0$. *Тоді при* $n \to \infty$ *має місце асимптотична формула*

$$\mathcal{E}(C^{\overline{\psi}}_{\infty}; V^{(2)}_{n,\overline{p}}) = \sup_{f\in C^{\overline{\psi}}_{\infty}} ||f(x) - V^{(2)}_{n,\overline{p}}(f; x)||_C = \frac{2}{\pi}\int\limits_n^{\infty} \frac{\psi_2(x)}{x}dx + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln\frac{n}{p_1+p_2} + O(1)\overline{\psi}(n), \quad (1)$$

де $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* n, p_1, p_2, *з означенням та властивостями множин* $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}'$ *можна ознайомитися, наприклад в* [3, с.160].

Асимптотична формула (1) за певних умов, забезпечує розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для повторних сум Валле Пуссена і класів $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$.

1. Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена. Нелінійні коливання, 2010, **13**, № 1, С. 96 – 99.
2. Степанец А. И. Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов. Укр. мат. журн., 1997, **49**, № 8, С. 1069 – 1113.
3. Степанец А. И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. I, 427 с.

Равномерное приближение периодических функций тригонометрическими суммами специального вида

Е. Ю. Овсий

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

ovsiy.imath@gmail.com

В докладе будут рассмотрены аппроксимационные свойства тригонометрических сумм $U^{\psi}_{n,p}$ специального вида на классах (ψ, β)-дифференцируемых (в смысле Степанца) периодических функций $C^{\psi}_{\beta,\infty}$. Будет показано, что в ряде важных случаев рассматриваемые суммы на этих классах обеспечивают более высокий порядок приближения в метрике пространства C по сравнению с суммами Фурье, Зигмунда и Валле Пуссена.

Об одном классе базисов в некоторых пространствах, аналитических в единичном круге функций

Е. И. Олефир

Южноукраинский национальный педагогический университет, Одесса, Украина

l.olefir@i.ua

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство аналитических в единичном круге D функций, в котором семейство $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ образует ортогональный базис. Дается процедура построения безусловных базисов пространства $\mathcal{H}$ вида

$$F_j(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n z^n}{\omega_n - \lambda_j}, \quad \lambda_j \in \Lambda, \quad (1)$$

где последовательности $\{\omega_n^{-1}\}(\omega_n > 0)$, $\{\gamma_n\}_0^{\infty}$ принадлежат l_2, $\Lambda = \{\lambda_j\}_0^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел.

Обозначим через Ω класс целых функций вида

$$Q(z) = cos\sigma z + \int_0^{\sigma} f(t)sin(z - \frac{1}{2})tdt, \quad \int_0^{\sigma} |f(t)|dt \leq \frac{1}{2}, \quad \int_0^{\sigma} tf(t)cos\frac{t}{2}dt = 0.$$

Каждая функция $Q \in \Omega$ имеет только вещественные корни.

Теорема. *Пусть в формуле* (1) *числа* $\gamma_n > 0, \{\omega_n\}_0^\infty$ *— совокупность положительных корней некоторой функции* $Q \in \Omega$, $\{\lambda_j\}_0^\infty$ *— положительная последовательность корней мероморфной функции*

$$\varphi(x) := \delta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{x - \omega_n}, \quad \delta = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \omega_n^{-1}.$$

Тогда семейство функций (1) *образует безусловный базис класса Харди* $H^2(D)$.

Інтерполяція функцій ланцюговими дробами

М. М. Пагіря

Мукачівський державний університет, Мукачево, Україна

pahirya@gmail.com

Нехай функція $f(x)$ неперервна на компакті $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}$ та визначена значеннями в точках множини інтерполяційних вузлів $X = \{x_i : x_i \in \mathfrak{R},\ i = 0, 1, \ldots, n,\ x_i \neq x_j\ \}$. Наближення функції на компакті можна шукати у вигляді або інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле

$$D_n^{(t)}(x) = b_0 + \mathop{\mathbf{K}}_{k=1}^{n} (x - x_{k-1})/b_k\,, \tag{1}$$

або інтерполяційного ланцюгового C–дробу

$$D_n^{(c)}(x) = a_0 + \mathop{\mathbf{K}}_{k=1}^{n} a_k(x - x_{k-1})/1\,. \tag{2}$$

Якщо на компакті $\mathfrak{R}$ додатково визначена неперервна та строго монотонна базис–функція $t = g(x)$, то функцію $f(x)$ на компакті $\mathfrak{R}$ можна також наближати або функціональним інтерполяційним ланцюговим дробом типу Тіле

$$D_n^{(gt)}(g; x) = b_0^{(g)} + \mathop{\mathbf{K}}_{k=1}^{n} (g(x) - g(x_{k-1}))/b_k^{(g)}\,, \tag{3}$$

або функціональним інтерполяційним ланцюговим C–дробом

$$D_n^{(gc)}(g; x) = a_0^{(g)} + \mathop{\mathbf{K}}_{k=1}^{n} a_k^{(g)}(g(x) - g(x_{k-1}))/1\,. \tag{4}$$

Встановлені формули для знаходження коефіцієнтів розглянутих інтерполяційних ланцюгових дробів (1)–(4) за значеннями функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах X. Досліджено питання якості наближення деяких функцій такими агрегатами інтерполяції. Отримані формули оцінки залишкових членів у випадку, коли інтерпольована функція $f(x) \in \mathbf{C^{n+1}}(\mathfrak{R})$. Наведені числові приклади.

1. Пагіря М. М. Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами. Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ, 2005, № 10–11, С. 77–87.
2. Пагіря М. М. Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле. Укр. мат. журн., 2008, **60**, № 8, С. 1548–1554.
3. Пагіря М. М. Функціональні ланцюгові дроби типу Тіле. Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ., 2010, № 20, С. 98–110.

Оценки φ-сильных средних Валле Пуссена кратных числовых рядов

Н. Л. Пачулиа

Абхазский государственный университет, Сухум, Абхазия

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^j$ — прямое произведение множества $\mathbb{N}_0$ самого на себя j раз

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0^j} t_k, \tag{1}$$

j-мерный числовой ряд, $\mathbb{N}_{n_j} = \{0, 1, 2, \ldots, n_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, j$, $n = (n_1, n_2, \ldots, n_j)$, $X_{i=1}^j \mathbb{N}_{n_j} = \mathbb{N}_n^j$

$$\gamma_n = \sum_{k \in \mathbb{N}_n^j} t_k,$$

прямоугольные частные суммы ряда (1).

Выражение

$$H_n^{\varphi}(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^j} \lambda_k^n \varphi(|\gamma_k - \gamma|),$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, φ–непрерывная возрастающая на $[0, \infty)$ функция, $\lambda_k^n = \prod_{i=1}^{j} \lambda_{k_j}^{n_j}$, а $\lambda = \left(\lambda_{k_j}^{n_j}\right)$ — матрица, определяющая регулярный метод суммирования простых числовых рядов, называют φ — сильным средним уклонений $|\gamma_n - \gamma|$ методом λ.

Исследовано поведение величин $H_n^{\varphi}(\lambda)$ при различных значениях входящих параметров. Полученные результаты можно использовать при оценках φ–сильных средних методов суммирования кратных рядов Фурье.

Пусть Φ_δ, $\delta > 0$ — множество непрерывных и возрастающих на $[0, \infty)$ функций φ, таких что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u) > 0$, $u > 0$

$$\varphi(2u) \le a\varphi(u), \quad \forall u \in [0, \delta],$$

$$\ln \varphi(u) = o(u^\delta), \quad u \to \infty.$$

Пусть $n = (n_1, n_2, \ldots, n_j) \in \mathbb{N}^j$, $B_i \subset [n - i, 2n_i] \cap \mathbb{N}$, $B = X_{i=1}^j B_i$ — прямое произведение множеств B_i, $i = 1, \ldots, j$, $r_i = |B_i|$ — мощность множества B_i.

Приведем один из характерных результатов работы.

Теорема. *Пусть (F_n) — последовательность чисел стремящаяся к нулю, убывающая по каждой координате n_j точки n, $i = 1, \ldots, j$ и $\psi \in \Phi_{\frac{1}{j}}$. Если $\forall B_i \subset [n_i, 2n_i] \cap \mathbb{N}$*

$$\frac{1}{r} \sum_{k \in B} \psi(|\gamma_k - \gamma|) \le A\psi(F_n) \prod_{i=1}^{j} \ln \frac{n_i e}{r_i},$$

где $B = X_{i=1}^j B_i$, $r_i = |B_i|$, A — постоянное число, то $\forall \varphi \in \Phi_{\frac{1}{j}}$

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{j}(n_i + 1)} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(\psi|\gamma_k - \gamma|) \le A\varphi(\psi(F_n)).$$

О необходимых условиях интерполяции квазилинейных операторов слабого типа в пространствах Лоренца

Б. И. Пелешенко

Днепропетровский государственный аграрный университет, Днепропетровск, Украина

dsaupelesh@mail.ru

В докладе рассматриваются квазилинейные операторы, ограничено действующие из пары функциональных пространств Лоренца $(\Lambda_{\phi_0}[0,2\pi], \Lambda_{\phi_1}[0,2\pi])$ в пару «слабых» функциональных пространств Марцинкевича $(M_{\bar{\psi}_0}[0,2\pi], M_{\bar{\psi}_1}[0,2\pi])$. Установлены необходимые условия для ограниченности таких операторов из пространства Лоренца $\Lambda_{\phi,a}[0,2\pi]$ в пространство Лоренца $\Lambda_{\psi,b}[0,2\pi]$ $(1 \le a, b \le \infty)$ в случае, когда отношения фундаментальных функций пары интерполяционных пространств ϕ и ψ соответственно к фундаментальным функциям крайних пространств ϕ_0 и ψ_0 $(\psi_0(t) = t/\bar{\psi}_0(t))$ или к ϕ_1 и ψ_1 $(\psi_1(t) = t/\bar{\psi}_1(t))$ являются медленно меняющимися функциями. Полученные необходимые условия интерполяции операторов совпадают с ранее полученными автором достаточными условиями.

О сходимости интегралов Фурье и пространствах Липшица, определяемых с помощью разностей дробного порядка

Б. И. Пелешенко, Т. Н. Семиренко

Днепропетровский государственный аграрный университет, Днепропетровск, Украина

dsaupelesh@mail.ru, semirenkot@mail.ru

Пусть символами $L^1(\mathbb{R})$ и $C(\mathbb{R})$ обозначаются соответственно пространства интегрируемых по Лебегу и непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Через $\hat{f}$ обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, которое является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией.

Для $\alpha \in (0;\infty)$ и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ разность порядка α функции f определяется формулой $\Delta_t^\alpha f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x+kt)$, где $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}$. В частности, когда α — целое положительное число, то $\binom{\alpha}{\alpha+j} = 0$ для $j \in \mathbb{N}$ и $\Delta_t^\alpha f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\alpha} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x+kt)$.

Пусть $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная неубывающая функция такая, что $\omega(0) = 0$, $t^{-\alpha}\omega(t)$ не возрастает, существует такое $C(\alpha)$, зависящее только от α, что для всякого $\delta > 0$ выполняется неравенство $\omega(2\delta) \le C(\alpha)\omega(\delta)$.

Через $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ обозначается класс таких непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, которые удовлетворяют для всякого $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ неравенству $|\Delta_t^\alpha f(x)| \le M_0\omega(t)$, где M_0 зависит только от функции f и не зависит от аргумента x и t.

Класс $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ состоит из функций $f \in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, для каждой из которых выполняется условие $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{|\Delta_t^\alpha f(x)|}{\omega(t)} = 0$ равномерно по всем $x \in \mathbb{R}$.

В работе Ф. Морица получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на преобразование Фурье $\hat{f}$ функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, для принадлежности f одному из классов Липшица $H^\alpha(\mathbb{R})$, $h^\alpha(\mathbb{R})$. Соответствующие условия принадлежности $f \in L^1(\mathbb{R})$ классам $H^\omega(\mathbb{R})$ или $h^\omega(\mathbb{R})$, определяемых с помощью разностей первого порядка и модулей непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющих условию Бари–Стечкина, получены в работе первого автора. Нами установлены условия принадлежности $f \in L^1(\mathbb{R})$ классам $H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, $h_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$, определяемым с помощью разностей порядка α и функций $\omega(t)$ типа модулей непрерывности α-го порядка.

Сформулируем один из основных полученных результатов.

Теорема. *Пусть функция* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *такая, что* $f\in L^1\cap C(\mathbb{R})$, $\alpha>0$ *и* $\alpha\neq 2k-1$, $k\in\mathbb{N}$, *функция* $\omega(t)$ *удовлетворяет перечисленным выше условиям и существует такая постоянная* $M_1>0$, *что для всякого* $t>0$

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(u)}{u}du \le M_1\omega(t). \tag{1}$$

Если для любого $y>0$

$$\int\limits_{|t|<y} |t|^{\alpha}|\hat{f}(t)|dt = O\left(y^{\alpha}\omega\left(y^{-1}\right)\right), \tag{2}$$

то $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ *и* $f\in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$.

Обратно, предположим, что $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *и* $\hat{f}$ *принадлежат* $L^1(\mathbb{R})$, $\omega(t)$ *удовлетворяет перечисленным выше условиям и условию* (1). *Если* $f\in H_C^{\omega,\alpha}(\mathbb{R})$ *и* $\hat{f}(t)\ge 0$ *для всех* $t\in\mathbb{R}$, *то тогда выполняется* (2).

Оцінки росту похідних функцій, аналітичних в одиничному крузі

О. М. Піддубний

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

olexy2006@ukr.net

Класична теорема Гарді–Літтлвуда [1] описує зв'язок між гладкістю граничних значень аналітичної функції на межі круга аналітичності та швидкістю росту модуля її похідних вищих порядків. Ця теорема стала ефективним знаряддям у розв'язанні багатьох задач теорії функцій і теорії тригонометричних рядів. Але досить часто виникає потреба оцінювати похідні вищих порядків аналітичної функції, використовуючи інформацію лише про модуль неперервності граничних значень її дійсної частини.

Ми розглянемо таке питання.

Нехай функція f є аналітичною в крузі $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, а функція $u:=\operatorname{Re} f$ є неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$. Відомо, що при даному $n\in\mathbb{Z}_+$ функцію $t\mapsto u(e^{it})$ можна подати у вигляді

$$u(e^{it}) = \sum_{j=0}^{n+k-1} a_j t^j + R_{n+k}(t),\ k\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

де a_j — дійсні числа, а R_{n+k} — деяка функція, визначена на $[-\pi,\pi]$, що задовольняє певні умови. Якими при цьому будуть швидкості росту величин $|f^{(n+k)}(z)|$, $k\in\mathbb{N}$, коли точка z наближається до точки 1 вздовж радіуса $[0,1]$?

Це питання мотивоване таким твердженням, доведеним в [2]:

Нехай виконується (1) *при* $k=1$ *і при цьому функція* R_{n+k} *задовольняє умову*

$$R_{n+k}(t) = O\left(|t|^n\lambda(|t|)\right), \tag{2}$$

де $\lambda:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *— неперервна зростаюча функція. Якщо* $t=O(\lambda(|t|))$, *то існує константа* M, *залежна тільки від* n, *чисел* $\{a_j\}$ *і константи у співвідношенні* (2) *така, що*

$$|f^{(n+1)}(\varrho)| \le M\int_{1-\varrho}^{\pi}\frac{\lambda(t)}{t^2}dt,\ \frac{1}{2}\le\varrho<1.$$

Подібні задачі досліджувалися також в [3]. Ми маємо за мету поширити останнє твердження на випадок довільних натуральних k.

Теорема. *Нехай f — функція, аналітична в крузі $\mathbb{D}$, а функція $u = \operatorname{Re} f$ є неперервною в $\overline{\mathbb{D}}$. Якщо для деякого $n \in \mathbb{Z}_+$ і $k \in \mathbb{N}$ функцію $t \mapsto u(e^{it})$ можна подати у вигляді (1), в якому R_{n+k} задовольняє умову (2), де $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — неперервна зростаюча функція, для якої $|t|^k = O(\lambda(|t|))$, то існує стала $M > 0$, яка залежить тільки від n, чисел $\{a_j\}_{j=0}^{n+k-1}$ і сталої у співвідношенні (2) така, що виконується нерівність*

$$\left|f^{(n+k)}(\varrho)\right| \le M \int\limits_{1-\varrho}^{\pi} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt \quad \forall\ \varrho \in [1/2, 1).$$

1. Hardy G., Littlewood J. E. Some properties of fractional integrals. II. Math. Zeitschr, 1931, **34**, P. 403–439.
2. Lesley F.D. Differentiability of minimal surfaces at the boundary. Pacific J. Math., 1971, **37**, № 1, P. 123–139.
3. Warschawski S. Boundary Derivatives of Minimal Surfaces. Arch. Rational Mech. Anal., 1970, **38**, P. 241–256.

Точные оценки равномерной аппроксимации периодических функций ломаными

С. А. Пичугов

Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, Днепропетровск, Украина

s.a.pichugov@mail.ru

Пусть $e(f; S_{2n})$ — наилучшее приближение непрерывной 2π-периодической функции f в метрике $C_{2\pi}$ подпространством S_{2n} непрерывных ломаных с $2n$ равноотстоящими узлами $y_\nu = \frac{\pi}{2n} + \frac{\nu\pi}{n}$, $\nu \in \mathbb{Z}$ на периоде;

$\omega_2(f, h) = \sup\limits_{|t| \le h} \|\Delta_t^2 f\|$ — значение модуля гладкости f в точке h, $h \ge 0$, где $\Delta_t^2 f(x) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ — вторая разность f в точке x с шагом t.

Теорема. *Для всех $k, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, выполняются неравенства:*

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \frac{k^2+1}{2} \le \sup_{f \in C_{2\pi},\ f \ne const} \frac{e(f; S_{2n})}{\omega_2\left(f, \frac{\pi}{2nk}\right)} \le \frac{k^2+1}{2}.$$

Следствие. *Для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения*

$$\sup_n \sup_{f \in C_{2\pi},\ f \ne const} \frac{e(f; S_{2n})}{\omega_2\left(f, \frac{\pi}{2nk}\right)} = \frac{k^2+1}{2}.$$

1. Пичугов С. А. Точная константа в неравенстве Джексона с модулем гладкости для равномерных приближений периодических функций. Мат. заметки, 2013, **93**, № 6, С. 932–938.

Метод суммирования Рисса интегралов Фурье для функций из $H^p(E_{2n}^+), 0 < p \leqslant \infty$

С. Г. Прибегин

Одесский национальный морской университет, Одесса, Украина

ivanpribegin@rambler.ru

Пусть $E_{2n}^+ = \{z = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{C}^n : \ y_i > 0, \ i = \overline{1,n}\}$, функция $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) \in H^p(E_{2n}^+), \ f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — угловые граничные значения функции f, $dx = dx_1 \ldots dx_n$, $\|f\|_p = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$, $l > 0$, $m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(l-m+1)}$ — биномиальные коэффициенты, $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta_h^l f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} (-1)^m f(x + mh)$ — дробная разность, которая определена почти всюду при

$$((0 < p \leqslant \infty) \wedge (l \in \mathbb{N})) \vee \left((l \in (0; \infty) \setminus \mathbb{N}) \wedge \left(l > \left(\frac{1}{p} - 1 \right)_+ \right) \right) \vee ((p \geqslant 1) \wedge (l > 0)).$$

$\omega_l(f, \varepsilon)_p = \sup\limits_{\substack{|h_j| \leqslant \varepsilon, \\ j = \overline{1,n}}} \|\Delta_h^l f(x)\|$ и $\widetilde{\omega}_l(f, \varepsilon)_p = \sup\limits_{\substack{|h| \leqslant \varepsilon, \\ \widetilde{h} = (h, \ldots, h), \ h \in \mathbb{R}}} \|\Delta_{\widetilde{h}}^l f(x)\|$ — модули гладкости дробного порядка. Далее, $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $t_j \geqslant 0$, $|t| = t_1 + \cdots + t_n$, $u + iv = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$, $< u + iv, t >= \sum\limits_{j=1}^{\infty} (u_j + v_j) t_j$, $\widehat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u + iv) e^{-< u+iv, t >} du$ — преобразование Фурье функции f, $\varepsilon > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$

$$R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 - (\varepsilon|t|)^l)_+^\alpha \widehat{f}(t) e^{i< x, t >} dt$$

— обобщённые средние Рисса.

Теорема. *Пусть $f \in H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p \leqslant \infty$. Тогда если*

$$((l \in \mathbb{N}) \wedge (0 < p \leqslant \infty)) \vee \left((l \in (0; \infty] \setminus \mathbb{N}) \wedge \left(\left(\frac{n}{[l]} < p \leqslant 1 \right) \vee (([l] > n) \wedge (1 < p \leqslant \infty)) \right) \right)$$

($[\cdot]$ — *целая часть числа*) *и*

$$\left((0 < p \leqslant 1) \wedge \left(\alpha > \frac{n}{p} - 1 \right) \right) \vee ((p > 1) \wedge (\alpha > n - 1)),$$

то имеет место следующая оценка

$$C_1(l; \alpha; p) \widetilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p \leqslant \|f(x) - R_\varepsilon^{l,\alpha}(f, x)\|_p \leqslant C_2(l; \alpha; p) \omega_l(\varepsilon, f)_p,$$

где $C_1(l; \alpha; p)$ и $C_2(l; \alpha; p)$ — положительные константы, зависящие от указанных параметров.

В случае $n = 1$ и $l \in \mathbb{N}$ при $0 < p \leqslant 1$ эта теорема доказана А.А. Соляником в [1].

1. Soljanik A. A. On the order of approximation to function of $H^p(\mathbb{R})(0 < p \leqslant 1)$ by certain of Fourier integrals. Anal. Math, 1986, 12:1, P. 59–75.

Соотношения между K-функционалами и модулями гладкости

Е. И. Радзиевская

Национальный университет пищевых технологий, Киев, Украина

radzl58@mail.ru

Пусть $r \in \mathbb{N}$, f — комплекснозначная функция, заданная на отрезке вещественной оси, $\omega^{[r]}(\delta, f)_{L_p[a,b]}$ — r-ый модуль гладкости. В случае $f \in C[a,b]$ полагаем $\omega^{[r]}(\delta, f)_{C[a,b]} := := \omega^{[r]}(\delta, f)_{L_\infty[a,b]}$, а для $r = 1$ будем использовать обозначения $\omega(\delta, f)_C := \omega^{[1]}(\delta, f)_C$.

Рассмотрим конечную систему функционалов $\{U_j\}$ вида

$$U_j(g) := \int_0^1 g^{(K_j)}(\tau) d\sigma_j(\tau) + \sum_{l=0}^{K_j-1} C_{j,l} g^{(l)}(0), \tag{1}$$

где σ_j принадлежит множеству функций ограниченной вариации, заданной на отрезке $[0,1]$. Число K_j называется порядком функционала U_j и обозначается $ord\ U_j$.

Пусть X одно из пространств L_p или l. Тогда для $\delta > 0$ и $f \in X$ зададим два K-функционала

$$K(\delta, f; X, W_U^r(X)) := \inf_{g \in W_U^r(X)} (\|f - g\|_X + \delta \|g\|_{W^r(X)}),$$

$$K(\delta, f; X, W_U^r(X)) := \inf_{g \in \widetilde{W}_U^r(X)} (\|f - g\|_X + \delta \|g\|_{W^r(X)}),$$

где $W_U^r(X) := \{g \in W^r(X) : U_j(g) = 0, ord\ U_j \leqslant r\}$ и $\widetilde{W}_U^r(L_p) := W_U^r(L_p)$

$$\widetilde{W}_U^r(l) := \{g \in W^r(l) : U_j(g) = 0, ord\ U_j \leqslant r\}.$$

В введенных обозначениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 . *Пусть $\{U_j\}$ — пустая или конечная система функционалов вида* (1). *Если система $\{U_j\}$ не пуста, то считаем, что функции σ_j из* (1) *удовлетворяют условию: каждая σ_j имеет хотя бы одну точку скачка, причем всем функционалам U_j, у которых порядки совпадают, можно сопоставить разные точки скачка функции σ_j. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется положительная постоянная $c(n, U)$, не зависящая от $X = L_p$ или $X = C$ и от $r = 1, \ldots, n$, для которой выполнена оценка*

$$K(\delta^n, f; X, \widetilde{W}_U^r(X)) \leqslant c(n, U) \delta^r \|f\|_{W^r(X)},\ 0 < \delta \leqslant 1,\ \delta \in W_U^r(X).$$

Теорема 2. *Пусть n, $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant n$ и система функционалов $\{U_j\}$ удовлетворяет условию теоремы 1 и не содержит функционалов, порядки которых меньше r. Тогда найдется положительная постоянная $c(n; U)$, не зависящая от $X = L_p$ или $X = C$, для которой*

$$K(\delta^n, f; X, \widetilde{W}_U^r(X)) \leqslant c(n, U)(\omega^{[r]}(\delta, f)_X + \delta^r \|f\|_X), \quad 0 < \delta \leqslant 1,\ f \in X.$$

1. Радзиевский Г.В. Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени. Мат. сб., 1998, **189**, № 4, С. 83–124.
2. Радзиевская Е.И., Радзиевский Г.В. Оценка K-функционала высокого порядка через K-функционал меньшего порядка. Укр. мат. журн., 2003, **55**, № 11, С. 1550–1560.

Поперечники і найкраще наближення класів періодичних функцій багатьох змінних

А. С. Романюк
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Romanyuk@imath.kiev.ua

У доповіді мова буде йти про порядкові оцінки лінійних поперечників, а також найкращого наближення класів періодичних функцій багатьох змінних $B^r_{p,\theta}$ типу Нікольського–Бєсова [1, 2] і Соболєва $W^r_{p,\alpha}$ [2].

Лінійним поперечником центрально-симетричної множини W у нормованому просторі $\mathcal{X}$ називається величина

$$\lambda_M(W,\mathcal{X}) = \inf_{\Lambda} \sup_{x\in W} \|x - \Lambda\, x\|_{\mathcal{X}},$$

де нижня грань береться по всіх лінійних неперервних операторах, які діють в $\mathcal{X}$ і розмірність області значень яких не перевищує M. Поперечник $\lambda_M(W,\mathcal{X})$ введений в 1960 р. В. М. Тіхоміровим [3].

Для $s = (s_1,\dots,s_d) \in \mathbb{N}^d$ покладемо

$$\rho(s) = \left\{k \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\quad j=\overline{1,d}\right\}$$

і

$$Q_n = \bigcup_{\|s\|_1\le n} \rho(s),\ \|s\|_1 = s_1 + \ldots + s_d.$$

Множина Q_n називається східчасто-гіперболічним хрестом.

Нехай $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [\,0,2\pi]$ — простір 2π-періодичних по кожній змінній функцій f для яких

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ 1\le p<\infty,$$

$$\|f\|_\infty = ess\sup_{x\in\pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Будемо вважати, що координати векторів $r = (r_1,\dots,r_d)$, які входять в означення класів, впорядковані у вигляді: $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$.

Наведемо два результати, які отримані в процесі проведених досліджень.

Теорема 1. *Нехай $1<p<\infty$, $r_1>0$. Тоді при $\alpha\in\mathbb{R}^d$*

$$\lambda_M(W^r_{p,\alpha}, L_1) \asymp (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}.$$

Теорема 2. *Нехай $d=2$, $r=(r_1,r_1)$, $r_1>0$ і $1\le\theta<\infty$. Тоді*

$$E_{Q_n}(B^r_{\infty,\theta})_\infty = \sup_{f\in B^r_{\infty,\theta}} \inf_{t\in T(Q_n)} \|f-t\|_\infty \asymp 2^{-nr_1} n^{1-\frac{1}{\theta}},$$

де $T(Q_n)$ — множина тригонометричних поліномів з «номерами» гармонік з Q_n.

1. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения. Тр.Мат.ин-та АН СССР., 1989, **187**, С. 143–161.
2. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. Тр. Мат. ин-та АН СССР., 1986, **178**, С. 1–112.
3. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений. Успехи мат. наук., 1960, **15**, № 3, С. 81–120.

Аппроксимативные свойства кратного базиса Хаара

В. С. Романюк
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
romanyuk@imath.kiev.ua

В доклад включены результаты о приближениях функций, определенных на единичном кубе $\mathbb{I}^d$ евклидового пространства $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ и принадлежащих пространствам Гельдера H_p^α и Бесова $B_{p,\theta}^\alpha$.

В построении приближающих агрегатов задействована кратная базисная система Хаара H^d.

Основную часть доклада составляют результаты из [1] — о структурных свойствах базиса H^d, а также об оценках наилучших m-членных приближений по базису H^d классов Бесова.

Другая часть доклада посвящена изучению аппроксимативных свойств базиса Хаара H^d по отношению к классам Гельдера H_p^α. В частности,

- в терминах наилучших полиномиальных приближений по базису H^d дана конструктивная характеристика классов H_p^α, $0 < \alpha < \frac{1}{p} \le 1$;
- решена задача об установлении порядковых оценок наилучших m-членных приближений по базису H^d классов SH_p^α в пространстве $L_q(\mathbb{I}^d)$.

1. Романюк В. С. Базисная система Хаара функций многих переменных и ее аппроксимационные свойства на классах Бесова и их аналогах. — Киев, 2012, 44 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2012.2).

Неравенства типа Джексона в гильбертовых пространствах

С. В. Савела
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина
ssvet05@mail.ru

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Пусть также $H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots$ — последовательность конечномерных подпространств этого пространства, $N_k = \dim H_k$, такая, что $\overline{\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} H_k} = H$. Через $E(x, H_n)$ обозначим наилучшее приближение элемента $x \in H$ подпространством H_n.

Через W_n обозначим ортогональное дополнение подпространства H_n до подпространства H_{n-1}. Пусть также P_n — оператор проектирования на подпространство W_n. Зададим возрастающую последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и для $t > 0$ положим

$$U_t x := \sum_{k=1}^{\infty} e^{it\lambda_k} P_k x.$$

Введем следующую "структурную" характеристику элемента $x \in H$:

$$\omega_\Lambda(x,\delta) = \sup_{0<t\le\delta} \|x - U_t x\| = \sup_{0<t\le\delta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |1 - e^{it\lambda_k}|^2 \|P_k x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенства, оценивающие $E(x, H_n)$ через $\omega_\Lambda(x, \delta)$, т. е. неравенства вида

$$E(x, H_n) \le K\omega_\Lambda(x, \delta),$$

будем называть неравенствами типа Джексона.

Методом Н. И. Черныха [1] нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $x \in H \setminus H_n$ имеет место неравенство*

$$E(x, H_n) \le \frac{1}{2}\left(\lambda_{n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\lambda_{n+1}}}\omega_\Lambda^2(x, t)\sin\lambda_{n+1}t\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $x \in H \setminus H_n$ имеет место неравенство*

$$E(x, H_n) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_\Lambda(x, \frac{\pi}{\lambda_{n+1}}). \tag{1}$$

Если $H = L_2(0, 2\pi)$, $H_n = F_{2n+1}^T$ — подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше n и $\lambda_n = n$, из (1) получаем неравенство Черныха.

В докладе мы обсудим вопросы точности приведенных неравенств, а также вопрос о возможности обращения неравенства (1), т. е. вопрос о возможности получения оценки $\omega_\Lambda(x, \delta)$ через $E(x, H_n)$.

Результаты данной работы получены совместно с В. Ф. Бабенко.

1. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1967, **88**, С. 71–74.

Фрактальні властивості множин неповних сум числових рядів з однією умовою однорідності

І. О. Савченко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

igorsav4enko@rambler.ru

Розглядається числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

для якого виконуються наступні умови:

1) $a_n + a_{n+1} = \lambda \cdot r_n \Leftrightarrow a_{n+2} = \frac{a_n}{1+\lambda}$, де $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, $r_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_n$;

2) $0 < a_{n+1} < a_n \Rightarrow t < \frac{a_2}{a_1} < 1$, де $t = \frac{1}{1+\lambda}$.

Означення. *Множина*

$$A = \left\{x : x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot a_n, \quad x_n \in \{0, 1\}\right\}$$

називається множиною неповних сум ряду (1).

Лема. $\max\left\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\right\} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$.

Теорема. *Множина A неповних сум ряду* (1) *є*

1) *ніде не щільною нульової міри Лебега при* $t \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$;

2) *відрізком* $\left[0, \frac{a_1+a_2}{1-t}\right]$ *при* $t \in \left[\max\{\frac{a_1-a_2}{2a_1}, \frac{a_2}{a_1+2a_2}\},\ 1\right)$.

У доповіді будуть представлені тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум ряду (1) в залежності від значень параметра λ.

1. Працьовитий М. В. Фрактальные множества, функции, распределения. —- Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998, 296 с.
2. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наук. думка, 1992, 208 с.

Поперечники класів гармонічних функцій

В. В. Савчук

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

savchuk@imath.kiev.ua

Нехай h_∞ — клас обмежених дійснозначних гармонічних функцій f, визначених в крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, для яких $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \le 1$ і $\overline{h}_\infty$ — клас гармонічних функцій, спряжених до функцій з h_∞, тобто $\overline{h}_\infty := \{f$ гармонічна в $\mathbb{D} : \widetilde{f} \in h_\infty\}$.

Нехай далі K — компактна підмножина інтервалу $\mathbb{I} := (-1, 1)$, $\mathfrak{h}$ і $\overline{\mathfrak{h}}$ — звуження класів h_∞ і $\overline{h}_\infty$, відповідно, на компакт K і нехай σ — додатна міра на K така, що $\sigma(K) < \infty$. Позначимо через $L_q := L_q(K, \sigma)$ — простір Лебега функцій f на K з нормою $\|f\|_q = (\int_K |f|^q d\sigma)^{1/q}$, $1 \le q < \infty$, $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in K} |f(x)|$.

Розглянемо задачу про n-поперечники за Колмогоровим, Гельфандом і лінійний n-поперечник класів $\mathfrak{h}$ і $\overline{\mathfrak{h}}$ у просторі L_q: $d_n(\mathfrak{H}; L_q) := \inf_{X_n}\ \sup_{f\in\mathfrak{H}}\ \inf_{g\in X_n}\ \|f - g\|_q$, $d^n(\mathfrak{H}; L_q) := \inf_{X^n}\ \sup_{f\in\mathfrak{H}\cap X^n}\ \|f\|_q$, $\delta_n(\mathfrak{H}; L_q) := \inf_{L_n}\ \sup_{f\in\mathfrak{H}}\ \|f - P_n(f)\|_q$, де $\mathfrak{H} = \mathfrak{h} \vee \overline{\mathfrak{h}}$, X_n — n-вимірний підпростір L_q, X^n — підпростір L_q ковимірності n і $P_n : L_q \to X_n$ — неперервний лінійний оператор, рангу n.

Нехай $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^\infty$ — послідовність точок в $\mathbb{I}$, серед яких можуть бути точки скінченної і навіть нескінченної кратності, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ – система функцій Такенаки–Мальмквіста (TM-система), породжена послідовністю $\mathbf{a}$:

$$\varphi_0(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_0|^2}}{1 - a_0 z}, \quad \varphi_k(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_k|^2}}{1 - a_k z} \cdot \underbrace{\prod_{j=0}^{k-1} \frac{-|a_j|}{a_j} \cdot \frac{z - a_j}{1 - a_j z}}_{=:B_k(z)},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Позначимо через B_n^* — мінімальний на компакті K добуток Бляшке степеня n, нулі якого лежать в $\mathbb{I}$, тобто добуток Бляшке, для якого $\|B_n^*\|_q = \min\{\|B_n\|_q : \{\operatorname{zeros} B_n\} \subset \mathbb{I}\}$ і нехай φ^* — відповідна цьому добутку TM-система.

Позначимо

$$\lambda_{k,n}(x) := \frac{1}{1 + |B_n^*(x)|^2}\left(1 - x\frac{1 - a_k^* x}{x - a_k^*}\left|\prod_{j=k}^{n-1} \frac{x - a_j^*}{1 - a_j^* x}\right|^2\right),\ \mu_{k,n}(x) := \frac{1 + |B_n^*(x)|^2}{1 - |B_n^*(x)|^2}\lambda_{k,n}(x),$$

$$\Phi_{k,n}(x) := \lambda_{k,n}(x)\varphi_k^*(x), \quad \Psi_{k,n}(x) := \mu_{k,n}(x)\varphi_k^*(x).$$

Теорема. *Нехай* $K \subset \mathbb{I}$, $1 \le q \le \infty$ *і* D_n *— будь-який з наведених вище поперечників. Тоді для кожного натурального* n

$$D_n(\mathfrak{h}; L_q) = \frac{4}{\pi}\left\|\operatorname{arctg} B_n^*\right\|_q \quad i \quad D_n(\overline{\mathfrak{h}}; L_q) = \frac{2}{\pi}\left\|\ln\frac{1 + B_n^*}{1 - B_n^*}\right\|_q.$$

При цьому:

1) *простори* $\operatorname{span}\{\Phi_{k,n}\}_{k=0}^{n-1}$ *і* $\operatorname{span}\{\Psi_{k,n}\}_{k=0}^{n-1}$ *є екстремальними підпросторами для поперечника* d_n *класів* $\mathfrak{h}$ *і* $\overline{\mathfrak{h}}$ *відповідно;*

2) $\mathfrak{H}^n := \{f \in \mathfrak{H} : \widehat{f}_k := \int_{\partial D} f(w)\overline{\varphi_k^*(w)}|dw|/2\pi = 0, k = \overline{0, n-1}\}$ *є оптимальним підпростором для поперечника* d^n *класу* $\mathfrak{H} = \mathfrak{h} \vee \overline{\mathfrak{h}}$*;*

3) $P_n(f) = -f(0)\Phi_{0,n} + 2\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}_k\Phi_{k,n}$ *і* $Q_n(f) = -f(0)\Psi_{0,n} + 2\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}_k\Psi_{k,n}$ *є оптимальними операторами для поперечника* δ_n *класів* $\mathfrak{h}$ *і* $\overline{\mathfrak{h}}$ *відповідно.*

Поперечник $D_n(\mathfrak{h}; L_q)$ був раніше обчислений К. Ю. Осіпенком [1].

1. Osipenko K. Y. Exact values of n-widths and optimal quadratures on classes of bounded analytic and harmonic functions. J. Approx. Theory, 1995, **82**, P. 156–175.

Аналитические функции обобщенного комплексного переменного и некоторые приложения

Б. Ж. Сагиндыков

Казахский Национальный Технический университет им. К.И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

sagindykov_b@kazntu.kz

Обобщенные комплексные числа делят на типы [1]. А именно, различают эллиптические, гиперболические и параболические числа. Пусть $z = x + py$ — обобщенное комплексное число и $p^2 = -\theta_0 + p\theta_1$, где θ_1,θ_0 — вещественные числа. Тогда числа делятся на указанные типы в зависимости от того, какими являются θ_1,θ_0. Если $D = \dfrac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 < 0$, то такие обобщенные комплексные числа относятся к эллиптическому типу, если же $D = \dfrac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 > 0$ — то к гиперболическому, если $D = \dfrac{\theta_1^2}{4} - \theta_0 = 0$ — параболическому типу.

В данной работе рассматривается теория аналитических функций $f(z) = u(x,y) + pv(x,y)$ обобщенного комплексного переменного $z = x + py$, удовлетворяющих системе уравнений Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \theta_1\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\theta_0\frac{\partial v}{\partial x},$$

которые по существу эквивалентны уравнению Лапласа

$$\Delta u = -\frac{1}{4D}\left(\theta_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \theta_1\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\Delta v = -\frac{1}{4D}\left(\theta_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \theta_1\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Далее рассматриваются некоторые приложения.

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973.
2. Сагиндыков Б. Ж. Эллиптическая система чисел и ее применение. Вестник КазНТУ. Алматы: июль, 2007, № 4, С. 165–172

Наилучшие односторонние приближения класса дифференцируемых функций полиномами в пространстве L_1

В. В. Седунова

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск, Украина

sdnva@ukr.net

Получено асимптотическое значение наилучшего одностороннего приближения функций класса W^1_∞ алгебраическими полиномами степени не выше n в метрике пространства L_1.

Основным результатом работы является асимптотическое равенство

$$E_n^{\pm}(W^1_\infty)_1 = \frac{\pi^2}{4n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

где W^1_∞ — класс абсолютно непрерывных на $[-1,1]$ функций, у которых $|f'(t)| \le 1$ почти всюду на $[-1,1]$;

$E_n^+(f)_1 = \inf_{u\in P_n}\{\|u(t)-f(t)\|_1; u(t)\ge f(t)\}$ — наилучшее одностороннее приближение функции f сверху алгебраическими полиномами степени не выше n;

$E_n^-(f)_1 = \inf_{u\in P_n}\{\|f(t)-u(t)\|_1; u(t)\le f(t)\}$ — соответственно, снизу;

$E_n^{\pm}(M)_1 = \sup_{f\in M}\{E_n^{\pm}(f)_1\}$ — наилучшее одностороннее приближение класса функций;

$\|f(\cdot)\|_1$ — норма в пространстве $L_1 = L_1[-1,1]$.

В работе использованы результаты, полученные в [2]. Автор благодарит В. П. Моторного за помощь в работе и критические замечания.

1. Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронін В. Г. Апроксимація з обмеженнями. — К.: 1982.
2. Моторный В. П., Моторная О. В. Теоремы сравнения для некоторых несимметричных классов функций. Вісник ДНУ, Серія: "Математика", 2006, № 11, С. 46–53.
3. Моторный В. П., Моторная О. В. Наилучшее приближение классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем. Тр. Мат. ин-та РАН, 1995, **210**, С. 171–188.
4. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. — М.: ФМ, 1949.
5. Сёге Г. Ортогональные многочлены. — М.: 1962.
6. Motornyi V. P., Pas'ko A. N. On the best one-sided approximation of some classes of differentiable functions in L_1. East journal on approximation, 2004, **10**, № 1–2, P. 159–169.

Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів нескінченно диференційовних функцій

А. С. Сердюк[1], Т. А. Степанюк[2]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

[2]Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

serdyuk@imath.kiev.ua, tania_stepaniuk@ukr.net

Нехай C — простір 2π–періодичних неперервних функцій з нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π–періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f(t)$, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|$; L_p, $1 \le p < \infty$, — простір 2π–періодичних сумовних в p-му степені на $[0, 2\pi)$ функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$.

Нехай, далі $L^\psi_{\beta,p}$ — клас 2π–періодичних функцій $f(x)$, котрі майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ представляються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt, \quad , \ a_0, \beta \in \mathbb{R}, \varphi \perp 1, \ \|\varphi\|_p \le 1, \ 1 \le p \le \infty,$$

де $\Psi_\beta(t) \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $\Psi_\beta(t) \in L_1$.

Через $\mathfrak{M}$ позначимо множину опуклих донизу, неперервних на $[1, \infty)$, спадних до нуля функцій ψ і кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики $\eta(t) = = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}$, де $\psi^{-1}(\cdot)$ — обернена до ψ функція. Згідно з [1, с. 160] покладемо $\mathfrak{M}^+_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \ \ \mu(\psi; t) \uparrow \infty, \ t \to \infty\}$.

Розглядається задача про знаходження точних за порядком оцінок величин

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f; \cdot)\|_X, \quad E_n(\mathfrak{N})_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot)\|_X,$$

де $S_{n-1}(t)$ — суми Фур'є порядку $n-1$, $\mathcal{T}_{2n-1}$ — підпростір усіх тригонометричних поліномів t_{n-1} порядку не вищого за $n-1$, у випадках:

1) $\mathfrak{N} = C^\psi_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, $X = C$;

2) $\mathfrak{N} = L^\psi_{\beta,1}$, $X = L_s$, $1 < s \le \infty$.

Теорема 1. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\lim\limits_{t \to \infty} (\eta(\psi, t) - t) = \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p < \infty$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$, *таких, що* $\eta(n) - n \ge a > 2$, $\mu(n) \ge b > 2$ *справедливі оцінки*

$$C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}} \le E_n\big(C^\psi_{\beta,p}\big)_C \le \mathcal{E}_n\Big(C^\psi_{\beta,p}\Big)_C \le C_{a,b} \ (2p)^{1-\frac{1}{p}} \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}},$$

де

$$C_a = \frac{\pi}{96\left(1+\pi^2\right)^2} \frac{(a-1)^2(a-2)^2}{a^3(3a-4)}, \ C_{a,b} = \frac{1}{\pi} \max\left\{ \frac{2b}{b-2} + \frac{1}{a}, \ 2\pi \right\}. \tag{1}$$

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, $\lim\limits_{t \to \infty} (\eta(\psi, t) - t) = \infty$, $1 < s \le \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для довільних* $n \in \mathbb{N}$, *таких, що* $\eta(n) - n \ge a > 2$, $\mu(n) \ge b > 2$, *справедливі оцінки*

$$C_a \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{s'}} \le E_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_{L_s} \le \mathcal{E}_n\big(L^\psi_{\beta,1}\big)_{L_s} \le C_{a,b} \left(2s'\right)^{\frac{1}{s}} \psi(n) \left(\eta(n) - n\right)^{\frac{1}{s'}},$$

де сталі C_a *і* $C_{a,b}$ *визначаються згідно з формулою* (1).

1. Степанец А. И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. I, 427 с.

О возмущении линейных самосопряженных операторов

А. Н. Сыровацкий

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина

asyrovatsky@gmail.com

Рассмотрим двумерное возмущение линейного оператора

$$B = A + c_1 < \cdot, \phi_1 > \phi_1 + c_2 < \cdot, \phi_2 > \phi_2, \qquad (1)$$

где $c_k \in \mathbb{R}, c_k \neq 0$ $(k = 1; 2)$, $\phi_1, \phi_2 \in H$, ϕ_1, ϕ_2 — неколлинеарные векторы, A — самосопряженный оператор, действующий в n-мерном пространстве H, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — его собственные значения, занумерованные по возрастанию $(\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n)$, $\alpha_k \neq \alpha_j$ $(k \neq j)$.

Решение прямой задачи.

Теорема 1. *Для того, чтобы собственные значения оператора B (1) перемежались с числами α_k $(k = \overline{1,n})$ необходимо и достаточно, чтобы числа m_1, m_2, ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$, η_1, $\eta_2, \ldots, \eta_n$ удовлетворяли одной из следующих систем неравенств:*

$$\begin{cases} m_1|\eta_1|^2 + m_2|\xi_1|^2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{\alpha_i - \alpha_1} < 0 \\ \ldots \\ m_1|\eta_n|^2 + m_2|\xi_n|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}}{\alpha_i - \alpha_n} < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1|\eta_1|^2 + m_2|\xi_1|^2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{\alpha_i - \alpha_1} > 0 \\ \ldots \\ m_1|\eta_n|^2 + m_2|\xi_n|^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}}{\alpha_i - \alpha_n} > 0, \end{cases}$$

где $\phi_1 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k h_k$, $\phi_2 = \sum_{k=1}^{n} \eta_k h_k$, $A h_k = \alpha_k h_k$, $a_{ik} = |\eta_k|^2 |\xi_i|^2 - \xi_k \bar{\eta}_k \bar{\xi}_i \eta_i$ $(k, i = \overline{1,n})$, $m_j = \frac{1}{c_j}$ $(j = 1; 2)$.

Решение обратной задачи.

Теорема 2. *Пусть даны два набора чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ и $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_n$ такие, что $\alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \alpha_n < \beta_n$ и $\alpha_1 < \tilde{\beta}_1 < \ldots < \alpha_n < \tilde{\beta}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — собственные значения положительного оператора A, действующего в конечномерном евклидовом пространстве H. Тогда существует оператор $B = A + c_1 < ., \phi_1 > \phi_1 + c_2 < ., \phi_2 > \phi_2$, $\phi_1, \phi_2 \in H$ (ϕ_1, ϕ_2 — неколлинеарные) такой, что числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ являются его собственными значениями, а числа $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_n$ являются собственными значениями оператора $B_\varepsilon = A + (1+\varepsilon) c_1 < ., \phi_1 > \phi_1 + (1+\varepsilon) c_2 < ., \phi_2 > \phi_2$, где ε, c_1 и c_2 и модули компонент векторов ϕ_1, ϕ_2 находятся неединственным образом из систем*

$$\begin{cases} \frac{1}{m_2}|\eta_k|^2 + \frac{1}{m_1}|\xi_k|^2 + \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{|\eta_i|^2 |\xi_k|^2 - \xi_i \bar{\eta}_i \bar{\xi}_k \eta_k}{\alpha_i - \alpha_k} = \delta_k \\ \ldots \end{cases},$$

$$\begin{cases} \frac{1+\varepsilon}{m_2}|\eta_k|^2 + \frac{1+\varepsilon}{m_1}|\xi_k|^2 + \frac{(1+\varepsilon)^2}{m_1 m_2} \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{|\eta_i|^2 |\xi_k|^2 - \xi_i \bar{\eta}_i \bar{\xi}_k \eta_k}{\alpha_i - \alpha_k} = \tilde{\delta}_k \\ \ldots \end{cases},$$

где $\delta_k, \tilde{\delta}_k$ — некоторые известные числа.

1. Löwner K. Über monotone Matrixfunctionen. Mathematische Zeitschrift, 1934, **38**, P. 177–216.
2. Сыровацкий А. Н. Об одномерном возмущении самосопряженных операторов с простым спектром. Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина, 2010, **922**, С. 20–31.

Функциональные модели коммутативных систем операторов в пространствах Л. де Бранжа

В. Н. Сыровацкий
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина
vsirovatsky@gmail.com

Пусть T_1, T_2 — коммутативная система линейных ограниченных операторов, действующая в гильбертовом пространстве H. И пусть задан коммутативный унитарный метрический узел

$$\triangle = (\Gamma, \sigma_s, \tau_s, N_s, H \oplus E, V_s, \overset{+}{V}_s, H \oplus \tilde{E}, \tilde{N}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\Gamma}), \tag{1}$$

где $E, \tilde{E}$ — совокупность гильбертовых пространств, а $\Phi \in [E, H]; \Psi \in [H, \tilde{E}]; K \in [E, \tilde{E}]$; $\sigma_s, \tau_s, N_s, \Gamma \in [E, E]; \tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{N}_s, \tilde{\Gamma} \in [\tilde{E}, \tilde{E}] (s = 1, 2)$ — операторы, действующие в этих пространствах. И пусть коммутативный узел такой, что $E = \tilde{E}, \mathrm{dim} E = 2$, а $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 = J_N$ инволюция.

И пусть $\mathcal{B}_\phi$ — отображение Л. де Бранжа $\mathcal{B}_\phi f = [F_1(z), F_2(z)]$, где

$$F_1(z) = \int_0^l f(t)\, dF_t L_t^*(\bar{z}); \quad F_2(z) = \int_0^l f(t)\, dF_t \tilde{L}_t^*(\bar{z}). \tag{2}$$

Гильбертово пространство образованное вектор функциями $[F_1(z), F_2(z)]$ назовём пространством Л. де Бранжа $\mathcal{B}(E, G)$, норма в котором индуцируется нормой прообраза отображения $\mathcal{B}_\phi$.

Теорема. *Пусть спектр оператора T_1 сосредоточен в точке $\{1\}$ и вектор (1,1) является собственным для $(N + z\Gamma)^{-1}$, т.е. существует функция $m(z)$ такая, что $(N + z\Gamma)^{-1}(1, 1) = \frac{1}{m(z)}(1, 1)$ и вектор (1,-1) является собственным для $\widetilde{N}^* + z\widetilde{\Gamma}^*$, т.е. существует функция $n(z)$ такая, что $(\widetilde{N}^* + z\widetilde{\Gamma}^*)(1, -1) = n(z)(1, -1)$.*
Тогда основная система коммутативных операторов $\{T_1, T_2\}$ узла $\triangle$ (1) унитарно эквивалентна системе операторов, которая действует в пространстве Л. де Бранжа $\mathcal{B}(E,G)$ следующим образом

$$T_1 F_1(z) = (z + \overline{\mu(\overline{z})}) F_1(z) + \nu(\overline{z}) F_2(z) + \frac{\overline{E_0(\overline{z})} - \overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{2} F_2(0),$$

$$T_1 F_2(z) = \frac{F_2(z) - F_2(0)}{z},$$

$$T_2 F_1(z) = \frac{F_1(z)}{m(z)} + \frac{\widetilde{\mu}(z)}{m(z)} F_1(z) + \frac{\widetilde{\nu}(z)}{m(z)} F_2(z),$$

$$T_2 F_2(z) = \frac{F_2(z) n(z) - F(0) n(0)}{z},$$

где $(F_1(z), F_2(z)) \in \mathcal{B}(E, G)$, а коэффициенты $\mu(z)$, $\nu(z)$, $\widetilde{\mu}(z)$ и $\widetilde{\nu}(z)$ выражаются через E, G, m, n.

1. Золотарёв В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов. — Харьков: ХНУ, 2003, 342 с.
2. Сыровацкий В. Н. Функциональные модели коммутативных систем операторов близких к унитарным. Вестник ХНУ им. В. Н. Каразина, 2012, **1018**, С. 41–61.

Наближення класів аналітичних періодичних функцій, що задаються за допомогою модулів неперервності, одним лінійним методом

І. В. Соколенко
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
sokol@imath.kiev.ua

Нехай C — простір неперервних 2π-періодичних функцій φ з нормою $\|\varphi\|_C = \max\limits_t |\varphi(t)|$ і нехай $C^\psi_\beta H_\omega$ — множина функцій $f \in C$, які зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi_\beta(t)dt, \quad \varphi \in H^0_\omega, \tag{1}$$

з сумовним ядром $\Psi_\beta(t) \sim \sum_{k=1}^\infty \psi(k)\cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, де $H^0_\omega = \{g \in C : |g(t) - g(t')| \le \omega(|t-t'|),\ \forall t, t' \in \mathbb{R}, g \perp 1\}$, $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності.

Через $\mathcal{D}_q$ позначимо множину послідовностей $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, що задовольняють умову д'Аламбера $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k+1)/\psi(k) = q$ при деякому $q \in (0,1)$. Якщо $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, то множини $C^\psi_\beta H_\omega$ складаються з 2π-періодичних функцій f, що допускають регулярне продовження в смугу комплексної площини $|\mathrm{Im} z| \le \ln(1/q)$ (див. [1, с. 35]).

Важливими прикладами ядер $\Psi_\beta(t)$, коефіцієнти $\psi(k)$ яких задовольняють умову д'Аламбера, є ядра Пуассона $P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^\infty q^k \cos(kt - \beta\pi/2)$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, ядра Неймана $N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^\infty q^k k^{-1}\cos(kt - \beta\pi/2)$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, та ін.

За допомогою системи чисел $\lambda^{(n)}_k = (\psi(k) - \psi(2n-k) - \psi(2n+k))\cos(\beta\pi/2)$ та $\nu^{(n)}_k = (\psi(k) - \psi(2n-k) + \psi(2n+k))\sin(\beta\pi/2)$, $k{=}1,\ldots,n{-}1$, кожній функції f з класу $C^\psi_\beta H_\omega$ поставимо у відповідність (див. [2]) тригонометричний поліном

$$U^*_{n-1}(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\lambda^{(n)}_k(a_k\cos kx + b_k \sin kx) + \nu^{(n)}_k(a_k \sin kx - b_k\cos kx)\Big),$$

де $a_k{=}a_k(\varphi), b_k{=}b_k(\varphi)$, $k \in \mathbb{N}$, — коефіцієнти Фур'є функції φ, пов'язаної з f рівністю (1).

Досліджується асимптотична при $n \to \infty$ поведінка величин

$$\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega; U^*_{n-1})_C = \sup_{f \in C^\psi_\beta H_\omega} \|f(x) - U^*_{n-1}(f;x)\|_C.$$

Теорема. *Нехай $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n \to \infty$*

$$\mathcal{E}(C^\psi_\beta H_\omega; U^*_{n-1})_C = \psi(n)\Bigg(\frac{2\theta_n(\omega)}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n}\right)\sin t dt + \frac{O(1)}{(1-q)^2}\left(\frac{q}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right) + \varepsilon_n\right)\Bigg),$$

де $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\ge n}|\psi(k+1)/\psi(k) - q|$, $2/3 \le \theta_n(\omega) \le 1$, причому $\theta_n(\omega) = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх параметрів.

1. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наук. думка, 1987, 268 с.
2. Сердюк А. С. Про один лінійний метод наближення періодичних функцій. Збірник праць Інституту математики НАН України, 2004, **1**, № 1, С. 296–338.

Об асимптотике интегралов Эрмита и аппроксимаций Эрмита–Паде для системы функций Миттаг–Леффлера

А. П. Старовойтов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь

svoitov@gsu.by

Эрмит [1] ввел в рассмотрение интегралы

$$M(p) = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^\infty \left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1} e^{-x}dx,$$

$$M_j(p) = \frac{1}{(p-1)!}\int_j^\infty \left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1} e^{-x}dx, \qquad (1)$$

$$\varepsilon_j(p) = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^j \left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1} e^{-x}dx,$$

которые при некотором простом числе p дают удобное приближение к набору $\{e^j\}_{j=1}^r$:

$$e^j - \frac{M_j}{M} = \frac{\varepsilon_j}{M}, \quad j = 1, 2, ..., r. \qquad (2)$$

С помощью равенств (2) ему удалось найти достаточно простое доказательство трансцендентности числа e. Это доказательство опирается на элементарные свойства интегралов (1): $M(p)$ — целое отличное от нуля число, при достаточно больших простых p не делящееся на p; $M_j(p)$ — целые числа, кратные p; $\varepsilon_j(p)$ убывают к нулю при $p \to \infty$.

В [2] А.И. Аптекаревым была найдена асимптотика убывания $M(p)$ при $p \to \infty$. В данном сообщении с помощью метода Лапласа получены асимптотические равенства для интегралов Эрмита $M_j(p)$ и $\varepsilon_j(p)$ и их обобщений при $j = 1, 2, ..., r$. Это позволило, в частности, исследовать асимптотическое поведение аппроксимаций Эрмита–Паде для системы экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^r$ и системы функций Миттаг–Леффлера

$$F_\gamma^j(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} z^p, \ j = 1, 2, \dots, r\,.$$

Заметим, что сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде для системы экспонент доказана в [2]. Первый результат об асимптотике аппроксимаций Эрмита–Паде к набору из двух марковских функций получен В.А. Калягиным [3]. Главный член асимптотики, а также сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде для набора марковских функций были исследованы в фундаментальной работе А.А. Гончара и Е.А. Рахманова [4]. Полученные результаты дополняют исследования указанных авторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2011-2015 годы.

1. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. — М.: Наука, 1987.
2. Аптекарев А. И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент. Вестн. МГУ. Серия 1, Математика. Механика, 1981, № 1, С. 68–74.
3. Калягин В. А. Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности. Матем. сборник, 1979, **110** (**152**), № 4, С. 609–627.
4. Гончар А. А., Рахманов Е. А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы функций марковского типа. Тр. Мат. ин-та АН СССР., 1981, **157**, С. 31–48.

Найкраще наближення аналогів класів функцій Бєсова малої гладкості

С. А. Стасюк
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
stasyuk@imath.kiev.ua

Нехай L_q, $1 \le q < \infty$, — простір 2π-періодичних функцій f зі скінченною нормою

$$||f||_q = \left((2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^q\, dx\right)^{1/q}.$$

Для $r > 0$, $1 < p, q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, позначимо

$$\mathbf{B}_{p,\theta}^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+,r} := \left\{ f \in L_p : ||f||_{B_{p,\theta}^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+,r}} \le 1 \right\},$$

де

$$||f||_{B_{p,\theta}^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+,r}} := \left(\sum_{s=0}^{\infty} (2^{rs(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}(s+1)^r ||\delta_s(f)||_p)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

а

$$\delta_s(f) := \sum_{[2^{s-1}] \le k < 2^s} \widehat{f}(k) e^{ikx}, \quad \widehat{f}(k) := (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad a_+ := \max\{a; 0\}.$$

Класи $\mathbf{B}_{p,\theta}^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+,r}$ є аналогами класів функцій Бєсова малої гладкості.

Нехай $t_m(x) := \sum\limits_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}$, де c_k — довільні числа. Для $F \subset L_q$ покладемо

$$E_m(F)_q := \sup_{f \in F} \inf_{t_m} ||f - t_m||_q$$

— найкраще наближення функціонального класу F тригонометричними поліномами t_m.

Має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta \le q$, $r > 0$, *тоді*

$$E_m(\mathbf{B}_{p,\theta}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q},r})_q \asymp (\log_2 m)^{-r}.$$

О некоторых свойствах сплайнов и всплесков

Н. А. Стрелков
Ярославский государственный университет, Ярославль, Россия
strelkov@uniyar.ac.ru

1. *Неравенства с точными константами для сплайнов.* Рассмотрены вопросы, связанные с установлением шкалы неравенств с точными константами для интерполяционных сплайнов произвольного порядка. Получены интегральные представления как самих сплайнов, так и их погрешностей; на основании этих представлений приведены равномерные оценки для случаев, когда аппроксимируются функции, принадлежащие классам Соболева (или их дискретным аналогам). Часть из полученных оценок описывает суперсходимость производных в некоторых точках. Для установления точных оценок применяется единый подход, связанный, по сути дела, с вычислением различных норм некоторого интегрального оператора с довольно экзотическим ядром. Привлекательность такого подхода состоит, по нашему мнению, в том, что по сути дела стирается различие между сплайнами с краевыми условиями разных типов и отпадает необходимость (как это обычно делается) отдельно исследовать каждый из этих типов. По-видимому, с помощью методов, подобных описанному, удастся справиться и с другими, более сложными проблемами.

2. *Базисы из функций-всплесков, порождаемые сплайнами.* Исследованы возможности кратномасштабного анализа базисов из функций–всплесков для произвольной масштабирующей функции (в частности, для B-сплайнов). Основные из результатов этой группы: a) общая теорема, описывающая необходимые и достаточные условия для осуществления кратномасштабного анализа в случае произвольной масштабирующей функции; b) переформулировка этой теоремы для пространств Соболева в случае, когда масштабирующая функция является B-сплайном; c) полное описание семейства базисов из функций–всплесков, порождаемых этой масштабирующей функцией; d) конструктивное построение безусловных базисов из функций-всплесков с минимальной мерой носителей.

3. *Фреймы и базисы, связанные с оконным преобразованием Фурье.* Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — две решетки в $\mathbb{R}^n$, $\{\varphi_{a,b}\}_{a\in\mathbb{A},b\in\mathbb{B}}$ — система функций $\varphi_{a,b}(x) = e^{i(a,x)}\varphi(x-b)$, где $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Выясняется вопрос о том, когда эта система образует фрейм (в том числе жесткий) или базис (в том числе ортонормированный) в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Приведены соответствующие критерии в терминах геометрических свойств тройки $\{\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{B}\}$, где Ω — носитель φ (укладки, покрытия, замощения и т.п.).

4. *Построение оптимальных кубатур с помощью всплесков.* Рассматриваются некоторые подходы к построению кубатурных формул, основанные на аппроксимации с помощью решетчатых сдвигов аргумента фиксированной функции.

Наилучшие приближения и интегральные преобразования типа свертки в пространствах Банаха

М. Ф. Тиман, О. Б. Шаврова

Днепропетровский государственный аграрный университет, Днепропетровск, Украина

mtiman@yandex.ru, _oxana13_@mail.ru

Хорошо известно, что в любом Банаховом пространстве X, можно указать некоторую замкнутую линейно независимую систему его элементов $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, с помощью которой для каждого элемента $x \in X$ при любом натуральном n рассмотреть величину

$$E_n(x)_X = \inf_{\lambda_k} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|_X ,$$

$\{\lambda_k\}$ — действительные числа, называемую наилучшим приближением порядка n элемента x в метрике пространства X.

В связи с известной теоремой Бернштейна–Никольского элемент $x \in X$ порождает монотонно убывающую к нулю последовательность чисел $a_n = E_n(x)_X$, которая его полностью определяет.

Для функциональных пространств Банаха, кроме, так называемых, конструктивных характеристик его элементов — $E_n(x)_X$, как известно, важно, определять их структурные характеристики.

Как указал Шапиро, многие структурные характеристики функций $f(x)$ из некоторых функциональных пространств Банаха можно определить с помощью интегральных преобразований типа свертки

$$F(f;\sigma;x;h) = \int\limits_{\infty}^{\infty} f(x-hu)d\sigma(u), \tag{1}$$

где $f(x) \in X$, σ — некоторая функция ограниченной вариации, не равная тождественно нулю на всей действительной оси.

В докладе приводится обзор результатов, относящихся к пространствам X, в которых отражены оценки указанных преобразований (1), с помощью наилучших приближений функций в метриках соответствующих функциональных пространств X: в частности, рассматриваются известные пространства периодических функций L_p, S^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, как одной, так и многих переменных. Результаты такого рода приведены также для пространств H_p.

Полученные результаты для указанных выше $\sigma(u)$, в общем случае, содержат в себе многие известные ранее прямые и обратные теоремы конструктивной теории функций.

Апроксимативні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних із заданою мажорантою мішаних модулів неперервності

О. В. Федуник–Яремчук

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

fedunyk@ukr.net

Досліджуються класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, які введені в [1] і є аналогами відомих класів Бєсова. Нехай $\Omega(t)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду

$$\Omega(t) = \Omega(t_1,...,t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^r}{\left(\log\frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0, \ j = \overline{1,d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Розглядаються логарифми за основою 2, крім того $\left(\log\frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\left\{1, \log\frac{1}{t_j}\right\}$. Вважаємо також, що $b_j < r, j = \overline{1,d}$, і $0 < r < l$.

Нехай $L_q(\pi_d)$ — простір 2π–періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1,\dots,x_d)$ зі стандартною нормою. Одержано точні за порядком оцінки величин, які визначаються наступним чином

$$d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) = \inf_{G\in L_M(B)_q} \sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}\cap D(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q .$$

Через $L_M(B)_q$ позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься у підпросторі розмірності M простору $L_q(\pi_d)$;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, виконується нерівність $\left\| G e^{i(k,\cdot)} \right\|_2 \leq B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M.

Сформулюємо один із результатів.

Теорема. *Нехай* $1 \leq \theta < \infty$, *а* $\Omega(t)$ *задається формулою* (1). *Тоді при* $0 < r < l$ *має місце порядкова рівність*

$$d_M^B(B_{1,\theta}^{\Omega}, L_1) \asymp M^{-r} \big(\log M \big)^{-b_1 - \ldots - b_d + (d-1)\left(r + 1 - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Цей результат для класів $B_{1,\theta}^r$ одержаний А. С. Романюком [2], а для класів H_1^{Ω} (класи $B_{1,\infty}^{\Omega}$) — М. М. Пустовойтовим [3].

Знайдено також точні за порядком оцінки величин (1) при деяких інших значеннях параметрів p та q.

1. Sun Yongsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1997, **219**, С. 356– 77.
2. Романюк А. С. Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных. Мат. сб., 2008, **199**, № 2, С. 93–114.
3. Пустовойтов Н. Н. Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители. Anal. Math., 2008, **34**, С. 187–224.

Теореми вкладення для множин $L^{\psi} L^{p(\cdot)}$

С. О. Чайченко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна

stolch@mail.ru

Нехай $p = p(x)$ — 2π-періодична вимірна і істотно обмежена функція. Через $L^{p(\cdot)}$ позначають простори вимірних 2π-періодичних функцій f таких, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty$.

Якщо $\operatorname{ess\,inf}\limits_x |p(x)| > 1$ і $\bar{p} := \operatorname{ess\,sup}\limits_x |p(x)| < \infty$, то $L^{p(\cdot)}$ є банаховими просторами [1] з нормою, яка може бути задана формулою

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf \left\{ \alpha > 0 : \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Позначимо через $\mathcal{P}^{\gamma}$ множину 2π-періодичних показників $p = p(x) > 1,\ \bar{p} < \infty$, які на періоді задовольняють умову Діні–Ліпшиця порядку $\gamma \geq 1$:

$$\sup_{x_1, x_2 \in [-\pi; \pi]} \Big\{ |p(x_1) - p(x_2)| : \quad |x_1 - x_2| \leq \delta \Big\} \left(\ln \frac{1}{\delta} \right)^{\gamma} \leq K, \quad 0 < \delta < 1.$$

Нехай L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x)$$

— ряд Фур'є функції f. Нехай, далі, $\psi(k) = (\psi_1; \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Якщо ряд

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\psi_1(k)A_k(f,x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(f,x)\Big),$$

де A_0 — деяке число і $\tilde{A}_k(f,x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$ є рядом Фур'є деякої функції $F \in L$, то функцію F, наслідуючи О. І. Степанця [2, с. 149], називають ψ-інтегралом функції f. Через $L^{\psi}L^{p(\cdot)}$ позначимо класи ψ-інтегралів функцій $f \in L^{p(\cdot)}$.

Кажуть, що пара $\psi = (\psi_1; \psi_2)$ систем чисел $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$ належить множині Υ_α, $\alpha \geq 0$, якщо величини

$$\nu_\alpha(\psi_i) := \sup_{k\in\mathbb{N}} |\psi_i(k)|k^\alpha, \quad \sigma_\alpha(\psi_i) := \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{2^m}^{2^{m+1}} |\psi_i(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_i(k)k^\alpha|, \quad i = 1, 2,$$

є скінченними.

Теорема 1. *Якщо $\psi \in \Upsilon_0$ і $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$, $s(x) \leq p(x)$, то $L^{\psi}L^{p(\cdot)} \subset L^{s(\cdot)}$.*

Теорема 2. *Нехай $p, s \in \mathcal{P}^\gamma$, $p(x) \leq s(x)$ і $\psi \in \Upsilon_\alpha$, де $\alpha = 1/\underline{p} - 1/\overline{s}$. Тоді $L^{\psi}L^{p(\cdot)} \subset L^{s(\cdot)}$.*

1. Шарапудинов И. И. О топологии пространства $L^{p(x)}([0;1])$. Мат. заметки, 1979, **26,** № 4, С. 613– 32.
2. Степанец А. И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002, Ч. I, 427 с.

Перестановки функций, удовлетворяющих обратным неравенствам Гельдера и Йенсена

Р. В. Шанин

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса, Украина

ruslanshanin@gmail.com

Средним порядка $r \neq 0$ неотрицательной функции f на ограниченном измеримом множестве E будем называть

$$\mathcal{M}_r f(E) \equiv \left(\frac{1}{|E|}\int_E f^r(x)dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

где $|E|$ — мера Лебега множества E, $\mathcal{M}f(E) \equiv \mathcal{M}_1 f(E)$.

Пусть $r < s$, $rs \neq 0$, интервал $I_0 \subseteq \mathbb{R}$. Через $\mathcal{RH}_{r,s}(I_0)$ обозначим класс функций $f \in L^s_{loc} \cap L^r_{loc}$, удовлетворяющих обратному неравенству Гельдера

$$H_{r,s}(f, I_0) = H_{r,s}(f) \equiv \sup_{I\subset I_0}(\mathcal{M}_s f(I) - \mathcal{M}_r f(I)) < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем ограниченным интервалам $I \subset I_0$.

Пусть Φ — класс всех непрерывных, выпуклых вниз на $(0,+\infty)$, неотрицательных функций. Для $\varphi \in \Phi$ будем считать, что $\varphi(0)=\varphi(0+)$ (равное, быть может, $+\infty$). Пусть $\varphi \in \Phi$ и измеримое множество $E \subset \mathbb{R}$. Через $\varphi_L(E)$ будем обозначать класс всех таких неотрицательных, локально суммируемых на E функций f, что $\varphi(f) \in L_{loc}(E)$.

Через $\mathcal{RJ}_\varphi(I_0)$ обозначим класс функций $f \in \varphi_L(I_0)$, удовлетворяющих обратному неравенству Йенсена

$$J_\varphi(f) \equiv \sup_{I\subset I_0}\{\mathcal{M}\varphi(f)(I) - \varphi(\mathcal{M}f(I))\} < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем интервалам $I \subset I_0$ для которых $\mathcal{M}f(I) > 0$. Если $\varphi(t)=t^p$ при $p>1$ или $p<0$, то обозначим $\mathcal{RJ}_p(I_0) \equiv \mathcal{RJ}_\varphi(I_0)$, $J_p(f) \equiv J_\varphi(f)$. При $p>1$ класс $\mathcal{RJ}_p$ изучался в работе [1] и было установлено, что $f \in \mathcal{RJ}_p(I_0)$ тогда и только тогда, когда $f^{\frac{p}{2}} \in BMO(I_0)$.

Для функции f через f^* обозначается ее невозрастающая перестановка, через f_* — неубывающая перестановка.

В нашей работе изучаются оценки для перестановок функций из классов $\mathcal{RJ}_\varphi(I_0)$, $\mathcal{RH}_{r,s}(I_0)$. Были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \Phi$, I_0 – интервал и $f \in \mathcal{RJ}_\varphi(I_0)$. Тогда $J_\varphi(f^*) \le J_\varphi(f)$ и $J_\varphi(f_*) \le J_\varphi(f)$.*

Теорема 2. *Пусть $r<s$, $rs \ne 0$, I_0 — интервал. Если $f \in \mathcal{RH}_{r,s}(I_0)$, то $H_{r,s}(f^*) \le H_{r,s}(f)$ и $H_{r,s}(f_*) \le H_{r,s}(f)$.*

1. Fiorenza A. BMO regularity for one-dimensional minimizers of some Lagrange problems. Journal of Convex Analysis, 1997, **4**, № 2, P. 289–303.
2. Кореновский А. А. О точном продолжении обратного неравенства Гельдера и условия Макенхаупта. Мат. заметки, 1992, **52**, № 6, С. 32–44.

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ С ВЕСОМ

А. В. Швачко[1], С. Б. Вакарчук[2]

[1]Днепропетровский государственный аграрный университет, Днепропетровск, Украина

[2]Университет имени Альфреда Нобеля, Днепропетровск, Украина

Annuchka-nuta@mail.ru, sbvakarchuk@mail.ru

Пусть $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$, $\rho(x) := \exp(-x^2)$, есть множество вещественных функций f, определенных на оси $\mathbb{R}$, для которых функции $\rho^{1/2} f$ суммируемы с квадратом на $\mathbb{R}$. Полагаем

$$\mathfrak{T}(x,y;h) := \frac{1}{\sqrt{\pi(1-h^2)}}\ \exp\left(\frac{2xyh-(x^2+y^2)h^2}{1-h^2}\right), \quad h \in (0,1)\ .$$

Для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ запишем оператор усреднения

$$F_{h,\rho}(f,x) := \int\limits_{\mathbb{R}} \rho(t) f(t) \mathfrak{T}(x,t;1-h) dt\ ,$$

полагая при этом $F^0_{h,\rho} := f$; $\quad F^1_{h,\rho}(f) := F_{h,\rho}(f)$; $\quad F^i_{h,\rho}(f) := F^1_{h,\rho}\left(F^{i-1}_{h,\rho}(f)\right)$, где $i = 2, 3, \ldots$. С помощью данного оператора введем обобщенный модуль непрерывности k-го порядка для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$:

$$\widetilde{\omega}_{k,\rho}(f,t) := \sup\left\{\|\Delta^k_{h,\rho}(f)\|_{2,\rho} : 0 < h \leqslant t\right\}, \quad t \in (0,1),\ k \in \mathbb{N},$$

где

$$\Delta^k_{h,\rho}(f,x) := \left(F^1_{h,\rho} - \mathbb{I}_\rho\right)^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F^i_{h,\rho}(f,x)\ ,$$

$\mathbb{I}_\rho$ — единичный оператор, действующий в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Обозначим через D дифференциальный оператор следующего вида:

$$D := \frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx}\ , \quad D^1 := D\ .$$

Для $r = 2, 3, \ldots$ полагаем $D^r(f) := D^1(D^{r-1}(f))$. Символом $L^r_{2,\rho}(D)$, где $r \in \mathbb{N}$, обозначим множество функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и $D^r(f) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Через $E_n(f)_{2,\rho}$, где $n \in \mathbb{N}$, обозначим величину наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$, состоящим из алгебраических полиномов степени, не превосходящей $n-1$, т. е.

$$E_n(f)_{2,\rho} := \inf\{\|f - P_{n-1}\|_{2,\rho} : P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}.$$

Теорема. *Пусть $n, k \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $\ 0 < p \leqslant 2$; $0 < h < 1$; $\ \varphi$ — неотрицательная измеримая суммируемая на $\mathbb{R}$ функция, которая не эквивалентна нулю. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}) \\ f \not\equiv const}} \frac{n^r E_n(f)_{2,\rho}}{\left\{\int\limits_0^h \widetilde{\omega}^p_{k,\rho}(D^r(f),t)\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} = 2^{-r}\left\{\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{kp}\varphi(t)dt\right\}^{-1/p},$$

где $L^0_{2,\rho}(\mathbb{R}) := L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, $D^0(f) := f$.

Зважені DT-модулі гладкості

І. О. Шевчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

shevchuk@univ.kiev.ua

Доповідається спільне дослідження K. Kopotun (Department of Mathematics, University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, R3T 2N2, Canada), D. Leviatan (Raymond and Beverly Sackler School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv 69978, Israel) та автора.

Вводиться означення зваженого модуля гладкості для функцій $f \in L_p[-1,1] \cap C^{r-1}(-1,1)$, $r \geq 1$, що мають $(r-1)$-у абсолютно неперервну похідну в $(-1,1)$ і таких, що $\varphi^r f^{(r)} \in L_p[-1,1]$, де $\varphi(x) = (1-x^2)^{1/2}$. Для $r = 0$ ці модулі еквівалентні модулям гладкості Дітзіана–Тотіка. Наша конструкція дозволяє, скажімо, отримати оцінки формозберігаючого наближення високого порядку точності, на відміну від DT-модулів гладкості, які, як відомо, не можуть забезпечити порядок формозберігаючого наближення вище 3. Для наближення многочленами отримано повний аналог конструктивної характеристики наближення тригонометричними поліномами.

Апроксимативні характеристики деяких класів функцій багатьох змінних

А. Л. Шидліч
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
andy709@list.ru

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$, — d-вимірний простір з елементами $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d)$, і $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1\leq p<\infty$, $\mathbb{T}^d=\prod_{j=1}^{d}[-\pi,\pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(\mathbf{x})$ зі стандартною нормою $||f||_{L_p(\mathbb{T}^d)}$. Покладемо $(\mathbf{k},\mathbf{x}):=\sum_{j=1}^d k_jx_j$ і $\widehat{f}(\mathbf{k}):=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d}f(\mathbf{x})e^{-i(\mathbf{k},\mathbf{x})}d\mathbf{x}$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$.

Через l_p^d, $0<p\leq\infty$, позначимо простір всіх елементів $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, для яких є скінченною l_p-норма (квазі-норма)

$$|\mathbf{x}|_p:=||\mathbf{x}||_{l_p}=\begin{cases}\big(\sum_{k=1}^d|x_k|^p\big)^{1/p}, & p\in(0,\infty),\\ \sup_{1\leq i\leq d}|x_i|, & p=\infty.\end{cases}$$

Нехай, далі, $\psi=\psi(t)$, $t\geq 1$, — довільна додатна спадна функція, $\psi(0):=\psi(1)$ і $0<q,r\leq\infty$.

Вивчається асимптотична поведінка деяких важливих апроксимативних величин класів функцій багатьох змінних

$$\mathcal{F}^\psi_{q,r}:=\big\{f\in L_1(\mathbb{T}^d)\ :\ \ ||\{|\widehat{f}(\mathbf{k})|/\psi(|\mathbf{k}|_r)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}||_{l_q(\mathbb{Z}^d)}\leq 1\big\}.$$

Одним із отриманих результатів є наступне твердження.

Теорема. *Нехай $1\leq r\leq\infty$, $1\leq p<\infty$, $0<q<\infty$, ψ — довільна додатна спадна до нуля функція, для якої $\psi(t)/\psi(2t)\leq K_1$, $t\geq 1$, і яка при $0<p/(p-1)<q$, крім цього, є опуклою вниз і задовольняє умову*

$$\frac{t|\psi'(t)|}{\psi(t)}\geq K_2>\begin{cases}d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}), & 1<p\leq 2,\\ d(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}), & 2\leq p<\infty,\end{cases}\quad,\quad \psi'(t):=\psi'(t+).$$

Тоді

$$e_n^\perp(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{L_p(\mathbb{T}^d)}:=\sup_{f\in\mathcal{F}^\psi_{q,r}}\inf_{\gamma_n}\Big\|f(\cdot)-\sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n}\widehat{f}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\cdot)}\Big\|_{L_p(\mathbb{T}^d)}\asymp\begin{cases}\frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}, & 1\leq p\leq 2,\\ \frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1}}, & 2\leq p<\infty,\end{cases}$$

де γ_n — довільний набір із n різних елементів з множини $\mathbb{Z}^d$,

$$D_n^\perp(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{L_p(\mathbb{T}^d)}:=\inf_{\gamma_n}\sup_{f\in\mathcal{F}^\psi_{q,r}}||f(\cdot)-\sum_{\mathbf{k}\in\gamma_n}\widehat{f}(\mathbf{k})e^{i(\mathbf{k},\cdot)}||_{L_p(\mathbb{T}^d)}\asymp\begin{cases}\psi(n^{\frac{1}{d}}), & 1\leq p<\infty,\ 0<q\leq\frac{p}{p-1},\\ \frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}}, & 1<p<2,\ \frac{p}{p-1}<q<\infty,\\ \frac{\psi(n^{\frac{1}{d}})}{n^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1}}, & 2\leq p<\infty,\ \frac{p}{p-1}<q<\infty.\end{cases}$$

Зазначимо, що величину $e_n^\perp(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{L_p(\mathbb{T}^d)}$ називають найкращим n-членним ортогональним тригонометричним наближенням класу $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$ в просторі $L_p(\mathbb{T}^d)$, а величину $D_n^\perp(\mathcal{F}^\psi_{q,r})_{L_p(\mathbb{T}^d)}$ — ортопроекційним тригонометричним поперечником порядку n класу $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$ в просторі $L_p(\mathbb{T}^d)$.

Зазначимо також, що апроксимативні характеристики в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ класів $\mathcal{F}^\psi_{q,r}$ для деяких $r\in(0,\infty]$ і деяких функцій ψ досліджувались також у роботах В. М. Темлякова, Р. Де Вора, О. І. Степанця, Р. С. Лі, Ю. П. Лю та ін.

Оценки погрешностей приближения функций из классов L_p^1 $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ полиномами и частными суммами по системам Хаара и Фабера–Шаудера

А. Н. Щитов

Академия таможенной службы Украины, Днепропетровск, Украина

an_shchitov@rambler.ru

Постоянный интерес к изучению различных аспектов, связанных с системами Хаара и Фабера–Шаудера, объясняется рядом причин и в первую очередь тем, что они являются базисами в некоторых пространствах. Исследованием их аппроксимативных свойств занимались П. Л. Ульянов, Б. И. Голубов, В. А. Скворцов, З. Чисельский и многие другие. Например, в работах З. Чисельского, В. А. Матвеева, А. С. Логинова были получены оценки сверху погрешностей приближения непрерывных на $[0,1]$ функций f частными суммами рядов Фабера–Шаудера $\overline{S}_n(f)$ в равномерной метрике, выраженные через модули непрерывности первого и второго порядков.

Данное сообщение продолжает исследования авторов [1]-[2] и посвящено получению оценок погрешностей приближения функций $f \in L_p^1$ полиномами по системе Хаара и частными суммами рядов Фабера–Шаудера, выраженные через нормы первых производных $\|f^{(1)}\|_{L_p}$ и $\|f^{(1)} - \overline{S}_n^{(1)}(f)\|_{L_p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и являющиеся неулучшаемыми для некоторых n. Приведем некоторые из полученных результатов.

Обозначим через L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ пространство измеримых и суммируемых с p-ой степенью на отрезке $[0,1]$ функций f, для которых $\|f\|_{L_p} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p \mathrm{d}x \right\}^{1/p} < \infty$. Под L_p^1 $(1 \leqslant p < \infty)$ понимаем множество абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций f таких, что $f^{(1)} \in L_p$.

Теорема. *Если $1 \leqslant p < \infty$, то для любых $n = 2^m + k, k = \overline{1, 2^m}; m \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства*

$$\sup_{\substack{f \in L_p^1 \\ f \not\equiv \mathrm{const}}} \frac{\|f - \overline{S}_n(f)\|_{L_p}}{\left\{ \int\limits_0^{k2^{-m}} \left| f^{(1)}(x) - \overline{S}_n^{(1)}(f,x) \right|^p \mathrm{d}x + 2^p \int\limits_{k2^{-m}}^{1} \left| f^{(1)}(x) - \overline{S}_n^{(1)}(f,x) \right|^p \mathrm{d}x \right\}^{1/p}} = \frac{1}{2^{m+2}} \varkappa_p,$$

где $\varkappa_p \overset{\mathrm{df}}{=} \{1,$ *если* $p = 1, \dfrac{p}{\pi\,(p-1)^{1/p}} \sin\dfrac{\pi}{p},$ *если* $1 < p < \infty\}$.

Следствие. *Для любой функции $f \in L_p^1$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и произвольного числа $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ справедливо неравенство*

$$\left\| f - \overline{S}_n(f) \right\|_{L_p} \leqslant \frac{1}{2n'} \varkappa_p \left\| f^{(1)} - \overline{S}_n^{(1)}(f) \right\|_{L_p},$$

где $n' \overset{\mathrm{df}}{=} \{2^m,$ *если* $n = 2^m + k$ $\left(m \in \mathbb{N}; k = \overline{1, 2^m - 1}\right), 2^{m+1},$ *если* $n = 2^{m+1}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)\}$, *которое является неулучшаемым для* $n = 2^{m+1}$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$.

1. Вакарчук С. Б., Щитов А. Н. Равномерное приближение некоторых классов функций нескольких переменных полиномами по системе Хаара и частными суммами рядов Фурье–Хаара. Сборник трудов Ин-та матем. НАН Украины, 2004, **1**, № 1, С. 42–59.
2. Вакарчук С. Б., Щитов А. Н. Оценки погрешности приближения классов дифференцируемых функций частными суммами рядов Фабера–Шаудера. Мат. сб., 2006, **197**, № 3, С. 3–14.

Апроксимативні характеристики класів функцій типу Нікольського–Бєсова

С. Я. Янченко
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Sergiy.Yan@rambler.ru

У доповіді мова буде йти про точні за порядком оцінки наближення класів $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ функцій багатьох змінних. Дані класи були розглянуті Т. І. Амановим [1], при значенні параметра $\theta = \infty$ вони співпадають з класами $S^{\boldsymbol{r}}_{p}H(\mathbb{R}^d)$, які вперше були розглянуті С. М. Нікольським [2]. В якості апарату наближення використовуються цілі функції експоненціального типу.

Нехай $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — простір вимірних функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ визначених на $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, зі стандартною скінченною нормою.

Розглянемо вектор $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1,d}$. Для $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$, позначимо

$$Q^*_{2^s} := \big\{\lambda \in \mathbb{R}^d : \ \eta(s_j)2^{s_j - 1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d}\big\}, \text{де } \eta(0) = 0 \ \text{ и } \ \eta(t) = 1, \ t > 0.$$

Далі для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, покладемо

$$S_{Q^{\gamma}_n}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant n} \delta^*_s(f, \boldsymbol{x}), \tag{1}$$

$$S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \Theta} \delta^*_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}), \tag{2}$$

де $\delta^*_s(f, \boldsymbol{x}) = \mathfrak{F}^{-1}(\chi_{Q_{2^s}} \cdot \mathfrak{F}f)$, $\mathfrak{F}f$ и $\mathfrak{F}^{-1}f$ — відповідно пряме й обернене перетворення Фур'є функції f, а $\chi_{Q^*_{2^s}}$ — характеристична функція множини $Q^*_{2^s}$. Рівності (1) та (2) визначають цілі функції $S_{Q^{\gamma}_n}(f, \boldsymbol{x})$, $S_{\mathfrak{M}}(f, \boldsymbol{x})$, які належать простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ [3], носій перетворення Фур'є яких зосереджений, відповідно, на множині $Q^{\gamma}_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}) \leqslant n} Q^*_{2^s}$, яка називається «східчастим гіперболічним хрестом» і при цьому mes $Q^{\gamma}_n \asymp 2^n n^{d-1}$, а також $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Theta) = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \Theta} Q^*_{2^{\boldsymbol{s}}}$, де Θ — деяка множина в $\mathbb{Z}^d_+$.

Розглянемо такі апроксимативні характеристики:

$$\mathcal{E}_{Q^{\gamma}_n}\big(f\big)_{\infty} = \|f(\cdot) - S_{Q^{\gamma}_n}(f, \cdot)\|_{\infty},$$
$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(f\big)_q = \inf_{\Theta : \, \mathrm{mes}\, \mathfrak{M} \leqslant M} \|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f, \cdot)\|_q .$$

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді має місце порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{Q^{\gamma}_n}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\big)_{\infty} = \sup_{f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} \|f(\cdot) - S_{Q^{\gamma}_n}(f, \cdot)\|_{\infty} \asymp 2^{-n\left(r_1 - \frac{1}{p}\right)} n^{(\nu-1)\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)}.$$

Теорема 2. *Нехай* $1 < p < \infty$, $r_1 > \frac{1}{p}$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тоді має місце оцінка*

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B\big)_{\infty} = \sup_{f \in S^{r}_{p,\theta}B} e^{\mathfrak{F}}_M\big(f\big)_q \asymp \big(M^{-1} \log^{\nu-1} M\big)^{r_1 - \frac{1}{p}} \big(\log^{\nu-1} M\big)^{1 - \frac{1}{\theta}}.$$

1. Аманов Т.И. Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi, \ j = 1, ..., n)$. Тр. Мат. ин-та АН СССР., 1965, **77**, С. 5–34.
2. Никольский С.М. Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера. Сиб. мат. журн., 1963, **4**, №6, С. 1342–1364.
3. Лизоркин П.И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций. Тр. Мат. ин-та АН СССР., 1969, **105**, С. 89–167.

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ
MATHEMATICAL PROBLEMS of MECHANICS

Some Exact Solvable Model Systems in Statistical mechanics

N. N. Bogolubov (Jr.)
Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, Russia

Modeling of acoustically-suspended solutions

M. Chernova
Bogomolets National Medical University, Kiev, Ukraine
maria@aquarelle.biz.ua

Producing the amorphous-state pharmaceuticals from solutions is not trivial task, especially, when the solutions evaporate remaining in contact with a container. In the contact case, the medical agent will most likely possess a crystalline form. To avoid the contact, the acoustic levitation technique [1,2] which was originally developed for NASA to simulate microgravity conditions can be employed. This work is devoted to modeling the liquid solutions in an acoustical levitator. Two cases are considered.

When the external acoustic field has the wave length which is much larger than the drop diameter, namely, when there is no an acoustic radiation pressure affect on the static spherical drop shape and a flattening caused by the fields does not occur, one can assume that the drop dynamics is primary determined by the surface tension as if the drop levitates in zero-gravity conditions. For this (first) case, we generalize the Lukovsky–Miles multimodal method for the corresponding free-surface problem, derive general (fully-nonlinear) and asymptotic (weakly-nonlinear) modal equations [3,4]. The asymptotic modal equations describe axisymmetric drop oscillations. Using these equations, we also derive a finite-dimensional approximate nonlinear system modeling the almost-periodic drop motions with the frequency close to the lowest natural frequency. Periodic solutions of this system are compared with the corresponding experimental data [5] as well as numerical results of other authors. A good agreement is shown.

When the acoustic wave length is comparable with the drop diameter, the levitating liquid drop may dramatically change its shape. Qualitatively, such a modification of the time-averaged liquid shape looks similar to that occurring for a contained liquid in a tank vibrating with a high frequency [6-8]. These time-averaged shapes were called the acoustic-capillary equilibria. We generalize the theory of the acoustic-capillary equilibria for the case of an acoustically levitating drop. The theory includes the corresponding Lagrange formalism. A series of theorems are proved. The main result is a quasi-potential energy minimum principle which, according to our theory, follows from the averaged Lagrange principle. Employing the quasi-potential energy minimum principle as a variational formulation of the problem, illustrative examples are solved demonstrating how the acoustic-capillary drop equilibria change their shapes within the input physical parameters.

1. R. Eberhardt, B. Neidhart. Acoustic levitation device for sample pretreatment in microanalysis and trace analysis. Fresenius' Journal of Analytical Chemistry. 1999, 365, 475–479.
2. E.H. Brandt. Suspended by sound. Nature, 2001, 413, 474–475.
3. M.O. Chernova, I.A. Lukovsky, A.N. Timokha. Generalizing the multimodal method for the levitating drop dynamics. ISRN Mathematical Physics, 2012, 2012, Article ID 869070, 1–19.

4. M.O. Chernova, I.O. Lukovsky. Nonlinear modal equations for a levitating drop. Nonlinear Oscillations, 2012, 15, 390–406.
5. E. Trinh, T.G. Wang. Large-amplitude free and driven drop-shape oscillations: experimental observations. Journal of Fluid Mechanics, 1982, 122, 315–338.
6. K. Beyer, M. Guenther, I. Gawrilyuk, I. Lukovsky, A. Timokha. Compressible potential flows with free boundaries. Part I: Vibrocapillary equilibria. ZAMM, 2001, 81, Issue 4, 261–271.
7. I. Gavrilyuk, I. Lukovsky, A. Timokha. Two-dimensional variational vibroequilibria and Faraday' drops. ZAMP, 2004, 55, 1015–1033.
8. A.N. Timokha. Planimetry of vibrocapillary equilibria at small wave numbers. International Journal of Fluid Mechanics Research, 2005, 32, 454–487.

Qualitative behavior of a class of PDE models arising in gas/fluid-structure interaction

I. D. Chueshov
Karazin Kharkov National University, Kharkov, Ukraine
chueshov@karazin.ua

We discuss well-posedness and long-time dynamics issues for several PDE models which describe interaction of a (nonlinear) elastic wall of a chamber with gas or fluid filling this chamber and modeled by linearized equations. The results presented partially based on joint studies in collaboration with F. Bucci, I. Lasiecka, I. Ryzhkova, and J. Webster.

Asymptotic nonlinear multimodal modeling of liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank

D. Ovchynnykov
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine
odvukr@ukr.net

Combining the variational method by Lukovsky–Miles and the Narimanov–Moiseev asymptotics, a nonlinear modal system describing the resonant liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank is derived. Sloshing occurs due to a small-amplitude periodic or almost-periodic excitation with the forcing frequency close to the lowest natural sloshing frequency. In contrast to the existing nonlinear modal systems based on the Narimanov–Moiseev asymptotic intermodal relationships, the derived modal equations: (i) contain all the necessary (infinite number) generalized coordinates of the second and third order, (ii) include exclusively nonzero hydrodynamic coefficients for which (iii) rather simple computational formulas are found. As a consequence, the modal equations can be used in *analytical studies* of nonlinear sloshing phenomena.

Free boundary problem. An upright circular cylindrical tank is considered which is partly filled by an inviscid incompressible liquid with irrotational flow. No overturning waves are assumed. The time-dependent liquid domain $Q(t)$ is bounded by the free surface $\Sigma(t)$ and the wetted tank surface $S(t)$.

The absolute velocity potential $\Phi(x,y,z,t)$, and the free surface $\Sigma(t)$ are the two unknowns which should be found from the following nonlinear free-boundary problem

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \mathbf{r} \in Q(t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \mathbf{v}_0 \cdot \nu + \frac{f_t}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}, \quad \mathbf{r} \in \Sigma,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \mathbf{v}_0 \cdot \nu, \quad \mathbf{r} \in S(t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 - \nabla\Phi \cdot \mathbf{v}_0 + U = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma(t).$$

Here ν is the outer normal vector, $U = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})$ is the gravity potential with $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{g} = (-g, 0, 0)$ is the gravity acceleration vector, and $x = f(y, z, t)$ is the free-surface equation.

Nonlinear asymptotic multimodal equations. For the circular-base tank, the modal solution can be rewritten in the cylindrical coordinate system as follows

$$x = f(\xi, \eta, t) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=1}^{N} (r_{m,n}(t) \sin(m\eta) + p_{m,n}(t) \cos(m\eta)) f_{mn}(\xi).$$

Qualitative analysis of solutions of the modal system have been done.

1. I. Lukovsky, D. Ovchynnykov, A.Timokha. Asymptotic nonlinear multimodal modeling of liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank // Nonlinear Oscillations 2011. — **14**, No. 4. — P. 482–495

Mathematical homogenization of hydrodynamics problems

G. V. Sandrakov

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine

sandrako@mail.ru

Turbulent regimes are arisen under a small viscosity (or equivalently under a high Reynolds number) and are associated with rapidly oscillating fluid dynamics. Moreover, in mathematical and numerical modeling it is known that rapidly oscillation effects arise under computer simulations of solutions of Navier-Stokes equations with a vanishing viscosity. But reasons of the effects are not clear, since the effects may be turbulent regimes or the numerical simulations may be incorrect. Some results in the direction will be presented in the report.

Mathematical homogenization of nonstationary linearized equations of hydrodynamics and Navier-Stokes equations with periodic rapidly oscillating initial data and the vanishing viscosity will be discussed. We give homogenized (limit) equations whose solutions determine approximations (leading terms of the asymptotics) of the solutions of the equations under consideration and estimate the accuracy of the approximations. These approximations and estimates shed light on the following interesting property of the solutions of the equations. When the viscosity is not too small, the approximations contain no rapidly oscillating terms, and the equations under consideration asymptotically smooth the rapid oscillations of the data; thus, the equations are asymptotically parabolic. If the viscosity is very small, the approximations can contain rapidly oscillating terms with zero means, and the equations are hyperbolic.

As an example, we remark a precise result. Let ε be a small positive parameter and (u, p) be a weak solution of the initial-boundary value problem for nonstationary Navier-Stokes equations

$$\begin{gathered} u'_t \,-\, \nu\,\Delta\, u \,+\, u \cdot \nabla u \,+\, \nabla p \;=\; F_\varepsilon \qquad \text{in} \qquad \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u \;=\; 0 \qquad \text{in} \qquad \Omega \times (0, T), \\ u\big|_{t=0} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, T), \end{gathered} \tag{1}$$

where $F_\varepsilon = F(t, x, x/\varepsilon)$, $F(t, x, y) \in L^2(0, T; L^2(\Omega; L^\infty_{per}(Y)/\mathrm{R})^n)$, $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ is a bounded domain with a smooth boundary, T is a positive number, and $2 \le n \le 4$. Here, a subscript *per* means 1-periodicity with respect to $y \in \mathrm{R}^n$ and $Y = [0, 1]^n$ is a periodicity cell. Thus, by definition $F(t, x, y)$ is 1-periodic in y, $\int_Y F(t, x, y)\, dy = 0$ for a. e. $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, and the restriction of $F(t, x, y)$ to Y is an element of $L^2(0, T; L^2(\Omega; L^\infty(Y))^n)$. Therefore, F_ε is a rapidly oscillating vector function.

Theorem. *Let* $\nabla_x F \in L^1(0,T; L^2(\Omega; L^\infty_{per}(Y)/\mathrm{R})^{n\times n})$ *and* (u,p) *is a solution of problem* (1). *Then, there are positive* ε_0 *and* ν_0 *such that*

$$\| u \|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^n)} + \nu \| \nabla u \|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{n\times n})} \le C(\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \nu^{-1}),$$

and

$$\| p \|_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)/\mathrm{R})} \le C(\varepsilon + \varepsilon^2 \nu^{-1-n/4}),$$

where C *is independent of* ε *and* ν *whenever* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ *and* $0 < \nu \le \nu_0$.

Asymptotic and homogenization methods are used for the consideration according to [1] and [2]. In particular, the results are applicable to some Kolmogorov flows.

1. Sandrakov G. V. The influence of viscosity on oscillations in some linearized problems of hydrodynamics. Izvestiya: Math., 2007, 71, 97–148.
2. Sandrakov G. V. On some properties of solutions of Navier-Stokes equations with oscillating data. J. Math. Sciences, 2007, 143, 3377–3385.

Resonant sloshing classification for a spherical tank

A. N. Timokha

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine
& AMOS, NTNU, Trondheim, Norway
atimokha@gmail.com, alexander.timokha@ntnu.no

Weakly-nonlinear sloshing in a spherical tank is studied by using the nonlinear multimodal method, Lukovsky's nonconformal technique, and the analytically approximate sloshing modes constructed in [1]. Fully- and weakly-nonlinear modal equations are derived but an emphasis is placed on the Moiseev-Narimanov approximate asymptotic modal system whose structure assumes that the forcing frequency is close to the lowest natural sloshing frequency and there are no secondary resonances in the forcing frequency range.

The Moiseev-Narimanov modal system couples the two primary dominant generalized coordinates (responsible for amplification of the lowest natural sloshing modes) and an infinite set of the second- and third-order generalized coordinates. This is a generalization of the infinite-dimensional system of weakly-nonlinear modal equations [2] which was derived for the case of an upright circular cylindrical tank. The nondimensional hydrodynamic coefficients at the nonlinear quantities of the modal equations are computed and tabled.

The Moiseev-Narimanov equations are used to find approximate time-periodic solutions caused by a horizontal small-amplitude harmonic excitation of the tank. Based on this solution, we estimate occurrence of secondary resonances and identify the frequency ranges in which the steady-state wave (time-periodic) solutions, responsible for planar waves and swirling, are stable. The procedure implies the so-called theoretical *classification* which also detects a frequency range where all steady-state solutions are not stable and irregular (chaotic) sloshing is expected.

The theoretical classification and the stability boundaries of the established steady-state solutions are compared with experimental data known from the literature. A good agreement is found for lower liquid depth ratios $0.2 \le h/R_0 \lesssim 1$ (R_0 is the tank radius and h is the liquid depth) [3], but the Moiseev-Narimanov modal equations look poorly applicable for higher liquid depths $1 \lesssim h/R_0 < 2$. A discrepancy is clarified by secondary resonances whose probability increases with increasing the tank filling. For $1 \lesssim h/R_0 < 2$, the experiments report local nearly wall phenomena, e.g. splashing leading to drops splashed from the tank wall and showered through the ullage. The proposed analytical technique can be extended to other tank shapes provided by appropriate analytically approximate natural sloshing modes. This includes tapered conical tanks [4,5] and two-dimensional circular tanks [6].

1. O.M. Faltinsen, A.N. Timokha. Analytically approximate natural sloshing modes for a spherical tank shape. Journal of Fluid Mechanics, 2012, 703, 391–401.
2. I.A. Lukovsky, D.V. Ovchynnykov, A.N. Timokha. Asymptotic nonlinear multimodal method for liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank. Part 1: Modal equations. Nonlinear Oscillations, 2012, 14, 512–525.
3. O.M. Faltinsen, A.N. Timokha. Multimodal analysis of weakly nonlinear sloshing in a spherical tank. Journal of Fluid Mechanics, 2013, 719, 129–164.
4. I. Gavrilyuk, M. Hermann, I. Lukovsky, O. Solodun, A. Timokha. Natural sloshing frequencies in rigid truncated conical tanks. Engineering Computations, 2008, 25, 518–540.
5. I. Gavrilyuk, M. Hermann, I. Lukovsky, O. Solodun, A. Timokha. Multimodal method for linear liquid sloshing in a rigid tapered conical tank. Engineering Computations, 2012, 29, 198–220.
6. O.M. Faltinsen, A.N. Timokha. On sloshing modes in a circular tank. Journal of Fluid Mechanics, 2012, 695, 467–477.

Parameter identification of a flexible beam with distributed and lumped actuators

A. L. Zuyev

Institute of Applied Mathematics & Mechanics of NASU, Donetsk, Ukraine

al_zv@mail.ru, alz@iamm.ac.donetsk.ua

Issues of modeling and stabilization of interconnected beams have been the subject of many investigations in mathematical control theory (see, e.g., [1–3], and references therein). This presentation is devoted to the modeling of a flexible beam supported at both ends and attached to the shaker. Let l be the length of the beam, and let $w(x,t)$ denote the deflection of the centerline of the beam at a point $x \in [0,l]$ and time t (here $x=0$ is the upper end and $x=l$ is the lower one). We assume that the shaker is attached at the point $x=l_0$, and m is the mass of the moving part of the shaker. The dynamics of this mechanical system is governed by the following partial differential equation

$$\rho\ddot{w}(x,t) - (Tw'(x,t))' + (EIw''(x,t))'' = \sum_{j=1}^{k} \psi_j''(x) M_j, \quad x \in (0,l) \setminus \{l_0\}, \tag{1}$$

subject to the boundary conditions

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0,\ w''|_{x=0} = w''|_{x=l} = 0, \tag{2}$$

$$w''|_{x=l_0+0} = w''|_{x=l_0-0}\,,\ (m\ddot{w} + \varkappa w)|_{x=l_0} = (EIw'')'|_{x=l_0-0} - (EIw'')'|_{x=l_0+0} + F. \tag{3}$$

Here $\rho(x)$ is the mass per unit length of the beam, $E(x)$ and $I(x)$ are the Young modulus and the moment of inertia of the cross section area, respectively, $T(x)$ is the tension coefficient, g is the acceleration of gravity, and $\varkappa$ is the stiffness coefficient of the shaker. We use dots to denote derivatives with respect to t, and primes to denote derivatives with respect to x. In equation (1), we assume that there are k piezoelectric actuators attached to the beam. We describe the action of the j-th actuator by its density of the torque M_j and the shape function $\psi_j(x)$. These characteristics can be computed by using results of [1]. There is also the control force F applied to the shaker in the interface condition (3).

To study the oscillations of a homogeneous beam, we consider the following spectral problem:

$$\frac{d^4}{dx^4}W(x) = \lambda\frac{\rho}{EI}W(x) + \frac{\rho g}{EI}\Big((l-x)W'(x)\Big)', \quad x \in (0,l)\setminus\{l_0\},$$

$$W(0) = W(l) = 0,\ W''(0) = W''(l) = 0,$$

$$W''(l_0+0) = W''(l_0-0),\ W'''(l_0+0) - W'''(l_0-0) = \frac{\lambda m - \varkappa}{EI}W(l_0).$$

We propose an approach for the parameter identification of the boundary value problem (1)–(3) based on experimental measurements carried out at the Instutute for Mechanics and Mechatronics, Technical University of Vienna. This work was supported in part by the project “Control, Stability, and Model Reduction of Hybrid Systems with Elastic Components” (No. 0111U007275) within the agreement on scientific cooperation between Ukraine and Austria.

1. Agrawal B.N., Treanor K.E. Shape control of a beam using piezoelectronic actuators. Smart Mater. Struct., 1999, Vol. 8, P. 729–740.
2. Chen G., Delfour M.C., Krall A.M., Payre G. Modeling, stabilization and control of serially connected beams. SIAM J. Control Optim., 1987, vol. 25, P. 526–546.
3. Shubov M.A., Peterson C.A. Asymptotic analysis of nonselfadjoint operators generated by coupled Euler-Bernoulli and Timoshenko beam model. Mathematische Nachrichten, 2004, vol. 267, P. 88–109.

Спектральные индефинитные задачи гидромеханики

Т. Я. Азизов[1], Н. Д. Копачевский[2]

[1]Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

[2]Таврический национальный университет, Симферополь, Украина

azizov@math.vsu.ru, kopachevsky@list.ru

Изучаются консервативные и диссипативные динамические системы с бесконечным числом степеней свободы, встречающиеся в эволюционных проблемах линейной гидромеханики, и соответствующие им спектральные задачи.

Отличительной особенностью рассматриваемых спектральных проблем является знакопеременность оператора потенциальной энергии системы. Это приводит к необходимости использовать пространства с индефинитной метрикой (пространства М. Крейна и Л. Понтрягина, см. [1–6]) в разложении исходного гильбертова пространства на инвариантные подпространства. Такой подход позволяет доказать утверждения о разрешимости исследуемых задач, изучить их спектральные свойства, а также установить условия динамической устойчивости (неустойчивости) исходных динамических систем.

В данной работе с использованием данного подхода изучаются некоторые проблемы гидромеханики. В частности, исследуются задачи о собственных колебаниях тела с полостью, полностью заполненной идеальной либо вязкоупругой жидкостью, проблема собственных колебаний стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне, задача С. Крейна (о нормальных колебаниях тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде), задача о поперечных колебаниях вязкоупругого стержня с грузом на конце, а также задача о движении системы сочлененных гиростатов и др.

1. Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский. Введение в теорию пространств Понтрягина. — Симферополь: ООО "Форма", Симферополь, 2008.

2. Т. Я. Азизов, Н. Д. Копачевский. Введение в теорию пространств Крейна. — Симферополь: ООО "Форма", Симферополь, 2010.
3. Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — Москва: Наука, 1986.
4. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — Москва: Наука, 1965.
5. Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — Москва: Наука, 1989.
6. Л. С. Понтрягин. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. — Изв. АН СССР, Сер. мат., 8(6), (1982), 243–280.
7. Н. Д. Копачевский. О колебаниях тела с полостью, частично заполненной тяжелой идеальной жидкостью: теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений. — Зб. працъ Інституту математики НАН України, 2005, 2(1), 158–194.
8. Н. Д. Копачевский, М. Ю. Царьков. К вопросу о спектре оператора плавучести. — Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 27(3), 1987, 463–466.
9. Н. Д. Копачевский, А. Н. Темнов. Колебания идеальной стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне при переменной частоте плавучести. — Дифференциальные уравнения, 24(10), 1988, 1784–1796.
10. С. Г. Крейн. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. — ДАН СССР, 159(2), 1964, 262–265.
11. А. В. Яковлев. Задача о нормальных колебаниях вязкоупругого стержня с грузом на конце. — Ученые записки Таврич. нац. ун-та им. В. И. Вернадского, 16(1), 28–42.
12. Э. И. Батыр, О. А. Дудик, Н. Д. Копачевский. Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью. — Известия вузов. Северо–Кавказский регион. Естеств. науки. Актуальные проблемы математической гидродинамики, 2009, 19–29.

Локальное решение задачи управления для неголономных систем с неоднородными краевыми условиями

Т. Н. Астахова, А. Л. Зуев
Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина
ctn_ af@mail.ru, al_ zv@mail.ru

Рассмотрим линейную по управлению систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x),\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n,\ u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T \in \mathbb{R}^m,\ m < n, \tag{1}$$

где x — вектор состояния, u — вектор управления, $f_i(x) :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ для $(i = \overline{1,m})$. Пусть для системы (1) выполняется ранговое условие: $\mathrm{rank}\,\{f_i(x), [f_j, f_k](x)\,|\ i = \overline{1,m},\ (j,k) \in S\} = n$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ для некоторого множества индексов $S \subseteq \{1, 2, ..., m\}^2,\ |S| = n - m$. Здесь $[f_j, f_k](x)$ — скобка Ли векторных полей $f_j(x)$ и $f_k(x)$.

Для решения двухточечной задачи управления рассмотрим семейство управлений

$$u_i^\tau(t) = v_i + \sum_{(j,l)\in S} a_{jl} \left\{ \delta_{ij} \cos\left(\frac{2\pi k_{jl}}{\tau} t\right) + \delta_{jl} \sin\left(\frac{2\pi k_{jl}}{\tau} t\right) \right\}, \tag{2}$$

зависящее от $\tau > 0$ и параметров $a_{jl} \in \mathbb{R}$, $k_{jl} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ для индексов $(j,l) \in S$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Семейство (2) распространяет класс управлений, использованный в работах [1–3], на случай систем с ненулевыми краевыми условиями и функциями управления с ненулевым средним. В дальнейшем предположим, что числа k_{jl} выбраны без резонансов, т.е. $|k_{jl}| \neq |k_{qr}|$, для всех $(j,l) \in S, (q,r) \in S, (j,l) \neq (q,r)$.

Утверждение. *Предположим, что для заданных $\tau > 0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $x^1 \in \mathbb{R}^n$, параметры v_i, a_{ql}, k_{ql}, $i = \overline{1,m}$, $(q,l) \in S$, удовлетворяют системе алгебраических уравнений:*

$$\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} v_i f_i(x^0) + \frac{1}{2}\sum_{i\leq j} v_i v_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} f_j\right)\bigg|_{x=x^0} +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{i<j}[f_i, f_j](x^0) \sum_{(q,l)\in S} \frac{a_{ql}}{k_{ql}} \{\delta_{jl}(a_{ql}\delta_{iq} - 2v_i) - \delta_{il}(a_{ql}\delta_{jq} - 2v_j)\} = \frac{1}{\tau^2}(x^1 - x^0).$$

Тогда решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(0) = x^0$ и управлением $u_i = u_i^{\tau}(t)$ вида (2) удовлетворяет условию $x(\tau) = x^1 + o(\tau^2)$, где $o(\tau^2)$ – остаточный член ряда Вольтерра.

Полученный результат применен к исследованию нильпотентной системы управления, известной в литературе как “интегратор Брокетта” [1], следующего вида

$$\dot{x} = u,\ \dot{Y} = xu^T - ux^T,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{3}$$

где Y – антисимметричная $m \times m$ матрица, с краевыми условиями $x_j(0) = 0$ и $x_j(\tau) = x^1$, $j = \overline{1,m}$ и управлением (2).

1. Brockett R. W. Control Theory and Singular Riemannian Geometry. New Directions in Applied Mathematics, Eds. P.J. Hilton, G.S. Young, 1981, P. 11–27.
2. Lafferriere G., Sussmann H.J. A differential geometric approach to motion planning. Nonholonomic Motion Planning (Z. Li andJ. F. Canny, Eds.), 1993, P. 235–270.
3. Gauthier J.-P., Jakubczyk B., Zakalyukin V. Motion planning and fastly oscillating controls. SIAM Journ. on Control and Optim., 2010, 48, No. 5, P. 3433–3448.

Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях обертання з ребристою межею

М. Я. Барняк

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

barnyak@imath.kiev.ua

Пропонується метод побудови високоточних наближених розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях обертання, меридіанний переріз яких має кутові точки. Розв'язки таких задач мають особливий характер поведінки в околі кутових точок. Цей фактор потрібно враховувати при при їхній побудові. Зокрема, для реалізації варіаційного методу розв'язування цих задач, побудовано спеціальну систему розв'язків рівняння Лапласа, які самі або їх частинні похідні терплять розрив на деякому промені з початком в кутовій точці і направленим за межі області. Оскільки шукані розв'язки задач мають саме такий характер поведінки в околі кутової точки, то включення в число координатних функцій таких функцій значно (на два-три порядки) покращує точність шуканих розв'язків.

Розв'язки рівняння

$$L_m\varphi \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi^m}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \varphi^m}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2}\varphi^m = 0 \tag{1}$$

подаються в такому вигляді

$$\varphi_k^m(r,z) = \frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(r_0 + iz + r\cos t)^k \cos mt\,dt, \tag{2}$$

$$v_k^m(r,z) = \frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^{\pi} ln(r_0 + iz + r\cos t)(r_0 + iz + r\cos t)^k \cos mt\,dt. \tag{3}$$

Дійсна та уявна частини функцій $\varphi_k^m(r,z)$ і $v_k^m(r,z)$ задовольняють рівняння (1), а функції $v_k^m(r,z)$, на відміну від гладких функцій $\varphi_k^m(r,z)$, мають особливість в точці $(r_0,0)$. Функції $v_k^m(r,z)$, хоча і мають доволі громіздкий аналітичний вигляд, виражаються через елементарні функції. Встановлено рекурентні формули для обчислення значень цих функцій та їх частинних похідних. Крім функцій $v_k^m(r,z)$ використовувалися також функції

$$v_k^{m,*}(r,z) = \frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(r_0 + iz + r\cos t)^{k-0.5} \cos mt\,dt, \tag{4}$$

які виражаються через еліптичні інтеграли першого та другого роду і також мають особливість в точці $(r_0,0)$. Для обчислення цих функцій та їх похідних також одержано рекурентні формули.

В якості ілюстрації розробленого методу побудовані розв'язки задачі Неймана та задачі про власні коливання ідеальної рідини в сферичній порожнині. Наведено таблиці, які ілюструють результати реалізації числових алгоритмів.

1. Барняк М.Я. Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Лапласа в областях обертання з ребристою межею // Укр. мат. журн. — 2009. — 61, №5. — С. 579–595.

О движении гиростата в одном обобщении случая Стеклова

О. С. Волкова

Институт прикладной математики и механики НАНУ, Донецк, Украина

volkova@iamm.ac.donetsk.ua

Изучается вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(t)$. Считаем, что направление вектора $\boldsymbol{\lambda}$ фиксировано в связанном с корпусом гиростата базисе, а скоростью изменения его абсолютной величины можно управлять: $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, где $\dot{\lambda} = u$, а функция $u(t)$ непрерывна и ограничена.

Уравнения движения гиростата во вращающемся вместе с корпусом базисе имеют вид

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \mathrm{P}(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}), \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции системы, записанный в главных осях; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикали, P – вес гиростата, $\boldsymbol{e}$ – радиус-вектор центра масс.

В работе [1] при $\boldsymbol{\lambda} = [\varkappa(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}) + \lambda_0]\boldsymbol{\alpha}$ найдено решение уравнений (1) с квадратичным по компонентам $\boldsymbol{\omega}$ инвариантным соотношением: в случае $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{const}$ оно соответствует решению Харламова [2], а при $\boldsymbol{\lambda} = 0$ вырождается в решение Стеклова [3]. Показано, что характерное для решения [3] свойство *изоконичности движения* для обобщенного решения имеет место только при $\lambda_0 = 0$. Для этого случая в эллиптических функциях Якоби выписаны зависимости от времени $\boldsymbol{\lambda}$ и фазовых переменных, аналитически исследованы неподвижные годографы векторов $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}$ и суммарного кинетического момента $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda}$.

Показано, что с $\lambda_0 = 0$ возможны четыре типа решений системы (1). Пусть $J_2 > J_3$, $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\alpha} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$, тогда условия их существования запишутся в виде

$$\mathbf{1)}\ L \in (2J_3; J_2), J_2 > 2J_3, \quad \mathbf{2)}\ J_2 < L < 2J_2,\ L > 2J_3, \quad \mathbf{3)}\ L < 0, \quad \mathbf{4)}\ L > 2J_2,$$

где $L = \varkappa + J_1$, а $\varkappa$ остается свободным параметром. В решении Стеклова, соответствующем значению $\varkappa = 0$, допустимы только ограничения $1), 2)$, иначе $J_1 < 0$ или $J_2 + J_3 < J_1$.

При заданном $\boldsymbol{\lambda}$ система (1) допускает аналог интеграла энергии $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{\omega}) - 2\mathrm{P}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\nu}) = 2h$, где $h = h(\boldsymbol{J}, L)$. Для каждого из условий 1)–4) получены не содержащие L оценки h.

Неподвижный аксоид вектора $\boldsymbol{\omega}$ – эллиптический конус: при условиях $1), 2)$ ось аксоида *горизонтальна*, а при условиях $3), 4)$ — *вертикальна*. Составляющая $\boldsymbol{\omega}$ вдоль оси аксоида во всех случаях не меняет знака с течением времени. Неподвижный годограф $\boldsymbol{\omega}$ — сечение аксоида цилиндрической поверхностью; неподвижный годограф $\boldsymbol{K}$ — плоская кривая.

В случаях $1), 2)$ вектор $\boldsymbol{e}$ периодически занимает вертикальное положение, а его годограф пересекает горизонтальную плоскость; если же выполнены условия $3), 4)$, то $\boldsymbol{e}$ в любой момент времени составляет с нисходящей вертикалью ненулевой острый угол. Горизонтальная проекция годографа вектора $\boldsymbol{e}$ — кривая четвертого порядка: проведено полное ее исследование, представлены различные формы кривой. Исследованы также проекции неподвижного годографа $\boldsymbol{e}$ на остальные координатные плоскости; для каждого из случаев 1)–4) схематически изображена соответствующая пространственная кривая.

1. Волкова О. С. Аналог решения Стеклова в задаче о движении тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом. Доповіді НАНУ, 2013, 6 с. (в печати).
2. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. — Новосиб.: Изд–во гос. ун-та, 1965, 221 с.
3. Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Труды отд. физ. наук об-ва любителей естествознания, 1899, Т. 10, Вып. 1, С. 1–3.

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ ТОНКИХ СЛОЕВ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

И. А. Гажева

Таврический Национальный Университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина

param256@gmail.com

Рассматриваются движения гидросистемы, состоящей из m тонких несмешивающихся однородных слоев разной плотности, которая заполняет цилиндрическую область Ω и в невозмущенном состоянии равномерно вращается вокруг вертикальной оси. Наряду с гидродинамической задачей рассматривается модельная задача, в которой коэффициенты при операторах единичные. Она сводится к спектральной задаче вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \nabla & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \nabla & \nabla & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \nabla & \nabla & \dots & \nabla \\ \mathrm{div} & \mathrm{div} & \dots & \mathrm{div} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathrm{div} & \dots & \mathrm{div} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{div} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u_1} \\ \vec{u_2} \\ \dots \\ \vec{u_m} \\ p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{u_1} \\ \vec{u_2} \\ \dots \\ \vec{u_m} \\ p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_m \end{pmatrix}$$

После подстановок и расширений операторов возникает задача вида

$$\mathcal{A}\varphi = \mu \mathcal{J} \varphi,$$

где операторная матрица $\mathcal{A} >> 0 = \mathcal{A}^*$ — неограниченная, $\mathcal{A}^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}^*$ — ограниченная положительно определенная матрица. Эта задача имеет дискретный положительный спектр с предельной точкой на $\pm\infty$, при этом нуль — бесконечнократное собственное значение, а соответствующая система собственных элементов образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве.

Аналогично рассматривается гидродинамическая задача с соответствующими физическими коэффициентами при операторах. Для нее устанавливается теорема о существовании и единственности решения, а также теорема о спектре.

1. Иванов Ю.Б., Копачевский Н.Д. О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях вращающегося слоя идеальной жидкости. Таврический вестник информатики и математики, Симферополь, ТНУ им. В.И. Вернадского, 2003, №1, С. 61–77.
2. Копачевский Н.Д. Операторные методы математической физики: Специальный курс лекций. — Симферополь: Форма, 2008.

Малые движения и собственные колебания системы "идеальная жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости

Э. Л. Газиев

Крымский инженерно-педагогический университет, Симферополь, Украина

egaziev@list.ru

Изучается проблема малых движений и собственных колебаний системы "жидкость–газ" в условиях, близких к невесомости. Считается, что жидкость является капиллярной и несжимаемой, а газ — баротропным, то есть плотность газа экспоненциально стратифицирована вдоль вертикальной оси.

Из начально-краевой задачи о малых движениях гидросистемы с помощью ортогонального проектирования на специально выбранные функциональные пространства получена начально-краевая задача для потенциальных функций, на основе которой рассматривается задача о собственных колебаниях системы.

С использованием операторного подхода [1] задача о собственных колебаниях приведена к задаче Коши для диференциально-операторного уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{A}y) + \mathcal{B}y = 0, \quad y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1, \quad y = y(t) \in \mathcal{H}, \tag{1}$$

где $\mathcal{A} > 0$ является ограниченным положительным оператором кинетической энергии гидросистемы, а $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* \geq \gamma I$ — ограниченным снизу самосопряженным оператором потенциальной энергии с дискретным спектром.

Исследуется соответствующая (1) спектральная задача

$$\mathcal{B}z = \lambda \mathcal{A}z, \quad z \in \mathcal{H}. \tag{2}$$

В случае статической устойчивости по линейному приближению [2], когда оператор $\mathcal{B}$ положительно определенный, доказаны теоремы о структуре спектра задачи (2) и свойствах собственных функций, а также предложены вариационные методы для нахождения $\lambda = \omega^2$ — квадратов частот собственных колебаний гидросистемы.

В случае, когда условие статической устойчивости по линейному приближению не выполнено, и оператор $\mathcal{B}$ имеет отрицательные собственные значения, доказано обращение теоремы Лагранжа об устойчивости для систем с бесконечным числом степеней свободы.

В предположении лишь ограниченности снизу оператора $\mathcal{B}$ потенциальной энергии с дискретным спектром доказаны теоремы о существовании сильного решения начально-краевой задачи (1) и исходной начально-краевой задачи для потенциальных функций на любом конечном промежутке времени $[0, T]$ при некоторых условиях на начальные данные и внешние силы.

Получено также разложение решения задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения (1), порожденного исследуемой проблемой, в функциональный ряд по собственным функциям спектральной задачи (2).

1. Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — Москва: Наука, 1989.
2. Э. Л. Газиев. О малых движениях и собственных колебаниях системы "идеальная жидкость–баротропный газ". — Таврический Вестник информатики и математики (ТВИМ), 1, (2011), 127 – 137.

Поведение решений нелинейной системы в критических случаях при наличии трехчастотного резонанса

В. В. Грушковская

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина

v_grushkovskaya@mail.ru

Целью данного доклада является построение степенных оценок нормы решений системы нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + R(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \ n \geq 6 \tag{1}$$

где x — фазовый вектор системы, A — вещественная $[n \times n]$- матрица с постоянными коэффициентам, $R(x)$ — вещественная аналитическая в некоторой окрестности нуля функция, разложение которой в ряд Маклорена не содержит членов ниже второго порядка. Предполагается, что на устойчивость тривиального решения системы (1) не влияют формы выше третьего порядка в правых частях соответствующих уравнений.

Пусть характеристическое уравнение системы (1) имеет $n-6$ корней с отрицательными вещественными частями, среди которых нет кратных, и три пары чисто мнимых корней

$(\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \pm i\omega_3)$, удовлетворяющих условию резонанса четвертого порядка порядка: существуют такие ненулевые целые числа k_1, k_2, k_3, $|k_1| + |k_2| + |k_3| = 4$, что

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 = 0.$$

Кроме того, предполагается, что резонансы меньших порядков в системе (1) отсутствуют.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть тривиальное решение системы* (1) *асимптотически устойчиво независимо от форм выше третьего порядка. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого решения $x(t)$ системы* (1) *с начальными условиями $x(t_0) = x_0 \in B_\varepsilon(0)$ выполняется оценка*

$$|x(t)| \leq \left(\alpha_1 (t - t_0) + \alpha_2 |x_0|^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \ \forall t \geq t_0, \tag{2}$$

где α_1, α_2 — положительные постоянные, которые определяются по коэффициентам Маклорена правой части системы (1).

Отметим, что для однородных систем подобный результат был получен в работах [1,2]. В статье [3] теорема 1 доказана в случае произвольного числа чисто мнимых собственных значений при условии, что в системе (1) отсутствуют внутренние резонансы до четвертого порядка включительно.

В данном докладе для получения оценки (2) используется принцип сведения [4] и метод нормальных форм [5]. В процессе доказательства приводится способ вычисления коэффициентов α_1, α_2 и построения функции Ляпунова. Полученный результат продемонстрирован на примере механической системы с частичной диссипацией.

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
2. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1957.
3. Grushkovskaya V., Zuyev A. Asymptotic Behavior of Solutions of a Nonlinear System in the Critical Case of q Pairs of Purely Imaginary Eigenvalues. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2013, 80, 156–178.
4. Каменков Г. В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. — М.: Наука, 1972.
5. Веретенников В. Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. — М.: Наука, 1984.

Некоторые классы интегродифференциальных уравнений Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной

Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина

Таврический национальный университет им.В.И.Вернадского, Симферополь, Украина

kopachevsky@list.ru, kozirno@gmail.com

Как известно, проблемы малых движений идеальной релаксирующей жидкости в произвольной ограниченной области приводят к задачам Коши для интегродифференциальных уравнений второго порядка. Рассмотрим в связи с этим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задачу Коши для вольтеррова интегродифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + (F + iG)\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t G_k(t,s) C_k u(s) ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1. \tag{1}$$

Такие уравнения описывают, в частности, эволюцию динамических систем с бесконечным числом степеней свободы, причём учитываются эффекты релаксации.

Искомая функция $u = u(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ задаёт поле смещений системы относительно состояния равновесия, а операторные коэффициенты в (1) имеют отчётливый физический смысл. Так, A является оператором кинетической энергии и потому$A = A^* > 0$. Далее, B есть оператор потенциальной энергии; если состояние равновесия системы статически устойчиво по линейному приближению, то $B = B^* \geqslant 0$. Оператор $F = F^* \geqslant 0$ учитывает диссипацию энергии, а оператор $G = G^*$ учитывает действие кориолисовых (гироскопических) сил. Наконец, интегральные слагаемые учитывают явления релаксации.

Изучается случай, когда A — ограниченный оператор ($A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$), а коэффициенты F, G, B, C_k — неограниченные и, вообще говоря, некоммутирующие операторы, заданные на своих областях определения, плотных в $\mathcal{H}$. При этом считается, что эти операторы сравнимы по своим областям определения. Именно, выделяются такие классы уравнений, для которых один из операторов можно назвать главным; он имеет область определения, наиболее узкую по сравнению с областями определения других операторных коэффициентов.

Полученные результаты основаны на подходах, изложенных в [1] и отвечающих случаю $A = I$, где I — единичный оператор. Стоит отметить также монографию [2], где изучаются задачи Коши для интегродифференциальных и функциональных уравнений, а также сопутствующие спектральные задачи, в случае когда один из коэффициентов является главным, а остальные — степени этого главного оператора.

Авторы благодарят Д.А.Закору за внимание к работе и полезные замечания.

1. Копачевский Н.Д. Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: Специальный курс лекций. — Симферополь:ФЛП "Бондаренко О.А.", 2012. — 152 с.
2. Власов В.В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ/Под редакцией В. А. Садовничего // Современные проблемы математики и механики. — Математика. — 2011. — Т. VIII., вып.1. — С. 8–306.

О нахождении равновесных форм и их устойчивости для капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью

Н. Д. Копачевский[1], З. З. Ситшаева[2]
[1]Таврический национальный университет, Симферополь, Украина
[2]Крымский инженерно-педагогический университет, Симферополь, Украина
kopachevsky@list.ru, szz2008@mail.ru

Рассматривается проблема нахождения равновесных форм идеальной капиллярной жидкости, находящейся в открытом контейнере под действием однородного гравитационного поля с интенсивностью $\vec{g} = -g\vec{k}$ ($\vec{k}$ — орт вертикальной оси Oz). При этом считается, что в горизонтальном ($z = 0$) днище контейнера имеется отверстие.

Свободная поверхность жидкости в изучаемой задаче состоит из двух непересекающихся частей: Γ_0 и Γ_1. Поверхность Γ_0 ($z = h > 0$) расположена над днищем сосуда, а Γ_1 — поверхность капли, вызванная вытеканием жидкости из отверстия в днище сосуда. Предполагается, что поверхность Γ_0 является горизонтальной.

При исследовании проблемы с использованием методов, изложенных в монографии [1], получена задача Коши для определения поверхности Γ_1 как в случае цилиндрического сосуда, так и в плоском случае.

С помощью операторного подхода получено соотношение для определения границы области статической устойчивости капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью, находящейся в открытом сосуде.

В основу алгоритма отыскания равновесной поверхности Γ_1 капли и определения ее устойчивости положена итерационная вычислительная схема, предложенная в [2].

Заданными параметрами задачи считаются V — объем жидкости, r_0 — полуширина отверстия, $B_0 = \rho g l^2/\sigma$ — число Бонда (ρ — плотность жидкости, характеристический размер l — полуширина сосуда, σ — коэффициент поверхностного натяжения).

В результате численных расчетов для заданных параметров определены равновесные формы поверхности капли, а также граница области статической устойчивости капиллярной жидкости с несвязной свободной поверхностью.

1. В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. — Киев: Наукова думка, 1992.
2. Э. Л. Газиев. К определению равновесной поверхности жидкости в системе "жидкость-газ" и ее устойчивости. — Fourth Intern. Conf. for Young Mathematicians on Diff. Eq. and Applications dedicated to Ya.B. Lopatinskii. Book of Abstracts. — Донецк, 2012. — 33-35.

Нелинейная модальная система третьего порядка малости, описывающая вынужденные колебания жидкости в конических баках

И. А. Луковський, А. В. Солодун

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

lukovsky@imath.kiev.ua, solodun@imath.kiev.ua

Применяя технику неконформных отображений Луковского [1,3,4], построены нелинейные модальные системы, описывающие вынужденные колебания идеальной несжимаемой жидкости в конических резервуарах (включая усеченные). При этом базовая спектральная задача о свободных колебаниях жидкости в конических баках [3,5] решается приближённо в аналитическом виде вариационным методом с использованием двух альтернативных наборов базисных функций, причём один из них точно удовлетворяет краевое условие на смоченных стенках бака. На основе этих приближённых решений построена нелинейная модальная система уравнений вынужденных колебаний [2,7] с учётом 5(7) форм свободных колебаний жидкости. Приводятся значения гидродинамических коэффициентов этой системы и формулы для гидродинамических сил взаимодействия жидкости со стенками бака. Практическое использование линеаризованного варианта этой системы проиллюстрировано на задаче Сретенского, а также на решении задачи о собственных колебаний водонапорной башни. С привлечением нелинейной модальной системы детально анализируются нелинейные резонансные установившиеся вынужденные колебания жидкости при поступательном колебательном движении бака с частотой, близкой к основной собственной частоте колебаний жидкости [7]. Проведено сравнение модальных систем, полученных методом теории возмущений [1] и вариационным методом с использованием вариационного принципа Бейтмена–Люка. При этом установлено удовлетворительное совпадение численных значений коэффициентов этих систем.

Перспектива развития нелинейных модальных теорий связывается с обобщениями для случаев секториальных, соосных кольцевых сечений, соосных кольцевых сегментов прямых, обратных и усечённых конических баков. Авторы считают возможным также построение соответствующих бесконечномерных нелинейных модальных систем третьего порядка малости, как это было недавно сделано для вертикальных цилиндрических и сферических баков.

1. И.А. Луковский. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. — Киев: Наук. думка, 1975, 136 с.
2. И.А. Луковский, А.Н. Тимоха. Модальное моделирование нелинейных плесканий жидкости в баках с невертикальными стенками. Методика неконформных отображений. Прикладная гидромеханика. 2000, Т. 2(74), № 4, С. 32–47.
3. І.О. Луковський. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках. Доповіді НАН України, 2002, N 5, С. 53–58.
4. И.А. Луковский. Об одной математической модели волновых движений жидкости в резервуаре с наклонными стенками. Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2005, Т. 2, № 1, С. 227–253.
5. И.А. Луковский, А.В. Солодун, А.Н. Тимоха. Собственные колебания жидкости в усеченных конических баках. Акустический вестник, 2006, Т. 9, № 3, С. 42–61.
6. И.А. Луковский, А.В. Солодун, А.Н. Тимоха. Линейная математическая модель пространственного движения конического бака с жидкостью. Акустический вестник, 2009, Т. 12, № 2, С. 44–56.
7. И.А. Луковский, А.В. Солодун, А.Н. Тимоха. Нелинейная асимптотичекая модальная теория резонанасных колебаний жидкости в срезанных конических баках. Акустический вестник. Ин-т гидромеханики НАН Украины, 2011, Т. 14, № 4, С. 37–64.

Развитие нелинейных модальных методов в задачах динамики тел с полостями, несущими жидкость

И. А. Луковский, А. Н. Тимоха

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

lukovsky@imath.kiev.ua, tim@imath.kiev.ua

Современный мэйнстрим в задачах динамики тел с жидкостью, частично заполняющей подвижный бак, часто связывают с развитием численных методов решения соответствующих гидродинамических задач со свободной поверхностью (см. [1, гл.10] и [2]), предполагающих дискретизацию по временной и пространственным переменным. Такие численные методы достаточно эффективны и точны для расчета переходных режимов движения жидкости и тел с жидкостью. Однако возможности этих численных методов весьма ограничены, когда ставится задача параметрического анализа динамики и устойчивости подобных гибридных механических систем от входных параметров и достаточно большого количества возможных начальных сценариев. Этот анализ особенно сложен с вычислительной точки зрения, когда необходимо классифицировать установившиеся вынужденные режимы движения, возникающие на практике после достаточно долгих переходных волновых движений. Для решения последних задач альтернативой может стать мультимодальный метод. Он позволяет свести краевую задачу со свободной границей о колебаниях жидкости в сосуде к компактным и аналитически простым приближенным системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Последние системы названы нелинейными модальными системами.

Обзор прикладных математических и гидродинамических результатов, связанных с развитием нелинейных модальных методов, дано в книгах [1,3,4]. Читатели могут найти в этих книгах наиболее полное изложение как самой идеи модальных методов, так и специфики реализации метода для сосудов различной геометрии. Достижения в области построения и использования асимптотических модальных систем изложены в обзоре [5]. При этом основной акцент в последнем обзоре сделан на результатах классификации установившихся волн в цилиндрических сосудах кругового и прямоугольного сечений при горизонтальных и угловых гармонических возмущений сосуда.

В то же время обзоры в [1,3-5] нельзя считать полными в плане анализа открытых математических проблем, которые требуют решения для обобщения модального метода на новые классы прикладных задач, возникающих в морских приложениях, в том числе при конструировании волновых конверторов энергии, на новые задачи строительной механики, включая моделирование мегатонных водопроводных башен и демпферов высотных строений, а также для задач фармацевтических технологий и биомеханики. Такой анализ будет дан в настоящем обзорном докладе.

1. Faltinsen O.M., Timokha A.N. Sloshing. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
2. Rebouillat S., Liksonov D. Fluid-structure interaction in partially filled liquid containers: A comparative review of numerical approaches. Computers & Fluids, 2010, 39, 739–746.
3. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику тела с полостями, содержащими жидкостью. — Киев: Наукова Думка, 1990.
4. Луковский И.А. Математичесие модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — Киев: Наукова Думка, 2010.
5. Lukovsky I.A., Timokha A.N. Combining Narimanov–Moiseev' and Lukovsky–Miles' schemes for nonlinear liquid sloshing. Journal of Numerical and Applied Mathematics, 2011, 105, No 2, 69–82.

Робастна стабілізація механічних систем

О. Г. Мазко[1], Л. В. Богданович[2]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

[2]Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна

mazko@imath.kiev.ua, lo-_-lo@mail.ru

Розглядається клас нелінійних механічних систем керування у формі Лагранжа

$$A_2(\cdot)\ddot{x} + A_1(\cdot)\dot{x} + A_0(\cdot)x = B_0(\cdot)u, \quad y = C_0(\cdot)x + C_1(\cdot)\dot{x} + D(\cdot)u, \tag{1}$$

де $x, \dot{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектори узагальнених координат та швидкостей, $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор керування, $y \in \mathbb{R}^l$ — вектор спостереження, а матричні коефіцієнти відповідних розмірів можуть неперервно залежати від x, $\dot{x}$ і t в околі ізольованого стану рівноваги $x \equiv \dot{x} \equiv 0$ при $t \geq 0$. Допускається поліедральна невизначеність матричних коефіцієнтів при $x = 0$ і $t \geq 0$:

$$\begin{gathered} A_0 \in \mathrm{Co}\{A_{01}, \ldots, A_{0\alpha_0}\}, \quad A_1 \in \mathrm{Co}\{A_{11}, \ldots, A_{1\alpha_1}\}, \quad A_2 \in \mathrm{Co}\{A_{21}, \ldots, A_{2\alpha_2}\}, \\ B_0 \in \mathrm{Co}\{B_{01}, \ldots, B_{0\beta}\}, \;\; C_0 \in \mathrm{Co}\{C_{01}, \ldots, C_{0\gamma_0}\}, \;\; C_1 \in \mathrm{Co}\{C_{11}, \ldots, C_{1\gamma_1}\}. \end{gathered} \tag{2}$$

де $\mathrm{Co}\{\cdot\}$ — опукла оболонка матриць. Шукаємо множину стабілізуючих регуляторів

$$u = K(x,t)\,y, \quad K(x,t) = K_*(x,t) + \widetilde{K}(x,t), \quad \widetilde{K}(x,t) \in \mathcal{K} = \{K : K^T P K \leq Q\}, \tag{3}$$

де P і Q — симетричні додатно визначені матриці, що описують еліпсоїд $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{m\times l}$. При деяких обмеженнях замкнена система має вигляд

$$E(z)\dot{z} = M(z,t)z, \quad M = A + B\mathcal{D}(K)C, \quad \mathcal{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K, \tag{4}$$

$$z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} I_m & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & A_2 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_n \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} \\ B_0 \end{bmatrix}, \; C = [C_0, C_1].$$

Задача полягає у побудові умов, що забезпечують асимптотичну стійкість нульового стану систем'ї систем (1), (2) і верхню оцінку функціонала якості

$$J(u,z_0) = \int_0^\infty \left[z^T, u^T\right]\Phi(t)\begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} dt \le \omega, \; \Phi(t) = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R \end{bmatrix}, S \ge NR^{-1}N^T + \gamma I_n, \gamma > 0. \tag{5}$$

Теорема. *Нехай для деяких $\varepsilon_i > 0$ $(i = 0,1,2)$ і неперервно-диференційовної симетричної матриці $X(t)$ при $z = 0$ і $t \ge 0$ виконується система співвідношень*

$$z_0^T E^T X(0) E\, z_0 \le \omega, \quad \varepsilon_1 I_n \le X(t) \le \varepsilon_2 I_n,$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} E^T\dot{X}E + M_*^T XE + E^T XM_* + \Phi_* + \varepsilon_0 I_{2n} & B_*^T & C_*^T \\ \hline B_* & R - G^T PG & D^T \\ C_* & D & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0,$$

де $M_* = A + B\mathcal{D}(K_*)C$, $\Phi_* = L_*^T \Phi L_*$, $B_* = B^T XE + N^T + R\mathcal{D}(K_*)C$, $C_* = C + D\mathcal{D}(K_*)C$, $L_*^T = [I_{2n}, C^T\mathcal{D}^T(K_*)]$, $G = I_m - K_*D$, Тоді кожне керування (3) *забезпечує асимптотичну стійкість нульового стану системи* (4)*, спільну функцію Ляпунова $v(z) = z^T E^T(0) XE(0) z$ і оцінку функціонала* (5).

Формулюються аналогічні твердження в термінах матриць вихідної системи (1) та її наслідки для сімей систем (1), (2) при додаткових обмеженнях. Пропонуються нові методи побудови стабілізуючих матриць зворотного зв'язку K_* для класу лінійних автономних систем типу (1), а також алгоритми квадратичної оптимізації невизначених систем, що базуються на розв'язанні лінійних матричних нерівностей [1]. Наводяться приклади.

1. О.Г. Мазко, Л.В. Богданович. Робастна стійкість і оптимізація нелінійних систем керування // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 1. — С. 204–222.

Области активного нагружения и разгрузки на этапе страгивания трещины в условиях плоского напряженного состояния в математической теории пластичности

В. А. Нифагин[1], М. А. Гундина[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

[2]Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

vladnifagin@gmail.com, maryanatolevna@mail.ru

Исследуется напряженно-деформируемое состояние упругопластического материала в окрестности вершины страгивающейся трещины нормального отрыва с определяющими соотношениями теории течения с упрочнением в условиях плосконапряженного состояния. На основе варианта метода асимптотических разложений, учитывающего сингулярность полей напряжений и деформаций, задача сводится к последовательности краевых задач, которые решаются численно-аналитически.

Рассматривается трещина, распространяющаяся в стационарном режиме, когда поля напряжений не зависят явным образом от параметра нагружения (квазистатический процесс подрастания трещины). Материал считается несжимаемым и упрочняющимся по степенному закону. Разрешающие уравнения задачи представлены в производных напряжений и деформаций по длине трещины, неявная зависимость от которой включена в переменные полярной системы координат с полюсом в продвигающейся вершине трещины. Краевая задача формулируется из условий свободных от усилий берегов разреза. Область пластического деформирования при этом подразделяется на зоны активного нагружения и разгрузки, которые требуют сращивания решений на определяемой линии раздела. Возникновение зон разгрузки и концентрация остаточных полей напряжений около берегов трещины имеет важное значение для вычисления удельной работы разрушения в рамках энергетического подхода для формирования критериев разрушения.

Декартову систему координат ξ_i $(i = 1, 2)$ отнесем к концу трещины. Единственным независимым параметром задачи, имеющим размерность длины является величина K^2/G^2, поэтому искомые функции задачи будут зависеть от нагрузки через безразмерные переменные

$$x_1 = (\xi_1 - l)G^2/K^2\,, x_2 = \xi_2\, G^2/K^2\ \ ,\ \ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};\ \ \varphi = arctg\frac{x_2}{x_1}, \tag{1}$$

где $K = p\sqrt{\pi l}$, p - усилие, l - длина трещины.

Подставляем в разрешающие уравнения функцию напряжений $\Phi(r, \varphi)$ в виде полного разложения по параметру нагружения в окрестности особой точки $\Phi(r, \varphi) = \sum \psi_k(\varphi)r^{\lambda_k}$, причем r и φ являются функциями длины трещины. На нулевом шаге возникает задача о собственных значениях дифференциального оператора для определения функции Эри. В силу нелинейности граничной задачи, она решается численно с помощью модифицированного метода пристрелки.

Полученные результаты в виде графиков угловых распределений производных напряжений σ_{rr},$\sigma_{\varphi\varphi}$, интенсивности T, а также деформаций характеризуют следующие особенности решения. Понижение порядка сингулярности нулевого члена по деформациям и напряжениям в сравнении с упругим случаем, что приводит к более равномерным полям. Выбор определяющих соотношений инкрементальной теории течения существенно влияет на геометрию пластических зон, причем указанное влияние усиливается с ростом нелинейности диаграммы деформирования.

Умови формування майже консервативної динамічної системи за допомогою зворотного зв'язку

В. В. Новицький[1], О. П. Коломійчук[1], І. Ф. Святовець[2]
[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна
[2]Запорізька державна інженерна академія, Запоріжжя, Україна
novyc@imath.kiev.ua, kolomithyk@rambler.ru, l2771398cd@mail.ru

Знайдені умови формування майже консервативної динамічної системи, за допомогою зворотного зв'язку, для керованої лінійної стаціонарної системи

$$\dot{x} = (F_0 + \varepsilon F_1)x + Gu, \tag{1}$$

де $x = [x_1, ..., x_n]^T$ - n-вимірний вектор стану, $u = [u_1, ..., u_m]^T$- m-вимірний вектор керувань, ε - малий параметр; $F_0, F_1 \in \Re_{n\times n}$, $F_0^T \neq -F_0$, $G \in \Re_{n\times m}$.

Розроблена методика, яка перетворює (1) в майже консервативну динамічну систему, з метою спрощення алгоритму знаходження вектора керування для (1). Проілюстровано описаний підхід на прикладі керованої гіровертикалі.

1. Новицький В.В. Уравнение Ляпунова для почти консервативных систем.// Препринт, К.: Ін-т математики НАН України, 2004. — 34 с.
2. Меркин Д. Р. Гироскопические системы / Д.Р. Меркин — М.: Наука, 1974. — 344 с.

Про температурні поля і умови конденсації газів туманостей у планетарному вихрі

В. І. Перехрест[1], Л. В. Ключинська[2]

[1]Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ, Україна

[2]Севастопольський інститут банківської справи Української академії банківської справи Національного банку України, Севастополь, Україна

prokhrest@i.ua, klyuch.luda.1983@mail.ru

Новий точний розв'язок сферично-осесиметричних гідродинамічних рівнянь Ейлера, названий планетарним вихором [1,2],
застосовано до аналізу термодинамічних процесів, що відбуваються у планетарній газопиловій туманності, збуреній даною вихровою течією. У постановці незв'язаної теплопередачі та адіабатичності середовища шляхом застосування диференціального рівняння енергетичного балансу отримано стаціонарні температурні поля у області вихору. Показано, що вихрові кільця є областями понижених температур, і тому в них можуть створюватися умови (перепади), за яких відбувається конденсація газів, таких як водень, гелій чи азот. Проблема дослідження умов фрагментації планетарних туманностей та утворення в них зародків конденсації й акреції (планетозималей) до сьогодні є актуальною й далеко не розв'язаною задачею [3].

На відміну від поширеної концепції випадкових у часі та просторі збурень, що викликають нестабільність, фрагментацію і акрецію планетозималей [4], планетарний вихор має чітко окреслену структуру й геометрію тороїдних кілець, у яких і формуються планети завдяки первинній конденсації газів та подальшій еволюції газо-пилових скупчень. Оцінено перепади температур вздовж осі та у екваторіальній площині вихору, які відповідають реальним умовам незбурених планетарних туманностей. Так, якщо за відомими оцінками астрофізиків [4].

Взяти температуру незбуреної туманності T 100К і густину $\rho \sim 10^{-12}$ г/см^3, то у межах перших 2-х кілець падіння температур можуть становити біля 100% і наближатися до 0 K, а у подальших кільцях – коливатися із затуханням від 50% до 10%. При таких перепадах газоподібні водень, гелій і азот конденсуються, і у вихрових кільцях створюються умови для газо-пилової акреції й формування планет.

1. Перехрест В.І. Новий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихрових течій. / В.І. Перехрест, Р.В. Іванов // Вісник Дніпропетр. ун-ту, — 2002. — Механіка, — вип.6, т. 1, — С. 60–64.
2. Перехрест В.І. Планетарний вихор та гіпотези Лапласа і Вайцзекера. / В.І. Перехрест // Вісник Дніпропетр. ун-ту, — 2009. — Механіка, — вип. 13, т.2, № 5, — С. 113–124.

3. PROTOSTARS & PLANETS-IV. Edited Vince Maunings, A.P. Boss, S.S. Russel. — Tucson, Arizona Press, 2000, 378 p.
4. Peter Bodenheimer, Andreas Burkert, Richard J. Klein, Alan Boss. Multiple fragmentataion of protostars. Protostars & Planets IV Arizona Press. 2000. P. 675–701.

Об ограниченности симметричных движений в задаче трех тел

С. П. Сосницкий
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
sosn@imath.kiev.ua

Исследуется специальный случай задачи трех тел, когда два из них имеют одинаковые массы ($m_1 = m_2 = m$) и существует многообразие симметричных движений. Обычно, когда в задаче трех тел речь идет о симметричных движениях, то это связывают с именем Ситникова [1], которому удалось для случая, когда $m_1 = m_2 = m$, доказать существование осциллирующих финальных эволюций. Эти эволюции как раз и обладают свойством симметрии. И хотя утверждение Ситникова фактически было строго доказано только в случае ограниченной задачи трех тел (когда делается допущение, что масса m_3 третьего тела бесконечно мала), тем не менее оно послужило толчком для дальнейших исследований в этом направлении и в конечном итоге нашло свое обоснование при соответствующих дополнительных ограничениях и в общем случае задачи трех тел [2,3]. Заметим, что возможность существования осциллирующих финальных эволюций в задаче трех тел постулировал Шази [4]. Мы в некотором смысле рассматриваем обратную задачу по отношению к задаче Ситникова, исследуя в общем случае задачи трех тел условия существования ограниченных симметричных движений.

Теорема. *Пусть $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ — симметричное движение задачи трех тел, которое принадлежит множеству отрицательных значений интеграла энергии:*

$$\Omega = \{(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') : T - U = h < 0\}.$$

Тогда, если

$$|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12}| = c > 0 \tag{1}$$

и выполняется одно из условий:

$$2\mu^3 + c^2 h < 0, \quad \mu = \frac{m}{M}, \quad M = 2m + m_3, \tag{2}$$

$$\frac{4}{c^2}\left[2\mu^3(1+\mu_3) + c^2 h\right] - \frac{\mu_3 c^2 h^2}{\mu(\mu + 4\mu_3)^2} < 0, \quad \mu_3 = \frac{m_3}{M}, \tag{3}$$

$$\frac{2}{c^2}\left[4\mu^3 + c^2 h\right] - \frac{c^2 h^2}{2\mu(\mu + 4\mu_3)^2} < 0, \tag{4}$$

то рассматриваемое движение ограничено.

Следствие. *Пусть симметричное движение $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ принадлежит множеству Ω. Тогда, если выполняются условия (1) и (4) теоремы, то справедлива оценка*

$$|\boldsymbol{\rho}_{13}| < \frac{4\mu\mu_3}{\gamma},$$

где

$$\gamma = \min\left(-2h, -\frac{2}{c^2}(4\mu^3 + c^2 h) + \frac{c^2 h^2}{2\mu(\mu + 4\mu_3)^2}\right).$$

1. Ситников К.А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел. ДАН СССР, 1960, **133**, 303–306.
2. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. — Москва-Ижевск: R and C, 2001.
3. Marchal C. The Three - Body Problem. — Oxford: Elsevier, 1990.
4. Chazy J. Sur l'allure finale mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croit indéfiniment. Ann. l'Ecole Norm. Supér., 3ème Sér., 1922, **39**, 29–130.

Вариационный метод расчета свободных колебаний тонких упругих оболочек

Ю. В. Троценко
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
trots@imath.kiev.ua

Исследованию колебаний оболочек посвящено большое количество публикаций как отечественных, так и зарубежных авторов.

При расчете собственных колебаний оболочек вращения наиболее широкое распространение получили метод конечных элементов и метод, основанный на сведении исходной однородной краевой задачи к последовательности задач Коши, для решения которых применяются методы типа Рунге–Кутта. Эти методы обладают большой универсальностью для широкого класса оболочек. Однако, при малой относительной толщине оболочки рассматриваемые краевые задачи переходят в разряд сингулярно возмущенных краевых задач. В этом случае, для построения решений с заданной точностью указанными методами, необходимо уменьшать шаг дискретизации, что в конечном счете приводит к существенному увеличению числа вычислений и возможной потере устойчивости вычислительного процесса до достижения предельных значений для искомых решений. В связи с этим возникает проблема разработки таких методов решения граничных задач для уравнений с малым параметром при старшей производной, которые бы имели одинаковую скорость сходимости, как при малых, так и при средних значениях параметра (равномерно сходящиеся методы по параметру).

Несмотря на свою привлекательность, метод Ритца не нашел должного применения при решении задач динамики оболочек. Это связано с проблемой выбора систем базисных функций, позволяющих эффективно аппроксимировать решения во всей области их определения.

Настоящий доклад посвящен развитию метода Ритца для решения задач о свободных колебаниях оболочек вращения в условиях их сингулярного возмущения. При этом, класс допустимых функций, на котором реализуется метод Ритца, строится на основе установленной структуры асимптотического разложения фундаментальной системы решений исходных уравнений. Для случая замкнутых в меридиональном направлении оболочек (куполообразные оболочки) учитывается также поведение прогибов оболочки в окрестности ее полюса, который является регулярной особой точкой для исходных уравнений.

Разработанный алгоритм решения задачи о колебаниях оболочки вращения на основе вариационного метода имеет одинаковую скорость сходимости при разных значениях относительной толщины оболочки. Кроме этого, предложенные системы базисных функций в методе Ритца обеспечивают поточечную сходимость решений и их первых четырех производных во всей области интегрирования уравнений.

Обзор случаев интегрируемости уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле

М. В. Шамолин

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Москва, Российская Федерация

shamolin@imec.msu.ru, shamolin@rambler.ru

Работа представляет собой некоторый обзор по полученным ранее, а также новым случаям интегрируемости в динамике многомерного твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Вид силового поля заимствован из пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой. Последнее значительно отличается от работ по интегрируемости уравнений движения многомерного тела в поле сил консервативном. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним [1–3].

Задача поиска полного набора трансцендентных (в смысле комплексного анализа) первых интегралов систем с диссипацией является достаточно актуальной, и ей было ранее посвящено множество работ. Введен в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Благодаря наличию в таких системах нетривиальных групп симметрий, показано, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии извне, так и ее рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике четырехмерного (а также многомерного) твердого тела в неконсервативном поле. В результате обнаружен ряд случаев интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима. Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле "в лоб" интегрировать основное уравнение динамики.

Работа также посвящена развитию качественных методов в теории неконсервативных систем, возникающих, например, в таких областях науки, как динамика твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой, теория колебаний и др. В принципе, данный материал может быть интересен как специалистам по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, динамики твердого тела, так и механики жидкости и газа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 12-01-00020-а.

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Издательство "Экзамен", 2007. – 352 с.
2. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 3–237.
3. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. матем. – 2010. – Т. 16. – Вып. 4. – С. 3–229.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ, ФІНАНСОВИХ ТА СТРАХОВИХ ПРОЦЕСІВ

MATHEMATICAL MODELING of ECONOMIC, FINANCIAL and INSURANCE PROCESSES

The New Intuitionistic Fuzzy Modal Operators: Uni-type Operators

G. Çuvalcioğlu[1], S. Yilmaz[1], T. L. Obuz[2]

[1]Mersin University, Mersin, Turkey

[2]Ataturk High School, Mersin, Turkey

gcuvalcioglu@mersin.edu.tr, sinemyilmaz@mersin.edu.tr, tugbalevent80@gmail.com

Intuitionistic fuzzy set was defined by Atanassov in 1983. Firstly, in 1999 some intuitionistic fuzzy modal operators which called one type and two type operators were defined by Atanassov. And he introduced the generalization of these modal operators, in 2001. After this study, in 2004 Dencheva defined second extension of these operators. The third extension of these operators was defined in 2005 by Atanassov. Çuvalcıoğlu, in 2007, introduced a new operator over Intuitionistic Fuzzy Sets which is generalization of Atanassov's and Dencheva's operators. At the same year, Atanassov defined an operator which is an extension of all these operators. The diagram of One Type Modal Operators(OTMO) on Intuitionistic Fuzzy Sets was introduced with this study by Atanassov. In 2010, Çuvalcıoğlu expanded the diagram of One Type Modal Operators on Intuitionistic Fuzzy Sets with the operator $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}$. Some properties and relationships of these operators were studied by several autors.. The last OTMO was defined by Çuvalcıoğlu in 2013 and at the same year, new Uni-type Operators which have properties of one type and two type modal operators, defined by same autor.

In this study, we were examined the evolution of diagram and characteristics properties of new modal operators.

1. Atanassov K.T., Intuitionistic Fuzzy Sets, VII ITKR's Session, Sofia, June (1983).
2. Atanassov K.T., Intuitionistic Fuzzy Sets, Phiysica-Verlag, Heidelberg, NewYork, (1999).
3. Atanassov K.T., Remark on Two Operations Over Intuitionistic Fuzzy Sets, Int. J. of Unceratanity, Fuzzyness and Knowledge Syst. Vol.9,No.1,(2001), p.71-75.
4. Atanassov K.T., On the type of intuitionistic fuzzy modal operators, NIFS Vol.11 (2005),5, 24-28.
5. Atanassov K.T., Some Properties of the operators from one type of intuitionistic fuzzy modal operators, Advanced Studies on Contemporary Mathematics, Vol.15 (2007),1, 13-20.
6. Atanassov K.T., The most general form of one type of intuitionistic fuzzy modal operators, Part 2, NIFS Vol.14 (2008),1,27-32.
7. Çuvalcıoğlu, G., Some Properties of $E_{\alpha,\beta}$ operator, Advanced Studies on Contemporary Mathematics, 14 (2007), 2, 305-310.
8. Çuvalcıoğlu, G., Expand the modal operator diagram with $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}$,Proc. Jangjeon Math. Soc., 13, (3), 2010
9. Çuvalcıoğlu, G., Yılmaz, S. Some properties of OTMOs on IFSs, Advanced Studies on Contemporary Mathematics, 20 (2010), 4, 621-628.
10. Çuvalcıoğlu, G., On the diagram of One Type Modal Operators on Intuitionistic Fuzzy Sets: Last Expanding with $Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}$, Iranian Journal of Fuzzy Systems,Vol.10 No.1,(2013), p.89-106
11. Çuvalcıoğlu, G. "New Unitype Operators on Intuitionistic Fuzzy Sets: $E^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}$, $B_{\alpha,\beta}$ and $\boxminus_{\alpha,\beta}$, Journal of Applied Mathematics, 2013, (at examination)

12. Dencheva K., Extension of intuitionistic fuzzy modal operators ⊞ and ⊠,Proc.of the Second Int. IEEE Symp. Intelligent systems, Varna, June 22-24, (2004), Vol. 3, 21-22.
13. Doycheva B., Inequalities with intuitionistic fuzzy topological and Gökhan Çuvalcıoğlu's operators, NIFS, Vol.14 (2008), 1, 20-22.

Mathematical approach to the resources and resource flows problem in economics

B. Fałda
State School of Higher Education in Chełm, Chełm, Poland
bfalda@pwsz.chelm.pl

Resources and resource flows are expressions used frequently to describe economics phenomena. In this presentation we show very strict definitions of these notions, usually considered primarily by applying terminology and tools of topology, measure theory and dynamical systems. The natural association between resources and resource flows, upon time, creates the basis for a dynamic economics system – DES. This system will be defined and its basic properties be presented. To complete our construction we will equip this system with a group of basic operations, a family of measures called preference system and time–deformation functions, taking it into dynamics in the form of a dual dynamical economic system – DES*. It leads directly to a definition of the economics values of resources and resource flows. The economics value can easily be adapted to different ideas connected with this notion.

Multicomponent conflict dynamical systems with limit cycles

T. V. Karataieva, V. D. Koshmanenko
Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
karat@imath.kiev.ua, koshman63@googlemail.com

We study the multicomponent model of complex dynamical system which describes the conflict interaction between alternative natural substances of type "fire - water" under periodical external influence. The model presents a simple version of the physical dynamical system describing redistribution of the heat energy (temperature) and the water content (humidity) along surface of a closed manifold. The time evolution is governed by the system of nonlinear differential equations for coordinates of stochastic vectors $p = (p_1, ..., p_n), r = (r_1, ..., r_n)$ corresponding to heat energy and water content:

$$\dot{p}_k = \tilde{p}_k(\theta + \tilde{r}_k^c), \quad \dot{r}_k = \tilde{r}_k(\theta + \tilde{p}_k^c), \quad k = 1, ..., n, \ n > 1,$$

where $\tilde{r}_k^c = 1 - \tilde{r}_k, \quad \tilde{p}_k^c = 1 - \tilde{p}_k, \ \theta$ denotes the conflict index, and

$$\tilde{p}_k(t) = \frac{p_k(t) + s_{\alpha_k}(t)}{z_p(t)}, \quad \tilde{r}_k(t) = \frac{r_k(t) + h_k(t)}{z_r(t)},$$

where $z_p(t), \ z_r(t)$ stand for normalization, $s_{\alpha_k}(t)$ are 2π-periodical functions describing the external heat influence, and $h = (h_1, ..., h_n)$ is a "wind" field corresponding to humidity changes.

Under some natural conditions we prove the existence of ω-limiting asymptotical cyclic trajectories $p_k^\infty(t), r_k^\infty(t)$ for all coordinates. Our proof is based on the abstract theorem of conflict [1] and Lyapunov's theorem (see, for example, [2]).

1. V. Koshmanenko. The Theorem of Conflict for Probability Measures, Math. Methods of Operations Research, (2004), **59**:2, 303–313.
2. C.L. Siegel, J.K. Moser. Lectures on Celestial Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.

Modeling of supply-demand dynamics

G. S. Osipenko[1], P. Steiner[2], V. V. Lebedev[3]

[1] Sevastopol Institute of Banking, Sevastopol, Ukraine

[2] University of Graz, Institute of Banking and Finance, Graz, Austria

[3] State University of Management, Moscow, Russia

george.osipenko@mail.ru, peter.steiner@uni-graz.at, lebedev.guu@gmail.com

In the present report describes the problem of modeling the economic dynamics based on the use of discrete nonlinear models. The paper continues research related to the construction of nonlinear dynamical models of the economy and the study of their properties [1, 2]. The report discusses the structure of the discrete model in which the dynamics of demand, supply and prices on the product described by a system of three differential equations The system has the following form

$$x_{n+1} = x_n \exp(a\frac{z_n - x_n}{z_n + x_n}),$$

$$y_{n+1} = y_n \exp(b\frac{z_{n+1} - x_{n+1}}{z_{n+1} + x_{n+1}}),$$

$$z_{n+1} = z_n \exp(c\frac{H - y_n \min(x_n, z_n)}{H + y_n \min(x_n, z_n)})$$

where x is a supply, y is a price, z is a demand, n is discrete time, the adaptive coefficients $a,\ b,\ c$ are positive, $\min(x, z)$ is value of the sale, the product $y \min(x, z)$ is the real cost, H is the desired level of expenditure.

The system has curve of balance or fixed points. It is shown that the system has an invariant foliation such that each layer is invariant to the system. Moreover, the restrictions of the system on all leaves are smooth equivalent. The existence of such foliation lets us to reduce the three-dimensional system to two-dimensional dynamics by eliminating the variable of price y. The reduced system has the following form

$$x_{n+1} = x_n \exp(a\frac{z_n - x_n}{z_n + x_n}),$$

$$z_{n+1} = z_n \exp(c\frac{1 - (x_n)^{b/a} \exp(b\frac{z_n - x_n}{z_n + x_n}) \min(x_n, z_n)}{1 + (x_n)^{b/a} \exp(b\frac{z_n - x_n}{z_n + x_n}) \min(x_n, z_n)})$$

The fixed point (1,1) is the balance. The study of the dynamics near the point of balance is complicated by the fact that the function $\min(x, y)$ is not differentiable at this point.

The system shows complicate dynamics that depends on the adaptive coefficients $a,\ b,\ c$. We can see the following bifurcations of topological portraits. The balance point is asymptotically stable. The balance becomes unstable, and a three-periodic asymptotically stable regime appears. The period-doubling bifurcation can take place when the parameters $a,\ b,\ c$ vary. Finally, there are chaotic (strange) attractors such that topologically different attractors occur for different collection of coefficients $a,\ b,\ c$.

1. В.В. Лебедев, К.В. Лебедев. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов.- М.: ООО "еТест", 2011.
2. G. S. Osipenko, T. N. Korzh, E. K. Ershov. Dynamics of price-level, national income and cost of money interaction. Международная конференция "Моделирование, управление и устойчивость MCS-2012". 10-14 сентября 2012 г. Севастополь, Крым, p. 158–159.

Defining and solving Pareto-Nash-Stackelberg control problems

V. A. Ungureanu
State University of Moldova, Chisinau, Moldova
v.a.ungureanu@gmail.com

Optimal control notion is extended and generalized by considering a control of Pareto-Nash-Stackelberg equilibrium type [1].

Equilibrium Principles for a Mixture of Hierarchical and Simultaneous Games are integrated with Control Processes by means of the best response mappings, Pareto optimal response mappings, intersection of mapping graphs, multilevel multicriteria optimization problems.

A direct solution principle is applied to linear mono-valued and set-valued discrete-time and continuous-time Pareto-Nash-Stackelberg control problems. Direct principle is compared with principles of Pontryagin and Bellman, which are applied to solve considered problems, too.

1. V.Ungureanu. Linear discrete-time Pareto-Nash-Stackelberg control problem and principles for its solving. Computer Science Journal of Moldova, 2013, volume 20, nr. 3(58), pages 1–21.

Представление решения одного стационарного уравнения теплопроводности с постоянным запаздыванием

Э. И. Азизбеков
Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
azel_ azerbaijan@mail.ru

Рассматривается уравнение теплопроводности с одним постоянным запаздыванием

$$u_t(x,t) = a_1^2 u_{xx}(x,t) + a_2^2 u_{xx}(x,t-\tau) + b_1 u_x(x,t) + b_2 u_x(x,t-\tau) +$$
$$+ c_1 u(x,t) + c_2 u(x,t-\tau) + f(x,t), \qquad (1)$$

определенное при $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$. Предполагается, что коэффициенты при производных также пропорциональны, а именно, существует постоянная α такая, что $b_1 = \alpha a_1^2$, $b_2 = \alpha a_2^2$. Рассматривается первая краевая задача. Начальное условие имеет вид

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad -\tau \leq t \leq 0, \qquad (2)$$

а краевые

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \geq -\tau, \qquad (3)$$

причем выполнено условие "согласования краевых и начальных условий"

$$\varphi(0,t) = \mu_1(t), \quad \varphi(l,t) = \mu_2(t), \quad -\tau \leq t \leq 0,$$

т.е. функция $u(x,t)$ на начальном промежутке времени в угловых точках непрерывна. Получено, что решение первой краевой задачи одномерного неоднородного уравнения теплопроводности с запаздыванием имеет вид

$$u(x,t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{L_n(t+\tau)} \exp_\tau\{D_n, t\}\Phi_n(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)} \exp_\tau\{D_n, t-\tau-s\}[\Phi_n'(s) - L_n\Phi_n(s)]ds \right\} \times$$
$$\times e^{-\frac{1}{2}\alpha x} \sin\frac{\pi n}{l}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^t e^{L_n(t-s)} \exp_\tau\{D_n, t-\tau-s\}F_n(s)ds\right] e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\sin\frac{\pi n}{l}x +$$
$$+\mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t) - \mu_1(t)\right], \qquad (4)$$

где

$$D_n = \left[c_2 - \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)a_2^2\right] e^{-\left[c_1 - \left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]\tau}, \quad L_n = c_1 - \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)a_1^2,$$

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \left\{\varphi(\xi,t) - \left[\mu_1(t) + \frac{\xi}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right]\right\} e^{-\frac{1}{2}\alpha\xi}\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,$$

$$F_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l F(\xi,t)e^{-\frac{1}{2}\alpha x}\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi,$$

$$F(x,t) = f(x,t) - \frac{d}{dt}\left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\} + \frac{b_1}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)] + \frac{b_2}{l}[\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)] +$$
$$+c_1\left\{\mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\} + c_2\left\{\mu_1(t-\tau) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\}. \qquad (5)$$

Модель экономической динамики с дискретным временем

Д. А. Бурлакова, Е. В. Круглов
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
groha@yandex.ru, kruglov19@mail.ru

В работе [1] исследовалась ситуация, когда в совершенно конкурентном мире, где экономическая активнсть наблюдается в течение бесконечного дискретного времени, в каждый период времени два товара, физический и инвестионный, производятся с использованием труда и капитала; и живут два поколения — работающие и пенсионеры. Поколения друг с другом финансово не связаны. При некоторых дополнительных условиях определяется двухсекторная модель перекрывающихся поколений с двумя поколениями (об истоках подхода, называемого перекрывающимися поколениями и о простейших моделях хорошо написано, например, в [2]).

Если в структуру перекрывающихся поколений ввести третье поколение, проживающее в один период с остальными двумя, детей, и задать финансовые потоки между поколениями (например, что старшее поколение не проживает все свои доходы без остатка, а часть оставляет в наследство внукам), то получающиеся при этом модели часто называют моделями перекрывающихся поколений с альтруизмом (см., например,[3]).

Мы предполагаем, что в условиях работы [1] живут три поколения - дети, работающие и пенсионеры. В работе вводятся структура доходов поколения и описываются финансовые взаимоотношения между поколениями. В качестве производственной функции рассматривается функция Кобба-Дугласа, функция полезности жизненного цикла предполагается аддитивно сепарабельной в смысле [2, стр.4], а в качестве мгновенной функции полезности [2, стр.5] рассматривается функция полезности с постоянной межвременной эластичностью замещения. При некоторых дополнительных условиях рассматривается динамика капитала и цены физического товара. В частном случае получена трехмерная динамическая система с дискретным временем.

1. Galor O. A Two-Sector Overlapping-Generations Model: A Global Characterization of the Dynamical System // Econometrica, Vol. 60, No. 6. (Nov., 1992), pp. 1351-1386.
2. De la Croix D., Michel P. A Theory of Economic Growth Dynamics and Policy in Overlapping Generations. Cambridge University Press, 2004.
3. Michel P. and Pastieau P. Fiscal Policy with Agents Differing in Altruism and Ability // Economica, New Series. 2005. Vol. 72. №285. P.121-135.

Розрахунок імовірності дефолту контрагентів банку

Буцан Є. Г.
ВАТ "Укрексімбанк", Київ, Україна
yegor.butsan@gmail.com

Обчислення ймовірності дефолту контрагентів банку – одне з найважливіших завдань, яке стоїть перед підрозділами ризик-менеджменту фінансової установи. Цей показник є необхідним, щоби розраховувати такі параметри кредитного ризику, як очікувані та непередбачувані збитки (Expected and Unexpected losses); вдало керувати цим видом ризику; виконувати вимоги міжнародних та місцевих органів банківського нагляду (Базель 2, 3), аудиторських та рейтингових компаній.

Для знаходження ймовірності дефолту (Probability of default - PD) найбільш відомим і поширеним підходом є актуарний, який базується на основі аналізу історії бази даних дефолтів, що має бути в наявності у банка. Цей підхід поділяється на два основних ймовірнісних метода: метод Альтмана, в якому досліджуються суми неповернених кредитів в абсолютному вигляді; метод S&P (Moody's), де використовується кількість клієнтів, що не повернули кредити, в якості спостережень випадкової величини від події дефолту. Слід зазначити, що PD, як правило, обчислюється на періоди, кратні одному року у майбутнє. Тобто це імовірність того, що клієнт оголосить дефолт впродовж наступного (або -го) року з моменту видачі кредиту (або переоцінки рейтингу).

Вищенаведені алгоритми використовуються більшістю фінансових установ світу, які виконують вимоги Базельського Комітету за Банківським наглядом. Але для українського банківського сектору є можливість їх застосування тільки при розрахунках на періоди до двох років, за причини наявності статистичних баз даних дефолтів та міграцій рейтингів клієнтів, тільки починаючи з 2000 року. Тому, автор пропонує використовувати новий – експертний підхід для цієї мети. Він полягає в наступному: відбувається адаптація даних міжнародних рейтингових компаній по розрахунках PD (на періоди 3-15 років) до власних розрахунків банку (на перші 2 роки) за лінійним алгоритмом. З точки зору теорії ймовірностей цей підхід є коректним і чи не єдиним можливим в умовах ринків, що розвиваються, до яких належить Україна. Недоліком підходу є наближеність обчислень та відсутність достатньої інформації щодо бек-тестінгу отриманих результатів.

Всі методи, що розглядаються, було запрограмовано та опрацьовано в банку “Укрексімбанк”. Отримані результати відповідали дійсності та на їх основі вже котрий рік приймаються управлінські, обчислювальні та моніторингові рішення щодо кредитних ризиків і кредитної політики установи.

Завдяки отриманим даним банки матимуть можливість виконувати вимоги МСБО (IAS 39) - формування резервів під знецінені кредити та МСБО 7 (IAS 7) - розкриття інформації щодо ризиків банку, окрім того - здійснювати ціноутворення кредитних інструментів.

Подальші дослідження будуть концентруватись навколо калькуляції таких показників як LGD (Loss given default) та EAD (Exposure at default) для врахування впливу вартості забезпечення та ринкової вартості кредиту на очікувані та непередбачувані збитки банку.

Характеризаційні теореми для принципу еквівалентної корисності страховика

В. О. Дрозденко

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

drozdenko@yandex.ru

Нехай X це випадкова величина (не обов’язково невід’ємна) яка відображає розмір страхової компенсації пов’язаної з певною страховою угодою. Премію, яку слід заплатити при укладанні угоди за покриття ризику X, позначатимемо $\pi[X]$.

Нетто премія означається, як математичне сподівання розміру страхової компенсації асоційованої з ризиком X, тобто $\pi_{\text{нетто}}[X] := \mathsf{E}[X]$. *Експоненційна премія* для ризику X означається наступним чином

$$\pi_{\text{експ.}(\beta)}[X] := \frac{1}{\beta}\log(\mathsf{E}[e^{\beta X}]), \quad \text{для} \quad \beta > 0.$$

Премія еквівалентної корисності клієнта для ризику X означається як розв’зок рівняння

$$U(W) = \mathsf{E}[U(W + \pi_{\text{е.к.с.}}[X] - X)],$$

а *премія нульової корисності клієнта*, — як розв’зок рівняння

$$U(0) = \mathsf{E}[U(\pi_{\text{н.к.с.}}[X] - X)],$$

тут W — це розмір капіталу страхової компанії на момент укладання страхової угоди, а функція $U(x) \in C_2(\mathbb{R})$ — це функція корисності капіталу страховика, яка є такою, що $U'(x) > 0$ та $U''(x) \leq 0$ для $x \in \mathbb{R}$.

Говоритимемо, що метод підрахунку вартості страхових контрактів $\pi[X]$ володіє властивістю: *адитивності*, якщо для будь-яких двох незалежних ризиків X_1 та X_2 виконується рівність $\pi[X_1 + X_2] = \pi[X_1] + \pi[X_2]$; *консистентності*, якщо для будь-якого ризику X та довільної дійсної константи c виконується рівність $\pi[X + c] = \pi[X] + c$; *ітеративності*, якщо для будь-яких двох ризиків X та Y виконується рівність $\pi[\pi[X|Y]] = \pi[X]$; *мультиплікативної інваріантності*, якщо для довільного ризику X та довільної позитивної дійсної сталої Θ виконується рівність $\pi[\Theta X] = \Theta\,\pi[X]$.

Теорема 1. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю адитивності тоді й лише тоді, коли* $U(x) = ax + b$, *для* $a > 0$, *чи* $U(x) = -\alpha e^{-\beta x} + \gamma$, *для* $\min[\alpha, \beta] > 0$, *тобто, лише у випадках коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 2. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю консистентності при довільному виборі функції корисності $U(x) \in C_2(\mathbb{R})$ такої, що $u'(x) > 0$ та $u''(x) \le 0$ для $x \in \mathbb{R}$.*

Теорема 3. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю ітеративності тоді й лише тоді, коли $U(x) = ax+b$, для $a > 0$, чи $U(x) = -\alpha e^{-\beta x}+\gamma$, для $\min[\alpha, \beta] > 0$, тобто, лише у випадках коли він співпадає або з нетто принципом, або з експоненційним принципом.*

Теорема 4. *Принцип еквівалентної/нульової корисності страховика володіє властивістю мультиплікативної інваріантності тоді й лише тоді, коли $U(x) = ax + b$, для $a > 0$, тобто, лише у випадку його співпадання з нетто принципом.*

1. H. Bühlmann. Mathematical Methods in Risk Theory. – Berlin: Springer, 1970.
2. H. U. Gerber. An Introduction to Mathematical Risk Theory. – Philadelpia: S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, 1979.
3. E. Kremer. Applied Risk Theory. – Aachen: Shaker, 1999.

Скорінгова модель імовірності повернення кридиту фізичною особою

В. А. Касьянова

Одеський державний аграрний університет, Одеса, Україна

kabak-a@mail.ru

Багато економічних явищ описуються за допомогою різних економетричних регресійних моделей. Невідомі параметри цих моделей знаходяться за допомогою методу найменших квадратів. Сучасні потреби банківського середовища вимагають відповіді на питання кредитоспроможності позичальника. Скорінгова економетрична модель допомагає визначити імовірність того, що позичальник поверне кредит. Особливістю скорінгових моделей є те, що результуюча змінна Y повинна приймати лише два фіксовані значення . В задачі оцінки кредитоспроможності фізичної особи це 0 або 1. 1 відповідає дефолту, а 0 протилежній ситуації. Для оцінки параметрів такої неможливе використання методу найменших квадратів, тому використовується метод максимальної правдоподібності.

$$Y = \exp\left(b_0 + b_1x_1 + ... + b_nx_n\right)/(1 + \exp\left(b_0 + b_1x_1 + ... + b_nx_n\right)), \tag{1}$$

де b_i- параметри моделі (скорінгові ваги),

x_i- незалежні змінні (скорінгові характеристики).

В роботі побудована така логіт-модель залежності імовірності дефолту позичальника від 11 незалежних змінних. Модель була побудована з використанням StatSoftStatistica. Вихідні дані були отримані з 5700 анкет позичальників.

1. Касьянова В.А. Скорінгова модель оцінки кредитоспроможності фізичних осіб в банку. Економіка та держава, 2013, 6, 34-38.
2. Носко В.П. Эконометрика для начинающих. — М: ИЭПП, 2005.
3. Боровиков В. Искусство анализа данных на компьютере. — М: Питер, 2003.

О математических моделях динамики цен акций с гиперэрланговскими скачками

А. С. Кожевников, К. А. Рыбаков
Московский авиационный институт, Москва, Россия
exequit@yandex.ru, rkoffice@mail.ru

В докладе рассматриваются новые модели динамики цен акций, включающие стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой. Предлагается использовать гиперэрланговский поток скачков цены акции. Это позволяет включить пуассоновский и эрланговкий потоки как частные случаи, обобщить существующие модели (например, модели Мертона, Коу, Рамезани–Зенга и др. [1–4]) и исследовать их при скачках, интервалы времени между которыми могут описываться не только показательным законом распределения.

Новые модели позволяют задавать цену акции $X(t)$ процессом в непрерывном времени, порождаемым аддитивной смесью диффузионного и скачкообразного процессов, который можно представить как решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = (\mu - \xi)X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) + X(t)dQ(t), \quad X(0) = X_0,$$

где $X \in [0, +\infty)$, $t \geqslant 0$, μ – ожидаемая доходность, ξ – параметр, учитывающий влияние скачка на доходность цены, σ – волатильность, $W(t)$ – винеровский случайный процесс, $Q(t)$ – скачкообразный случайный процесс. Начальная цена X_0 имеет заданное распределение или фиксирована.

Рассматриваются два варианта, в которых промежутки времени между скачками цен описываются эрланговскими распределениями с заданными параметрами (рассмотрен случай, когда имеются два различных эрланговских закона распределения).

Первый вариант предусматривает случайный выбор одного из двух законов в соответствии с результатом моделирования вспомогательной дискретной случайной величины с распределением Бернулли, второй основан на чередовании. Параметры эрланговских законов распределения промежутков времени между скачками цен и распределения величин скачков задают случайный процесс $Q(t)$ с кусочно-постоянными траекториями.

Представленные модели могут быть усложнены для учета зависимости ожидаемой доходности или волатильности от времени, при рассмотрении портфеля ценных бумаг и т.п. Важным моментом является возможность использования для исследования описанных моделей математического аппарата, применяемого для анализа систем со случайной структурой [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а).

1. Merton R.C. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous // Journal of Financial Economics. – 1976. V. 3. – P. 125–144.
2. Kou S.G. A Jump-Diffusion Model for Option Pricing // Management Science. – 2002. V. 48. № 8. – P. 1086–1101.
3. Ramezani C.A., Zeng Y. Maximum Likelihood Estimation of the Double Exponential Jump-Diffusion Process // Annals of Finance. – 2007. V. 3. № 4. – P 487–507.
4. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Математические модели динамики цены акций с эрланговскими скачками // Научный альманах. Вып. 16: Материалы VIII научно-практической конференции молодых ученых и студентов «Инновационный менеджмент в аэрокосмической промышленности». – М.: Изд-во «Доброе слово», 2012. – С. 156–161.
5. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. – М.: Физматлит, 1993.

Оптимізація виробничих процесів сільськогосподарських підприємств.

О. В. Кравець

Таврійський агротехнологічний університет, Мелітополь, Україна

v_i_kravets@list.ru

Постановка задачі. Земля у сільському господарстві є головним елементом виробництва, отже від її раціонального використаннябезпосередньо залежить ефективність діяльності галузі. Емпірично вирішувати таку задачу надто складно, оскільки це пов'язано з великими витратами коштів і тривалим часом. Досягти мети можливо шляхом створення моделей використання площі на рівні підприємства.

Система критеріїв оптимальності

Ефективне надходження коштів від реалізації:

$$Z = \sum_{m \in M} c_{m+1} x_{m+1} \to max, \tag{A}$$

Надходження продукції на реалізацію:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \to max, n \in \mathbb{N} \tag{B}$$

Система обмежень

Обмеження з використання площі:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = B, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

Обмеження з обсягу площі зайнятої під окремими культурами:

$$b_{jmin} \leq \sum_{j=1}^{n} x_j \leq b_{jmax} n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

Обмеження з надходження коштів:

$$\sum_{m \in M, r \in \mathbb{R}} c_{m+r} x_{m+r} - c_{m+r+1} x_{m+r+1} \geq 0, \tag{3}$$

Отримані результати. Запропоновані нами економіко - математичні моделі, для оптимізації структури посівних площ, були апробовані на підприємствах Запорізької та Херсонської області.

Для підприємств Херсонської області, галузь овочевідство, отримані наступні результати: виручка від реалізації збільшилася на 25%, витрати на виробництво збільшаться всього на 4%, відповідно прибуток збільшиться більш ніж у 2 рази, рівень рентабельності збільшиться на 23 п.п.

Для підприємств Запорізької області, галузь рослинництво, отримані наступні результати: виручка від реалізації зменшиться на 20%, витрати на виробництво зменшаться на 35%, прибуток збільшиться на 37%, рівень рентабельності збільшиться на 30 п.п.

Нелинейные динамические макроэкономические модели Кейнсианского типа

В. В. Лебедев [1], К. В. Лебедев [2]

[1] Государственный университет управления, Москва, Россия

[2] Центр исследований и статистики науки, Москва, Россия

lebedev.guu@gmail.com, kos.lebedev@gmail.com

Кейнсианская “IS – LM”-модель до сих пор служит одним из главных инструментов анализа управленческих решений на макроэкономическом уровне [1]. Основные конструкции этой модели – кривые IS и LM – представляют собой линии нулевого уровня двух функций: избыточного спроса на товары и избыточного предложения денег соответственно. Эти линии пересекаются не более чем в одной точке, которая определяет равновесие на рынке товаров и рынке денег. Обычно предполагается, что макроэкономическая система находится в состоянии равновесия, которое восстанавливается при его нарушении. Поэтому основным методическим приемом анализа экономической динамики служит метод сравнительной статики, опирающийся на исследование смещения точки равновесия статической модели.

В последние годы в связи с развитием эволюционной (синергетической) экономики на смену статическим моделям приходят нелинейные динамические модели, которые могут иметь как устойчивые, так и неустойчивые стационарные состояния. В докладе приводятся различные варианты нелинейной макроэкономической модели кейнсианского типа, которая отражает динамику национального дохода и ставки процента, а также результаты их исследования. В обсуждаемых вариантах модели приращения названных фазовых переменных зависят от значений функций избыточного спроса на товары и избыточного предложения денег. Построенная модель является развитием подхода, использованного авторами в монографии [2]. Приведенные в докладе примеры компьютерных расчетов траекторий различных вариантов модели демонстрируют существование как устойчивых, так и неустойчивых стационарных решений. Показано, что некоторые варианты модели обладают свойством бифуркации удвоения периода. Отмечена формальная связь разработанных моделей с некоторыми моделями популяционной динамики. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 13-06-389).

1. Харрис Л. Денежная теория. М.: Прогресс, 1990.
2. Лебедев В. В., Лебедев К. В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов. — М.: ООО «еТест», 2011.

Модель растущего инвестирования типа модели Дж. фон Неймана

А. К. Малютин[1], Т. И. Малютина[2]

[1]Сумский национальный аграрный университет, Сумы, Украина

[2]Украинская академия банковского дела Национального банка Украины, Сумы, Украина

alekmal_2005@yahoo.com, malyutinkg@yahoo.com

Для характеристики инвестиционного процесса в экономической безопасности страны наиболее присущей является абстрактная модель растущего инвестирования типа модели Дж. фон Неймана, которая была сформулирована в начале 30-х годов XX века. Она является первой наиболее известной абстрактной моделью растущей экономики. Пусть

$Y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$ – m-мерный вектор результата инвестиций в момент времени t. Координата $y_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, означает результат инвестирования в i-ю отрасль. Через $X(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ обозначим m-мерный вектор экономической угрозы в момент времени t. Среди множества пар векторов (X, Y) выделим инвестиционно-допустимые пары, которые будем называть инвестиционными процессами. Инвестиционно-возможной траекторией будем называть последовательность: (X_t, Y_t), $t = 1, \dots, T-1$. Такая траектория допустима, если вектор X_0 совпадает с заданным начальным состоянием. Допустимые траектории отличаются, в частности, способами связывания в них разных инвестиционных процессов (X_t, Y_{t+1}).

Если инвестиции воспроизводятся в замкнутой инвестиционной среде, то в этом случае инвестиционно-возможная траектория имеет вид: $\{X_t\}$, $t = 1, \dots, T-1$. Этот тип траекторий можно использовать тогда, когда исследуются предельные возможности инвестирования. Второй вид траекторий учитывает инвестирование в явном виде. Инвестиции распределяют на две части – страхование рисков и чистое инвестирование: $Y_t = X_t + C_t$. Для такого вида траекторий понятие риска трансформируется. Выделение эффективных траекторий среди допустимых осуществляется только путем сравнения векторов чистого инвестирования.

Каждому инвестиционному процессу (X, Y) отвечает число: $\eta(X, Y) = \min\limits_i \dfrac{y_i}{x_i}$, называемое темпом роста этого инвестиционного процесса. Инвестиционным темпом роста называется число: $\eta_0 = \max\{\eta(X, Y) | (X, Y)\}$.

При обычных предположениях инвестиционному темпу роста будет отвечать траектория $\{X_t | X_t = \eta_0^t X_0\}$, $t = 1, \dots, T$, которую еще будем называть магистралью или траекторией максимального сбалансированного инвестирования. Впервые существование магистрали в структурных моделях экономической динамики заметил Дж. фон Нейман [1]. Магистраль является эффективной траекторией для любого конечного интервала времени. Особенности магистрали заключаются в том, что на ней достигается максимальный (инвестиционный) темп роста при неизменной структуре.

1. Дж. Нейман. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.
2. А. К. Малютин. формирование новых методических подходов инвестиционного анализа в экономической безопасности страны. Вектор науки Тольяттинского государственного университета. Серия: Экономика и управление, 2012, 4(11), 117–120.

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В АВТОРЕГРЕССИЮ

С. Н. Новак
Севастопольский институт банковского дела, Севастополь, Украина
s.novak@ukr.net

Авторегрессионные модели для анализа статистических данных приобрели особую популярность после публикации известной работы Бокса и Дженкинса [1]. В данной работе предложено ряд методов построения, идентификации, подгонки и анализа временных рядов и динамических систем на основе авторегрессионных моделей, продемонстрирована возможность использования этих моделей в таких прикладных областях, как прогнозирование временных рядов, определение передаточной функции системы, проектирование регулирующих схем с прямой и обратной связью.

Практический опыт показал, что принцип авторегрессии дает отличные результаты и для прогнозирования детерминированных процессов, что и послужило поводом к поиску математического объяснения этому наблюдению. Основной результат данного исследования сформулирован в виде следующего утверждения:

Теорема. *Функцию $f(x)$, которая имеет $(n-1)$ непрерывных производных $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ в замкнутом промежутке $[x_0,\ x_0 + n\,\Delta x]$ и нулевую n-ю производную $f^{(n)}(x) = 0$ в открытом промежутке $(x_0,\ x_0 + n\,\Delta x)$, можно выразить с помощью рекуррентной зависимости через значения этой же функции в равностоящих точках $x + \Delta x,\ x + 2\Delta x,\ ...,\ x + n\Delta x$*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} C_n^i \cdot f(x + i \cdot \Delta x),$$

где C_n^i — биномиальные коэффициенты Ньютона

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Для доказательства этого утверждения рассмотрим конечные разности высших порядков. Приращение функции $f(x)$ при изменении аргумента на величину Δx (необязательно бесконечно малой) назовем первой разностью функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, второй разностью назовем первую разность от первой разности $\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)$. Тогда n-я разность определяется индуктивно, как $\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)]$, и определяется формулой

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+n} C_n^i \cdot f(x + i \cdot \Delta x). \qquad ()2$$

На основании определения дифференциала n-я разность связана с n-й производной следующей зависимостью $\Delta^n f(x) = f^{(n)}(\xi_n) \cdot \Delta x^n$, где $x_0 < (\xi_n) < x_0 + n\ \Delta x$. Так как в промежутке $(x_0,\ x_0 + n\,\Delta x)$ $f^{(n)}(x) = 0$, то $\Delta^n f(x) = 0$, а выражение (2) превращается в равенство $\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+n} C_n^i \cdot f(x + i \cdot \Delta x) = 0$. Выразив слагаемое с индексом $i = 0$, найдем искомую рекуррентную зависимость (1).

Формула (1) является экстраполятором, который (при указних условиях) позволяет без установления функциональной зависимости с аргументом, путем рекуррентных вычислений, находить точные значения функции в равноотстоящих точках по n—первым известным значениям этой функции.

1. Дж. Бокс, Дженкинс. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / пер. с англ. А.Л. Левшина, — М.:, Мир, 1974. — Вып. 1.

Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с потерями, абсолютным приоритетом и входящим рекуррентным потоком требований

А. И. Песчанский

Севастопольский институт банковского дела Украинской академии банковского дела Национального банка Украины, Севастополь, Украина

peschansky_sntu@mail.ru

В однолинейную систему обслуживания с потерями поступает рекуррентный поток требований, который порождается случайной величиной β с абсолютно непрерывной функцией распределения $G(t) = P\{\beta \le t\}$ и плотностью $g(t)$. Поступающие в систему требования имеют различные ранги. Вероятность того, что требование потока имеет ранг i, равна p_i, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Время обслуживания требования зависит от его ранга. Требования i-го ранга обслуживается время α_i с абсолютно непрерывной функцией распределения $F_i(t) = P\{\alpha_i \le t\}$ и плотностью $f_i(t)$.

В процессе обслуживания устанавливается следующий приоритет: если в систему, занятую обслуживанием требования j-го ранга, поступает требование i-го ранга, то поступившее требование теряется при $i \le j$. Если ранг i поступившего требования выше ранга j обслуживаемого требования, т. е. $i > j$, то прерывается обслуживание требования j-го ранга и начинается обслуживание поступившего требования более высокого ранга. При этом недообслуженное требование считается потерянным.

С использованием теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний построена модель функционирования описанной системы обслуживания и на ее основе определены следующие стационарные характеристики:

– финальные вероятности того, что система находится в свободном состоянии; прибор занят обслуживанием требования i-го ранга, $i = \overline{1, n}$;

– средние стационарные времена пребывания системы в указанных состояниях;

– средняя длительность периода между соседними моментами началами обслуживания требований при условии обслуживания в начале периода требования определенного ранга;

– средняя длительность периода между двумя соседними моментами начала обслуживания новых требований.

Так, например, финальная вероятность того, что система находится в свободном состоянии, определяется формулой

$$p_0^* = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{E\alpha_i - \frac{1-\pi_i}{\pi_i} \int\limits_0^\infty \overline{F_i}(t) H_g^{(\pi_i)}(t)\, dt}{E\beta \prod\limits_{k=i}^{n} (1 + \frac{p_k}{\pi_k} \overline{N}_{k,loss})}.$$

Здесь $\pi_i = \sum\limits_{k=1}^{i} p_k$,

$$\overline{N}_{k,loss} = \int\limits_0^\infty f_k(t) H_g^{(\pi_k)}(t)\, dt$$

— среднее число требований, потерянных за время обслуживания требования k-го ранга; $H_g^{(\pi_k)}(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi_k^n G^{*(n)}(t)$ — функция восстановления обрывающегося процесса восстановления при $k = \overline{1, n-1}$, и обычного процесса восстановления при $k = n$; $E\alpha_i$, $E\beta$ — математические ожидания случайных величин α_i и β соответственно.

В случае частных видов распределения величин α_i и β, полученные формулы совпадают с ранее известными.

Интервальные эволюционные индексы социально-экономических показателей Российской Федерации

В. Н. Самойлов [1], Т. В. Тюпикова [1], В. Д. Фурасов [2]
[1] Объединенный Институт Ядерных Исследований, Дубна, Россия
[2] Государственный Университет Управления, Москва, Россия
Furasov@mail.ru, Tanya@jinr.ru

До сих пор основной подход к формализованному анализу статистики социально-экономических процессов связан с применением сложившихся в эконометрике методов построения стационарных моделей, которые включают,прежде всего, методы корреляционного и регрессионного анализа. В предлагаемой вниманию работе развивается подход к анализу статистики социально-экономических процессов, в основе которого лежат нестационарные динамические модели развития, совместимые с результатами статистического наблюдения [1, 2]. При использовании принятой авторами терминологии модель называется совместимой с результатами наблюдения, если ее эволюция (при выполнении некоторых дополнительных условий) происходит по траекториям,совпадающим с наблюдаемыми процессами. В противном случае она называется несовместимой с результатами наблюдения. Для анализа экономических процессов авторы используют эволюционные индексы, которые характеризуют развитие национальной экономики в целом и ее отдельных отраслей. В докладе обсуждаются общие вопросы, связанные с построением динамических моделей в условиях ограниченной реально доступной статистической информации и построением интервальных эволюционных индексов социально-экономических показателей; дан обзор результатов показателей развития РФ по 8 федеральным округам, республикам, краям, областям, городам федерального значения, автономной области, автономным округам России, т. е. по 93 областям и субъектам РФ. В основе проводимых исследований лежат статистические данные [3], представленные Российским статистическим ежегодником.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-06-00389).

1. Фурасов В. Д. Динамика развития: модели, индексы, оценки. М.: «Academia», 1998.
2. Фурасов В. Д., Фурасов Д. В. Динамический анализ статистики социально-экономического развития. М.: «Спутник+», 2012.
3. Российский статистический ежегодник. 2011: Стат. сб./Росстат/-М., 2011.

Вплив сонячної активності на захворюваність

З. Ю. Філєр, А. С. Чуйков

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кіровоград, Україна

filier@rambler.ru, chuikovartem@gmail.com

О. Л. Чижевський установив вплив сонячної активності (СА) на виникнення та перебіг захворювань ще у 20-х роках XX ст. За допомогою математичної статистики встановлюється вплив середньорічних, середньомісячних та щоденних коливань СА не тільки на епідемічні, а й на інші різні типи хвороб.

Для дослідження зв'язку СА з річними коливаннями захворюваності використано статистичні дані Кіровоградської області за період з 1989 по 2011 рр. Дослідження проводилося з використанням *методу накладання епох*, який дає змогу усереднити дані за багато років, тим самим зменшивши у значній мірі вплив на загальний результат випадковості та побачити найбільш імовірну закономірність зв'язку СА та захворюваності [3, с. 89]. Аналіз *загальної* захворюваності населення виявив підвищення випадків вперше зареєстрованих хвороб в роки «активного» та зниження захворюваності в роки «спокійного» Сонця. При розгляді різних типів хвороб виявлено високі коефіцієнти кореляції та лаги захворюваності відносно СА. Наприклад, коефіцієнт кореляції r між СА та хворобами системи кровообігу рівний 0.94, випередження максимуму захворюваності відносно максимуму СА на 1 рік пояснюється тим, що визначальним фактором впливу є не абсолютне значення СА, а *швидкість* її зростання, тобто похідна СА по часу.

З метою дослідження впливу *добових* коливань СА на зміну захворюваності, були використані щоденні дані захворюваності на судинні, неврологічні та ендокринні хвороби, зібрані у відділі статистики обласної лікарні. Для вилучення нерівномірності звертань людей до лікарні протягом тижня було знайдено середньо-тижневі дані СА та захворюваності судинними хворобами. Між цими процесами $r{=}0{,}55$ (зі зсувом захворюваності на 1 тиждень назад, який пояснюється тим, що сонячний вітер доходить до Землі через 2-4 доби, і тим, що люди звертаються до лікаря через деякий час після загострення хвороби).

Досліджувався зв'язок між СА та туберкульозом як інфекційною хворобою. Виявлено вплив «магнітних» чисел Вольфа на захворюваність туберкульозом у Кіровоградській області: $r{=}0{,}81$; запізнення захворюваності відносно СА складає 4 роки. 22-х річний період СА, з яким тісно пов'язаний туберкульоз, це життя одного покоління (від батька до сина). Можливо, збудник хвороби - паличка Коха - пристосовується до мінливих та несприятливих для неї умов навколишнього середовища й відповідних ліків та з періодичністю в 22 роки знову проявляється з більшою силою, бо «старі» ліки вже не діють. За допомогою створеної програми EXTRAPOL, яка дає змогу знаходити тригонометричні тренди, у яких частоти не є кратними основній частоті (на відміну від многочленів Фур'є), були знайдені гармоніки та порівняні частоти процесів, у результаті чого отримали високе значення $r{=}0{,}98$, який вказує на схожий характер коливань цих процесів.

На основі знайденого рівняння регресії побудовано прогноз захворюваності, згідно якого очікується спад захворюваності на туберкульоз у найближчі 4 роки майже на 18%. Пропонується розглядати кореляцію як міру колінеарності масивів-векторів.

1. Філєр З.Ю., Чуйков А.С. Сонячна активність та захворюваність // Український медичний альманах. — Луганськ, 2012. — Том 15, №3 (додаток). — С. 59-63.
2. Чижевский А.Л. Земное эхо солнечных бурь. 2-е изд. — М.: Мысль, 1976. — 367 с.
3. Ягодинский В.Н. Александр Леонидович Чижевский. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Stability of Stochastic Systems on Time Scales

A. O. Bratochkina
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
abratochkina@gmail.com

We consider a system of stochastic differential equations on a time scale $\mathbb{T}$

$$d^{\triangle}X(t) = b(t, X)d^{\triangle}t + \sum_{r=1}^{k} \sigma_r(t, X)d^{\triangle}W_r(t), \tag{1}$$

where $d^{\triangle}t$ is Δ-differential and $d^{\triangle}W$ is Δ-stochastic differential. We investigate trivial solution's stability of system (1) in the terms of Lyapunov functions. It is assumed that $X(t)$, $b(t, X)$, $\sigma_r(t, X)$ are vectors from $\mathbb{E}_l$, $W_r(t)$ are independent Wiener processes. Also let coefficients b, σ_r satisfy Lipschitz condition over x in every bounded domain and $b(t, 0) = \sigma(t, 0) \equiv 0$.

Definition *The trivial solution of (1) is said to be stable in probability for $t \geq 0$ if for any $s \geq 0$ and $\varepsilon > 0$ the following holds*

$$\lim_{x \to 0} P\{\sup_{t>s} |X^{s,x}(t)| > \varepsilon\} = 0.$$

We use such notations as $\{t > 0\} \bigcap \mathbb{T} = \{t > 0\}^T$ and $\rho(t) = \sup\{s < t, s \in \mathbb{T}\}$.

Theorem *Let in a domain $\{t > 0\}^T \times U$, which contains a line $x = 0$, there exist positive-definite Lyapunov function $V(t, x)$ such that $V_t^{\triangle} \in L_{1,loc}(\{t > 0\}^T \times U)$, V_x, V_{xx} are continuous, $V(\rho(t), x) = V(t, x)$ and satisfies for $x \neq 0$ the subsequent condition*

$$LV = \frac{\partial^{\triangle} V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{l} b_i(t, x)\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(t, x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0.$$

Then a trivial solution of (1) is stable in probability.

Solution of Evolutionary Stochastic Differential Equations with Multiplicative Methods

G. P. Butsan
Yu.A. Mitropolskiy International Mathematical Center of the NAS of Ukraine
george.butsan@gmail.com, gbutsan@voliacable.com

The main idea is in the decomposition of a given evolutionary stochastic differential equation into some simpler parts, solution of each part, and the following multiplicative composition of the obtained solutions to get the solution of the input equation with the use of the new notions of mixed product $\boxtimes$ and mixed sum $\boxplus$ introduced by the author. Some examples are considered.

For the evolutionary operator multiplicative system $U(s, t)$, $U(s, t) = U(s, \tau)U(\tau, t)$, $0 \leq s \leq \tau \leq t$, in some Hilbert space $\boldsymbol{H}$, we consider also its infinitesimal evolutionary additive operator system $Y(s, t) = \lim \sum\limits_{k=1}^{n} (U(s_{k-1}, s_k) - I)$, $\delta_n = \max(s_k - s_{k-1}) \to 0$, where lim was taken in some norm on $\boldsymbol{H}$, $MU(s,t) = I$, $MY(s,t) = 0$, $0 \le s \le s_k \le t \le T$. For them, we have the formulas (G. Butsan)

$$U(s,t) = \lim \prod_{k=1}^{n} (Y(s_{k-1}, s_k) + I),\ U(s,t) = I + \int_s^t U(s,\tau) dY(s,\tau),\ dU(s,t) = U(s,t)dY(s,t).$$

For independent $U_1(s,t)$, $U_2(s,t)$ and corresponding $Y_1(s,t)$, $Y_2(s,t)$, $Y(s,t) = Y_1(s,t)+Y_2(s,t)$:

$$U(s,t) = U_1(s,t) \boxtimes U_2(s,t) = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{n} U_1(s_{k-1}, s_k) U_2(s_{k-1}, s_k) = (Y_1(s,t) + I) \boxtimes (Y_2(s,t) + I) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{n} (Y_1(s_{k-1}, s_k) + I)(Y_2(s_{k-1}, s_k) + I) = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{n} (Y_1(s_{k-1}, s_k) + Y_2(s_{k-1}, s_k) + I).$$

For dependent $U_1(s,t)$, $U_2(s,t)$ and corresponding $Y_1(s,t)$, $Y_2(s,t)$, the next new results are true:

$$\exists Y_1(s,t) \boxplus Y_2(s,t) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} Y_1(s_{k-1}, s_k) Y_2(s_{k-1}, s_k),\ Y(s,t) = Y_1(s,t) + Y_2(s,t) + Y_1(s,t) \boxplus Y_2(s,t),$$

$$U(s,t) = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{n} (Y_1(s_{k-1}, s_k) + Y_2(s_{k-1}, s_k) + Y_1(s_{k-1}, s_k) \boxplus Y_2(s_{k-1}, s_k) + I) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{n} (Y_1(s_{k-1}, s_k) + I)(Y_2(s_{k-1}, s_k) + I)(Y_1(s_{k-1}, s_k) \boxplus Y_2(s_{k-1}, s_k) + I),$$

$$U(s,t) = I + \int_S^t U(s,\tau) d(Y_1(s,\tau) + Y_2(s,\tau) + Y_1(s,\tau) \boxplus Y_2(s,t)),$$

$$dU(s,t) = U(s,t) d(Y_1(s,t) + Y_2(s,t) + Y_1(s,t) \boxplus Y_2(s,t)).$$

The comparison with the results of Yu. Daletskii, S. Fomin, and others is performed.

Self-intersection local times of compactly perturbed Wiener process

A. A. Dorogovtsev, O. L. Izyumtseva

Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine

adoro@imath.kiev.ua, olaizyumtseva@yahoo.com

In present work we investigate the self-intersection local time and asymptotics of the area of ε -tube for the certain non-Markovian class of Gaussian processes

$$x(t) = (((I + S)1\!\!\mathrm{I}_{[0;t]}, \xi_1), ((I + S)1\!\!\mathrm{I}_{[0;t]}, \xi_2)),\ t \in [0;1].$$

Here ξ_1, ξ_2 are two independent Gaussian white noises in $L_2([0;1])$, I, S are identity and compact operators in $L_2([0;1])$. Denote by $S_{a,b}$ the restriction of S on $L_2([a;b])$. Define the function

$$\varphi(t) = \sup_{b-a \le t} \|S_{a,b}\|.$$

The rate of the convergence $\varphi(t) \to 0$ when $t \to 0$ describes how the increments of x are close to the increments of the Wiener process w. We prove that on the small time intervals x inherits such properties of w as the law of the iterated logarithm, asymptotics of the small deviations, etc. The main aim of the talk is to present and study the renormalization for Fourier–Wiener transform of self-intersection local time for x and its discrete approximations.

1. Dorogovtsev A. A., Izyumtseva O. L. Self-intersection local times for Gaussian processes. — Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011.
2. Dorogovtsev A. A., Izyumtseva O. L. On regularization of the formal Fourier–Wiener transform of the self-intersection local time of a planar Gaussian process. Theory of stochastic Processes, 2011, v. 17(33), no. 1, pp. 28–38.

Noise and circulations in Brownian stochastic flows

A. A. Dorogovtsev, M. B. Vovchansky

Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine

adoro@imath.kiev.ua, vovchansky.m@gmail.com

Let $\{\varphi_{s,t};\, 0 \le s \le t\}$ be a stochastic flow on the real line [1,2]. In the talk we consider perturbation of φ by the smooth external force. Namely, for $a \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ the flow $\{g_{s,t}\,; 0 \le s \le t\}$ generated by the equation $dx(t) = a(x(t))dt$ is introduced. Then the fractional step method [3] is used for g and φ. It is proved that the subsequent application of g and φ on small time intervals leads (in the sence of weak convergence) to the new stochastic flow where each particle has the drift a. The main difference from the fractional step method for the SDE is the possibility of coalescence in the singular stochastic flow [1,2,4]. This leads to the complicated structure of the noise. In particular there is no single Wiener process whose increments describe the structure of approximations in the fractional step method as in case of ordinary SDEs. To make this statement more rigorous we consider for a random continuous function f the following expressions

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\varphi_{t_k,t_{k+1}}(f(t_k)) - f(t_k)\right)$$

and prove that for the Arratia flow such sums tend to the Wiener process if and only if f is the trajectory of the initial flow.

1. Harris, Theodore E. Coalescing and noncoalescing stochastic flows in $\mathbb{R}^1$. Stochastic Process. Appl., 1984, v. 17, no. 2, pp. 187–210.
2. Matsumoto, Hiroyuki. Coalescing stochastic flows on the real line. Osaka J. Math., 1989, v. 26, no. 1, pp. 139–158.
3. Goncharuk, Nataliya Yu.; Kotelenez, Peter. Fractional step method for stochastic evolution equations. Stochastic Process. Appl., 1998, v. 73, no. 1, pp. 1–45.
4. Le Jan, Yves; Raimond, Olivier. Flows, coalescence and noise. Ann. Probab., 2004, v. 32, no. 2, pp. 1247–1315.
5. Dorogovtsev, Andrey A. One Brownian stochastic flow. Theory Stoch. Process., 2004, v. 10(26), no. 3-4, pp. 21–25.
6. Dorogovtsev, A. A. Мерозначные процессы и стохастические потоки [Measure-valued processes and stochastic flows]. Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and its Applications, 66. – Kiev, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2007.

Asymptotic of disordering in the discrete approximation of the Arratia flow

E. V. Glinyanaya
Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine
glinkate@gmail.com

Let $\{\xi_k^n,\ k=0,\ldots,n\}_{n\geq 1}$ be a sequence of series of independent stationary Gaussian processes with a covariance function Γ_n. Consider the recurrence equation:

$$x_0^n(0)=u,\ x_{k+1}^n(u)=x_k^n(u)+\frac{1}{\sqrt{n}}\,\xi_{k+1}^n(x_k^n(u)),$$

Define $x_n(u,\cdot)$ to be the piecewise linear version of $x_k^n(u)$ with the interpolation interval $\frac{1}{n}$. It was proved in [1] that the $m-$point motions of the flow $\{x_n(u,t)\}$ weakly converge to the $m-$point motions of the Arratia flow [2]. One of the main features of the Arratia flow is the ordering of the particles: for $u_1\leq u_2$ $x(u_1,t)\leq x(u_2,t)$. In the approximation scheme this property does not hold. We establish the rate of decreasing to zero of the time which two particles spend in the opposite order. Define $y_n(t)=x_n(u_2,t)-x_n(u_1,t),\ u_1<u_2$ and consider the functional:

$$\Phi_n=\int_0^1 \mathbb{I}_{\{y_n(s)<0\}}ds$$

Theorem. *Suppose that, for every $n\geq 1$, a covariance function Γ_n satisfies conditions of the Theorem about convergence of approximations([1]). Then*

$$\mathbb{P}\{\Phi_n>0\}\leq nF\left(\sqrt{\frac{n}{C_n}}\right),$$

where $C_n=\sup_{\mathbb{R}}\frac{2-2\Gamma_n(x)}{x^2},\quad F(x)=\int_x^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$
If Γ_n *is such that*
1) $\lim_{n\to\infty}\frac{C_n^2e^{C_n}}{n}=0,$
2) $\frac{u}{\sqrt{2-2\Gamma_n(u)}}$ *increases for* $u>0,$
3) there exists K: $\sqrt{2-2\Gamma_n\left(\frac{1}{\sqrt{C_n}}\right)}\geq\frac{1}{K},\ n\geq 1,$
then for any $\varepsilon>0$

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}\{\Phi_n>\varepsilon\}}{F\left(K\ \sqrt{\frac{n}{C_n}}\right)}\geq const>0.$$

Corollary. *Under conditions of the previous theorem, we have:*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{2C_n}{n}\ln\mathbb{P}\{\Phi_n>0\}\leq -1$$

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{2C_n}{n}\ln\mathbb{P}\{\Phi_n>\varepsilon\}\geq -K^2$$

1. I. I. Nishchenko. Discrete time approximation of coalescing stochastic flows on the real line, Theory Stoch. Process. 2011, v. 17, no. 1. pp. 70–78.
2. R. Arratia. Coalescing Brownian motions on the line, Thesis (Ph.D.). — The University of Wisconsin: Madison, 1979, 134 p.

Unbounded solutions of SDE

O. I. Klesov and O. A. Tymoshenko
National Technical University of Ukraine "KPI", Kiev,Ukraine
klesov@matan.kpi.ua, zorot@ukr.com

Consider a stochastic differential equation (SDE) with time dependent drift and diffusion coefficients

$$d\eta(t) = g(\eta(t))\varphi(t)dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)dw(t), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

with $\eta(0) = b$, where w is a standard Wiener process; b is a non-random positive constant; θ and φ are continuous functions, g and σ are positive continuous functions such that equation (1) has a continuous solution η. The exact order of growth of solutions of equation (1) as $t \to \infty$ is investigated in [1-3]. One of the basic assumptions of [1-3] is that

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty \qquad \text{a.s.} \tag{2}$$

Some results for the unboundedness of solutions for one-dimensional autonomous SDE, i.e. in the case of $\varphi \equiv 1$ and $\theta \equiv 1$, can be found in the monograph [4]. It is natural to investigate the conditions under which relation (2) holds for a general case of equation (1).

Below is one of the results we are going to present at the conference.

Theorem. *Let g be a continuous positive function, φ be a continuous function, σ and θ be continuously differentiable positive functions such that equation* (1) *has a continuous solution η. Assume that $\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{dy}{\sigma(y)} = \infty$. If the function*

$$\tilde{g}(t,x) = -\frac{\theta'(t)}{\theta^2(t)} \int_0^x \frac{dy}{\sigma(y)} + \frac{g(x)\varphi(t)}{\sigma(x)\theta(t)} - \frac{1}{2}\sigma'(x)\theta(t)$$

satisfies at least one of the following two conditions

1. $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\sqrt{2T\ln\ln T}} > 1$, *where* $A_T = \int_0^T \inf_{x\in R}(\tilde{g}(t,x))dt$; *or*
2. $\int_{-\infty}^0 e^{-2B_x}dx = +\infty$ *and* $\int_0^\infty e^{-2B_x}dx < +\infty$, *where* $B_x = \int_0^x \inf_{t>0}(\tilde{g}(t,z))dz$,

then relation (2) *holds.*

Some other conditions for (2) can be derived from the general setting in [5].

1. Buldygin V. V., Tymoshenko O. A. On the asymptotic stability of stochastic differential equations. Naukovi Visti NTUU "KPI", 2008, n. 6., pp. 127–132.
2. Buldygin V. V., Tymoshenko O. A. On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients. Theory of Stochastic Processes, 2010, v. 16(32), n. 2, pp. 12–22.
3. Buldygin V. V., Indlekofer K.-H., Klesov O. I., Steinebach J. G. PRV Functions and Generalized Renewal Processes. – K: TBIMC, 2012, 441 p.
4. Gihman I. I., Skorokhod A. V. Stochastic Differential Equations. – Springer, Berlin, 1976.
5. Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G. On the convergence to infinity of positive increasing functions. Ukr. Math. J., 2010, n. 10., pp. 1507–1518.

System of interacting telegraph particles

A. A. Pogorui
Zhytomyr Ivan Franko State University, Zhytomyr, Ukraine
pogor@zu.edu.ua

We construct the system of telegraph processes with interactions, which can be interpreted as a model of ideal gas. In this model, we investigate the free path times of a family of particles before they are collided with any other particle. We also study the distribution of particles, which described by telegraph processes with hard collisions and reflecting boundaries, and investigate its limiting properties. Let $\{\xi(t),\ t \geq 0\}$ be a Markov process on the phase space $\{0,1\}$ with generative matrix

$$Q = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definition. *$S(t)$ is the telegraph process if*

$$\frac{d}{dt} S(t) = v(-1)^{\xi(t)}, \quad v = const > 0,$$
$$S(0) = y_0.$$

For a set of real numbers $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ we consider a family of independent telegraph processes $S_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ with $S_i(0) = y_i$. It is assumed that all the processes have absolute velocity v and parameter of switching process $\lambda > 0$.

Denote by $x(y_i, t)$ the position of the particle i at time t, which starts from site y_i. Suppose that particle $x(y_i, t)$ develops as the telegraph process $S_i(t)$ up to the hard collision with another particle. Under the hard collision of two particles, we mean that at the time of the collision the particles change their direction to the opposite that is, the particles exchange the telegraph processes that describe their movement. It is easily verified that the positions of the particles $x(y_i, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ at time t coincide with the order statistics of $S_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ as follows

$$x(y_1, t) = S_{(1)}(t), x(y_2, t) = S_{(2)}(t), \ldots, x(y_n, t) = S_{(n)}(t).$$

Remark. *It should be noted that each $x(y_i, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ is not a telegraph process for all $t \geq 0$. It follows from the description of $x(y_i, t)$ that $x(y_1, t) \leq x(y_2, t) \leq \cdots \leq x(y_n, t)$ for any $t \geq 0$. Such kind of model for Wiener processes with coalescence after collision are called the Arratia flow and they were studied in* [1]–[2].

We obtain the explicit form for the distribution of the meeting instant of two telegraph processes on the line, which started at the same time from different positions in the line. We also study the limiting distribution of the meeting instant of two telegraph processes on the line under Kac's condition. It allows us to investigate the system of telegraph processes with interactions, which can be interpreted as a model of ideal gas. In this model, we investigate the free path times of a family of particles before they are collided with any other particle. We also study the distribution of particles, which described by telegraph processes with hard collisions and reflecting boundaries, and investigate its limiting properties.

1. Kornfeld P. I., Fomin S. V., Sinai Yakov G. Ergodic Theory (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften). — Springer Verlag, 1982.

2. Dorogovtsev A. A. One Brownian stochastic flow. Theory Stoch. Proc., 2004, v. 10(26), pp. 21-25.

3. Konarovskii V. V. On infinite system of diffusing particles with coalescing. Theory Probab. Appl., 2011, v. 55, no. 1, pp. 134–144.

Renormalization of local time for Levy area of the increments of Brownian motion

A. V. Rudenko

Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine

arooden@gmail.com

Suppose that $W(t), t > 0$ is a 2-dimensional standard Brownian motion. Then we can construct 2-parameter 1-dimensional process

$$B(s,t) = \int_s^t (W_1(u) - W_1(s))W_2(du) - \int_s^t (W_2(u) - W_2(s))W_1(du)$$

which we will call Levy area of the increments of Brownian motion.

For this process we can define local time approximations in a standard way as follows:

$$L_\varepsilon = \int_0^1 \int_0^1 f_\varepsilon(B(s,t))dsdt$$

where $f_\varepsilon(x) = (2\pi\varepsilon)^{1/2}e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$ is an approximation for δ-measure at zero.

Theorem.

L_ε is unbounded in L_2 but $L_\varepsilon - EL_\varepsilon$ is convergent in L_2 as $\varepsilon \to 0+$.

The theorem can be proved using that $(W_1(t) - W_1(s), W_2(t) - W_2(s), \frac{1}{2}B(s,t))$ are the increments of a Brownian motion on a Lie group with the following group operation

$$(x_1, x_2, x_3) \oplus (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_2y_1 - x_1y_2)).$$

It is well-known that any Brownian motion on Lie group can be described as a solution of stochastic differential equation with smooth coefficients and consequently it's density is a fundamental solution of some parabolic partial differential equation. The generator of related semigroup does not satisfy the condition of the uniform ellipticity. However using the general theory of heat kernels on nilpotent Lie group (see [2]) it is possible to obtain estimates for the density and its derivatives, analogous to the classical Gaussian estimates in the case of uniform ellipticity. Then we can use ideas from [1] to prove the theorem.

1. A. Rudenko. Some properties of the Ito-Wiener expansion of the solution of a stochastic differential equation and local times. Stochastic Processes and their Applications, 2012, v. 122, no. 6, pp. 2454–2479.
2. N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon. Analysis and Geometry on Groups. – Cambridge University Press, 1992.

A Study of Stochastic Equations by Reducing Them to Ordinary Differential Equations

O. M. Stanzhytskyi
Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
ostanzh@gmail.com

In this talk we discuss an investigation of the qualitative properties of stochastic differential equations

$$dy = g(t, y)dt + \sigma(t, y)dW(t)$$

by reducing them to ordinary differential equations

$$dx = f(t, x)dt.$$

Namely the stochastic case will be reduced to the deterministic case. This talk is dedicated to investigation of conditions under which such an approach is possible.

At first we explore an asymptotical behavior of solutions of stochastic systems for $t \to \infty$ by studying an asymptotical behavior of solutions of specific deterministic systems. Subsequently we investigate an existence of stable, invariant deterministic manifolds for stochastic systems, which allow to transform the original stochastic system into a deterministic system of ordinary differential equations. That is to investigate a stochastic system by reducing it to deterministic one.

Статистическое моделирование систем со случайной структурой, заданной стохастическими дифференциальными уравнениями

Т. А. Аверина
Институт Вычислительной математики и Математической Геофизики СО РАН,
Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия
ata@osmf.sscc.ru

Современные задачи автоматического управления описываются математическими моделями, заданными различными уравнениями на случайных интервалах времени, т.е. используют модели стохастических систем с внезапной случайной сменой структуры.

Рассмотрим процесс $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$, где $s(t)$ – дискретный случайный процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, S\}$, S – число структур системы, а $\mathbf{y}(t)$ – n-мерный непрерывный случайный процесс, описываемый при условии $s(t) = l$ стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) в форме Стратоновича [1]:

$$d\mathbf{y}(t) = a^l\big(t, \mathbf{y}(t)\big)dt + \sigma^l\big(t, \mathbf{y}(t)\big)d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \tag{1}$$

или в эквивалентной форме Ито

$$d\mathbf{y}(t) = f^l\big(t, \mathbf{y}(t)\big)dt + \sigma^l\big(t, \mathbf{y}(t)\big)d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \tag{2}$$

Здесь $t \in [t_0, T]$; $\mathbf{w}(t)$ – m-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $\mathbf{y}_0$; $a^l(t, \mathbf{y})$, $f^l(t, \mathbf{y}) : [t_0, T] \times \mathrm{R^n} \to \mathrm{R^n}$ – вектор-функции размера n, связанные соотношением

$$f_i^l(t, \mathbf{y}) = a_i^l(t, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{m} \frac{\partial \sigma_{ij_2}^l(t, \mathbf{y})}{\partial y_{j_1}} \sigma_{j_1 j_2}^l(t, \mathbf{y}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$\sigma^l(t,\mathbf{y}) : [t_0,T]\times R^n \to R^{n\times m}$ – матричная функция размера $n\times m$; l – номер структуры, $l=1,2,\ldots,S$.

Вероятность перехода дискретного случайного процесса $s(t)$ удовлетворяет условию

$$P\big(s(t+\Delta t)=r \mid s(t)=l,\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{y}\big)=\nu_{lr}(t,\mathbf{y})\Delta t+o(\Delta t),$$

$$P\big(s(t+\Delta t)=l \mid s(t)=l,\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{y}\big)=1-\nu_{ll}(t,\mathbf{y})\Delta t+o(\Delta t),$$
$$s(t_0)=s_0,\quad l,r=1,2,\ldots,S,\quad l\neq r,$$

где функция $\nu_{lr}(t,\mathbf{y}) : [t_0,T]\times R^n\to[0,+\infty)$ называется *интенсивностью перехода*, причем $\nu_{ll}(t,\mathbf{y})=\sum_{r=1\neq l}^{S}\nu_{lr}(t,\mathbf{y})$.

В данной работе предложен эффективный алгоритм статистического моделирования систем со случайной структурой (1) и (2) с использованием модифицированного метода “максимального сечения” [2]. Модификация метода состоит в уменьшении числа обращений к генератору псевдослучайных чисел, что значительно уменьшает трудоемкость вычислительного алгоритма. На тестовых примерах показана эффективность построенного алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты № 11-01-00282, № 12-01-00490).

1. Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А. Анализ систем случайной структуры. – М.: Физматлит, 1993.
2. Аверина Т. А. Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей. Ж.вычисл. матем. и матем. физ., 2010, т. 50, с. 16–23.

Об исследовании стохастической устойчивости интегрального многообразия методом функций Ляпунова

Г. К. Василина, М. И. Тлеубергенов
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
v_gulmira@mail.ru, marat207@mail.ru

Методом функций Ляпунова получены достаточные условия стохастической устойчивости по первому приближению аналитически заданного интегрального многообразия дифференциальных уравнений при наличии случайных возмущений из класса процессов с независимыми приращениями.

Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=X(x,t)+\sigma(x,t)\dot{\zeta}, \tag{1}$$

где $\zeta(t)$ — процесс с независимыми приращениями, допускающее интегральное многообразие в виде совокупности частных интегралов $\Lambda(t)$ в фазовом пространстве $x\in R^n$

$$\Lambda(t):\lambda(x,t)=0,\quad \lambda(x,t)\in C^{21}_{xt},\ \lambda\in R^r,\ r\le n. \tag{2}$$

Уравнение возмущенного движения относительно Λ с учетом формулы стохастического дифференцирования Ито [1] имеет вид

$$d\lambda=A(x,t)dt+B(x,t)d\zeta, \tag{3}$$

где $A(x,t)=\{\frac{\partial\lambda_\mu}{\partial t}+\left(\frac{\partial\lambda_\mu}{\partial x_i}\right)^T X_i+\frac{1}{2}tr[\frac{\partial^2\lambda_\mu}{\partial x_i\partial x_j}\sigma_{ik}\sigma_{jk}^T]+\int_{\mathbb{R}^n}[\lambda_\mu(x+\sigma_{ik}c_k(x),t)-\lambda_\mu(x,t)-$
$-\left(\frac{\partial\lambda_\mu}{\partial x_i}\right)^T\sigma_{ik}c_k(x)]dx\}dt; B(x,t)=\left(\frac{\partial\lambda_\mu}{\partial x_i}\right)^T\sigma_{ik}dw_k+\int_{\mathbb{R}^n}[\lambda_\mu(x+\sigma_{ik}c_k(x),t)-\lambda_\mu(x,t)]dP(t,dx).$

Предположим далее, что вектор-функции $X(x,t)$, $\lambda(x,t)$ и матрица $\eta(x,t)$ такие, что уравнение возмущенного движения (3) относительно $\Lambda(t)$ (2) представляется в виде

$$d\lambda_i=[A_{i\nu}^{(1)}(x,t)\lambda_\nu+A_i^{(2)}(\lambda,x,t)]dt+[B_{ij\mu}^{(1)}(x,t)\lambda_\mu+B_{ij}^{(2)}(\lambda,x,t)]d\zeta^j, \tag{4}$$

причем $\sup\{||A_2||,\,||B_2||\}=o(||\lambda||)$, т.е. при $||\lambda||\to 0$, $\frac{\sup\{||A_2||,\,||B_2||\}}{||\lambda||}\rightrightarrows 0.$ (5)

Устойчивость по I-му приближению: 1) $x\equiv 0$ уравнения (1) исследована в [2], 2) интегрального многообразия $\Lambda(t)$ уравнения (1), но со случайными возмущениями из класса винеровских процессов рассмотрена в [3]. Справедлива

Теорема. *Пусть заданные вектор-функция $X(x,t)$, матрица-функция $\sigma(x,t)$ исходного уравнения* (1) *и вектор-функция $\lambda(x,t)$ такие, что выполняются условия: 1) уравнение возмущенного движения* (3) *относительно $\Lambda(t)$ допускает представление* (4)*; 2) существует непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова $V(\lambda;x,t)$, удовлетворяющая условиям $V(\lambda;x,t)\geq a(||\lambda||), |V(\lambda;x,t)|\leq b(||\lambda||), \widetilde{L}V(\lambda;x,t)\leq -c(||\lambda||)$, $a,b,c\in K$, где $\widetilde{L}V$ — производящий дифференциальный оператор; 3) $a(r)\to\infty$ при $t\to\infty$; 4) вектор-функция $\lambda(x,t)$ удовлетворяет неравенству $||\lambda(x,t)||\geq\alpha(\rho)$, $\alpha\in K$. Тогда интегральное многообразие* (2) *уравнения* (1) *асимптотически ρ-устойчиво по вероятности при любых $A_2(\lambda;x,t)$, $B_2(\lambda;x,t)$, удовлетворяющих условию* (5).

1. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М., 1990.
2. Гихман И. И., Дороговцев А. Я. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений. Укр. матем. журнал, 1965, Т. 17, № 6, С. 3–21.
3. Тлеубергенов М. И. Метод функций Ляпунова в задаче стохастической устойчивости программного движения. Математический журнал, 2001, Т. 1, № 2, С. 98–106.

Математична модель системи важких дифузійних частинок зі зносом

В. В. Конаровський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

konarovskiy@gmail.com

Побудовано систему процесів, яка описує сумісний рух дифузійних частинок зі взаємодією на дійсній прямій. Частинки стартують із зліченної множини точок прямої, рухаються незалежно до моменту зустрічі, а потім склеюються. Кожна частинка має масу, що при склеюванні сумується (маса нової частинки рівна сумі мас частинок, з яких вона утворилась) і впливає на її рух наступним чином: траєкторія $\zeta(t)$, $t\geq 0$, частинки задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$d\zeta(t)=\frac{a(\zeta(t))}{m(t)}dt+\frac{\sigma(\zeta(t))}{\sqrt{m(t)}}dw(t),$$

де $m(t)$ — маса частинки в момент часу t та $w(t)$, $t\geq 0$, — деякий вінерівський процес.

Має місце наступна теорема.

Теорема. *Нехай* a, σ *— обмежені ліпшецеві функції на* $\mathbb{R}$, $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \sigma(x) > 0$. *Тоді для довільної неспадної послідовності дійсних чисел* $\{x_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$ *та послідовності строго додатніх чисел* $\{b_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$, *таких, що*

$$\overline{\lim_{n\to\pm\infty}}\{(x_{n+1} - x_n) \wedge b_{n+1} \wedge b_n\} > 0,$$

існує система процесів $\zeta_i(t),\ t \geq 0,\ i \in \mathbb{Z}$, *така, що*

1°) $\mathfrak{M}_i = \zeta_i(\cdot) - \int\limits_0^{\cdot} \frac{a(\zeta_i(s))}{m_i(s)} ds$ *— неперервний квадратично інтегровний мартингал відносно фільтрації*

$$\mathcal{F}_t^{\zeta} = \sigma(\zeta_i(s),\ s \leq t,\ i \in \mathbb{Z}),$$

де $m_i(t) = \sum\limits_{j\in A_i(t)} b_j$, $A_i(t) = \{j :\ \exists s \leq t\ \zeta_j(s) = \zeta_i(s)\}$;

2°) $\zeta_i(0) = x_i$, $i \in \mathbb{Z}$;

3°) $\zeta_i(t) \leq \zeta_j(t)$, $i < j$, $t \geq 0$;

4°) $\langle \mathfrak{M}_i \rangle_t = \int\limits_0^t \frac{\sigma^2(\zeta_i(s))}{m_i(s)} ds$, $t \geq 0$;

5°) $\langle \mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_j \rangle_t \mathbb{I}_{\{t<\tau_{i,j}\}} = 0$, $t \geq 0$, *де* $\tau_{i,j} = \inf\{t : \zeta_i(t) = \zeta_j(t)\}$.

Умови 1°)-5°) *однозначно визначають розподіл ймовірностей у просторі* $(C_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}}, \mathcal{B}(C_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}}))$.

Також показано, що система процесів $\{\zeta_i(t),\ t \geq 0,\ i \in \mathbb{Z}\}$ є строго марковською.

1. Dorogovtsev A. A. One Brownian stochastic flow. Theory of Stochastic Processes, 2004, 10(26), no. 3–4, pp. 21–25.
2. Le Jan Y., Raimond O. Flows, coalescence and noise. Ann. Probab., 2004, 32, no. 2, pp. 1247–1315.
3. Конаровский В. В. О бесконечной системе диффундирующих частиц со склеиванием. Теория вероятностей и ее применения, 2010, 55, № 1, С. 157–167.
4. Конаровський В. В. Система дифузійних частинок із склеюванням змінної маси. Укр. мат. журн., 2010, 62, №1, С. 90–103.
5. Konarovskii V. V. The martingale problem for a measure-valued process with heavy diffusion particles. Theory of stochastic processes, 2011, 17, no. 1, pp. 50–60.

Асимптотична поведінка функціоналів інтегрального типу від нестійких розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь

Г. Л. Кулініч, С. В. Кушніренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
bksv@univ.kiev.ua

Нехай $\xi(t)$ – розв'язок неоднорідного стохастичного диференціального рівняння Іто

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\, dt + dw(t),\ t > 0,\ \ \xi(0) = x_0,$$

де $a(t,x)$ — дійсна вимірна функція, $t \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^1$.

Теорема. *Якщо існує локально інтегровна функція* $\hat{a}(x)$ *така, що*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \int\limits_0^t \sup_x |a(s,x) - \hat{a}(x)|\, ds = 0,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x v\hat{a}(v)\, dv = c_0, \qquad 2c_0 + 1 > 0,\ \ |x\hat{a}(x)| \leq C;$$

а для локально інтегровної функції $g(x)$ *існує локально інтегровна функція* $\psi(|x|) > 0$, *що є регулярно змінною на безмежності порядку* $\alpha \geq 0$ *(при* $\alpha = 0$ *вона монотонно зростаюча) і така, що має місце збіжність*

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x q^2(u)\, du = 0, \quad q(x) = \frac{f(x)}{\psi(|x|)} \int\limits_0^x \frac{g(u)}{f(u)}\, du - \bar{b}(x),$$

$$\bar{b}(x) = \begin{cases} b, & x > 0, \\ -b, & x < 0, \end{cases} \qquad f(x) = \exp\left\{ -2 \int\limits_0^x \hat{a}(u)\, du \right\},$$

тоді випадковий процес

$$\beta_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}\psi(\sqrt{T})} \int\limits_0^{tT} g(\xi(s))\, ds$$

слабко збігається при $T \to \infty$ *до процесу*

$$\beta(t) = 2b \left[\frac{r^{\alpha+1}(t)}{\alpha + 1} - \int\limits_0^t r^{\alpha}(s)\, d\hat{w}(s) \right],$$

де $r(t)$ *– розв'язок рівняння* $r^2(t) = (2c_0 + 1)t + 2 \int\limits_0^t r(s)\, d\hat{w}(s)$.

Аналогічний результат для однорідних стохастичних диференціальних рівнянь цього класу, коли $q(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, було отримано у роботі [1].

1. Каськун Є. П. Про асимптотику функціоналів інтегрального типу від дифузійних процесів. Вісник Київського університету. Серія: математика, механіка. – 1998. – № 1. – С. 16–24.

Интегралы Концевича для стохастических потоков

В. А. Кузнецов

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина

vasylkuz@mail.ru

В связи с изучением топологических свойств стохастических потоков возникает задача описания совокупностей траекторий случайных процессов как случайных кос. Коса — это неперерывная траектория в топологическом пространстве $\mathbb{C}^n \setminus \{\exists i, j : z_i = z_j\}$. Косы различаются с точностью до гомотопии, сохраняющей начальные и конечные точки. Для кос известна система полная система инвариантов — инварианты Васильева [1]. Для этих инвариантов существует интегральное представление, данное М. Л. Концевичем.

Интегралом Концевича порядка m для гладкой косы $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t))$ называется [1] следующий элемент пространства диаграмм порядка m:

$$K_m = \sum_{P \in \mathbb{P}_{mn}} \int_{\Delta_m} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1) \dots \omega_{P_{m1}P_{m2}}(t_m) D(P), \tag{1}$$

где $\Delta_m = \Delta_m(T) = \{(t_1, \dots, t_m) \mid 0 \le t_1 \le \dots \le t_m \le T\}$, $\omega_{ij}(t) = \omega_{ji}(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dZ_i(t) - dZ_j(t)}{Z_i(t) - Z_j(t)}$,

$D(P)$—диаграмма, соответствующая матрице $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \\ \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}_{mn}$ — множество всех матриц такого вида, для которых при всех $i = 1, \dots, m$: $\quad P_{i1}, P_{i2} \in \{1, \dots, n\}, P_{i1} \ne P_{i2}$.

Интегральные инварианты Концевича можно определить не только для гладких, а и для неперерывных кос. Это позволяет поставить вопрос о нахождении явного представления для этих инвариантов в случае, когда расматриваемые траектории являются непрерывными семимартингалами относительно общей фильтрации. Ответ на этот вопрос даётся следующей теоремой.

Теорема. *Для непрерывных семимартингалов* $Z_i(t), t \in [0, T], i = 0 \dots k$ *относительно общей фильтрации* $(F_t), t \in [0, T]$, *таких, что с вероятностью* 1 $\forall t \in T \quad \forall i \ne j$ $Z_i(t) \ne Z_j(t)$, *интегральные инварианты Концевича вычисляются как соответствующие кратные интегралы Стратоновича.*

Представляет интерес асимптотика указанных инвариантов для траекторий частиц в стохастических потоках. Заметим, что действительные части интегралов Концевича порядка $m = 1$ пропорциональны углам обхода отдельных нитей косы друг вокруг друга. В связи с этим, упомянем следующий результат [2].

Теорема. *Пусть* $W_i(t), t \in [0, \infty), i = 0 \dots n$ *— независимые двумерные винеровские процессы, начинающиеся из различных точек плоскости. Для углов обхода* $\phi_{ij}(t)$ *разностей* $W_i - W_j$ *вокруг нуля имеет место следующая сходимость по распределению:* $(\frac{2}{\ln t}\phi_{ij}(t), 1 \le i < j \le n) \xrightarrow[t \to \infty]{d} (C_{ij}, 1 \le i < j \le n)$, *где* $C_{ij}, 1 \le i < j \le n$*—независимые случайные величины, имеющие распределение Коши.*

Применение мартингальных методов, использованных в [2], позволяет обобщить этот результат на случай броуновских потоков с равным нулю максимальным показателем Ляпунова.

1. Mitchell A Berger. Topological invariants in braid theory. Letters in Mathematical Physics, 2001, 55–3, pp. 181–192.
2. Marc Yor. Etude asymptotique des nombres de tours de plusieurs mouvements browniens complexes correles. Progress in Probability, 1991, 28, pp. 441–455.

Ортогональные разложения и преобразования гауссовских мер

Г. В. Рябов
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
ryabov.george@gmail.com

Пусть $\mathcal{X}$ — вещественное сепарабельное банахово пространство, μ — центрированная гауссовская мера на борелевской $\sigma-$алгебре подмножеств $\mathcal{X}$, $\mathcal{H}$ — пространство Камерона-Мартина меры μ. Тогда пространство $L^2(\mathcal{X},\mu)$ допускает "хаотическое" разложение в прямую сумму попарно ортогональных подпространств

$$L^2(\mathcal{X},\mu) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n(\mathcal{X},\mu), \tag{1}$$

причем пространство $\mathcal{K}_n(\mathcal{X},\mu)$ является образом пространства $\mathcal{L}^{(n)}_{HS}(\mathcal{H})$ всех $n-$линейных симметричных форм Гильберта-Шмидта на $\mathcal{H}$ при изоморфном вложении I^{μ}_n [1].

В первой части данной работы изучаются ортогональные разложения типа (1) для пространств $L^2(\mathcal{X},\nu)$, в случае, когда мера ν является образом меры μ при отображении специального вида.

Теорема 1. *Пусть ν — борелевская вероятностная мера на $\mathcal{X}$, $\nu \ll \mu$. Предположим, что существуют борелевское множество $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ и отображение $T : \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $\nu(\mathcal{X}_0) = 1$; 2) T измеримо и инъективно; 3) $T(x) - x \in \mathcal{H}$ при всех $x \in \mathcal{X}_0$; 4) $\nu \circ T^{-1} = \mu$. Определим отображение $I^{\nu}_n : \mathcal{L}^{(n)}_{HS}(\mathcal{H}) \to$ $\to L^2(\mathcal{X},\nu)$*

$$I^{\nu}_n A_n(x) = \sum_{m=0}^{n} C^m_n I^{\mu}_{n-m} A_n(x) \underbrace{(T(x)-x,\ldots,T(x)-x)}_{m}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения: 1) I^{ν}_n — изоморфное вложение; 2) пространства $\mathcal{K}_n(\mathcal{X},\nu) = I^{\nu}_n(\mathcal{L}^{(n)}_{HS}(\mathcal{H}))$ попарно ортогональны; 3) $L^2(\mathcal{X},\nu) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n(\mathcal{X},\nu)$.

Во второй части работы построено ортогональное разложение пространства $L^2(\mathcal{X},\nu)$, в случае, когда $\mathcal{X} = C_0([0,1])$ — пространство непрерывных функций, μ — винеровская мера, мера ν является образом меры μ при отображении типа склейки.

Пусть $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $g(0) > 0$, $\tau(x) \in (0,1]$ — момент первого касания траектории $x \in \mathcal{X}$ и функции g, $F_g(x)(t) = x(t)\mathbf{1}_{t\le\tau(x)} + g(t)\mathbf{1}_{t>\tau(x)}$ — отображение склейки. Обозначим $\alpha_g(s,y;r)$ вероятность того, что винеровский процесс, стартующий в момент времени s из точки y, до момента r не коснулся функции g, $0 \le s \le r \le 1$, $y < g(s)$. Обозначим μ_r винеровскую меру на $C_0([0,r])$.

Теорема 2. *Пусть $\nu_g = \mu \circ F^{-1}_g$ — образ винеровской меры при отображении F_g. Определим отображение $I^{\nu_g}_n : L^2_{symm}([0,1]^n) \to L^2(\mathcal{X},\nu_g)$*

$$I^{\nu_g}_n a_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C^m_{n-1} \int_0^{\tau(x)} \int_{[0,r]^m} I^{\mu_r}_{n-1-m} a_n(\cdot,s,r)(x) \prod_{i=1}^{m} \frac{\partial \ln \alpha_g}{\partial y}(s_i, x(s_i); r) ds dw_r(x).$$

Тогда справедливы следующие утверждения: 1) $I^{\nu_g}_n$ — изоморфное вложение; 2) пространства $\mathcal{K}_n(\mathcal{X},\nu_g) = I^{\nu_g}_n(L^2_{symm}([0,1]^n))$ попарно ортогональны; 3) $L^2(\mathcal{X},\nu_g) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n(\mathcal{X},\nu_g)$.

1. Nualart D. The Malliavin calculus and related topics. – Berlin: Springer-Verlag, 2006.

Оцінки для розподілу супремуму розв'язку рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною

Г. І. Сливка-Тилищак

Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ, Україна

aslyvka@tn.uz.ua

Розглянемо неоднорідне рівняння теплопровідності, яке задане на прямій [1]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \xi(x,t),\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0,\ u(x,0) = 0.$$

Нехай $\xi(x,t) = \{\xi(x,t),\ \ x \in R,\ t > 0\}$ — вибірково-неперервне випадкове поле з простору $L_p(\Omega)$, таке що $E\xi(x,t) = 0$, $E(\xi(x,t))^2 < +\infty$. Розв'язок задачі можна записати у вигляді

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos yx G(y,t) dy,\ G(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \tilde{\xi}(y,\tau) d\tau.$$

Теорема. *Нехай* $u(x,t) = (u(x,t) :\ (x,t) \in D)$, $D = [-A, A] \times [0,T]$, $-\infty < A < +\infty$, $T > 0$ *– сепарабельний випадковий процес з простору* $L_p(\Omega)$. *Нехай існує така функція* $\sigma(h)$, *що* $\sigma(h)$ *– неперервна, монотонно зростає,* $\sigma(0) = 0$ *та*

$$\sup_{\substack{|x-y|\le h \\ |t-s|\le h}} \left(E\left|u(x,t) - u(y,s)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \sigma_k(h).$$

Нехай для деякого $0 < \varepsilon < \max\{b-a, T\}$ *збігається інтеграл* $\int\limits_0^\varepsilon \left(\sigma^{(-1)}(u)\right)^{-\frac{1}{p}} du$. *Тоді для випадкової величини* $\sup\limits_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \in L_p(\Omega)$ *має місце нерівність*

$$\left\| \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \right\|_p = \left(E \left(\sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \left(E\left|u(x_0,t_0)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\beta_p}{\theta(1-\theta)} \cdot \int\limits_0^{\omega_0 \theta} \left(\sigma^{(-1)}(u)\right)^{-\frac{1}{p}} du = \widetilde{B}_p(x_0,t_0),$$

де (x_0,t_0) *будь-яка точка з* D; $0 < \theta < 1$; $\omega_0 = \sigma\left(\sup\limits_{(x,t)\in D} \{|x-x_0|, |t-t_0|\}\right)$, $\beta_p = \left[\left(A + \sup\limits_{(x,t)\in D} \{|x-x_0|, |t-t_0|\}\right) \cdot \left(\frac{T}{2} + \sup\limits_{(x,t)\in D} \{|x-x_0|, |t-t_0|\}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$.

Крім того, для довільного $\varepsilon > 0$

$$P\left\{ \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| > \varepsilon \right\} \le \frac{[\widetilde{B}_p(x_0,t_0)]^p}{\varepsilon^p}$$

і випадковий процес $u(x,t)$ *неперервний з імовірністю одиниця.*

1. Б. М. Маркович. Рівняння математичної фізики. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2010. – 384 с.

О построении множества управлений в стохастической обратной задаче

М. И. Тлеубергенов

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

marat207@mail.ru

Рассматривается задача восстановления в классе стохастических дифференциальных уравнений типа Ито по заданным свойствам движения, которые зависят лишь от части переменных. Определяется множество управлений, обеспечивающих необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В работе [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ [2,3 и др.]. В работах [4-6] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,t), \quad x \in R^n, \\ \dot{y} = g(x,y,z,t), \quad y \in R^p, \\ \dot{z} = h(x,y,z,t) + D(x,y,z,\ t)u + \sigma(x,y,z,t)\dot{\xi}, \quad z \in R^l,\ u \in R^r,\ \xi \in R^k. \end{cases} \tag{1}$$

Требуется определить множество управлений $\{u = u(x,y,z,t)\}$ и множество матриц диффузии $\{\sigma(x,y,z,t)\}$ по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t) : \begin{cases} \lambda_1(x,t) = 0, \quad \lambda_1 \in R^{m_1}, \quad \lambda_1 \in C^{33}_{xt}, \\ \lambda_2(x,y,t) = 0, \quad \lambda_2 \in R^{m_2},\ m_1 + m_2 = m, \quad \lambda_2 \in C^{222}_{xyt}. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\{\xi_1(t,\omega), ..., \xi_k(t,\omega)\}$ −система независимых винеровских процессов. Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma \equiv 0$) достаточно полно исследована в [3, с. 27], а стохастический случай задачи восстановления с исходным уравнением Ито второго порядка $\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)u + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi}$ и заданным множеством вида $\Lambda(t) : \lambda(x,\dot{x},t) = 0,\ \lambda \in R^m$ — в [6]. В предположении $f \in C^{222}_{xyt},\ g \in C^{1121}_{xyzt}$ с использованием обозначений из [3,6] доказывается

Теорема. *Для того чтобы система уравнений* (1) *имела заданное интегральное многообразие* (2) *необходимо и достаточно, чтобы множество управлений* $\{u\}$ *имело вид* $\{u\} = \{\tilde{u}\} \bigcap \{\tilde{\tilde{u}}\}$, *а множество матриц диффузий – вид* $\{\sigma\} = \{\tilde{\sigma}\} \bigcap \{\tilde{\tilde{\sigma}}\}$, *где* $\tilde{u} = s_1[H_1C_1] + (H_1)^+(A_1 - G_1)$, $\tilde{\tilde{u}} = s_2[H_2C_2] + (H_2)^+(A_2 - G_2)$, *а столбцы матриц* $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tilde{\sigma}}$ *имеют соответственно вид* $\tilde{\sigma}_i = s_3[H_3C_1] + (H_3)^+B_{1i}$, $\tilde{\tilde{\sigma}}_i = s_4[H_4C_4] + (H_4)^+B_{2i}$, $i = \overline{1,k}$.

1. Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую //ПММ. М., 1952. Т.10. В.6. С. 659–670.
2. Галиуллин А. С. Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986.
3. Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. Уравнения программных движений. – М.: Изд-во РУДН, 1986.
4. Тлеубергенов М. И. Об обратной стохастической задаче динамики //Вестник Российского университета дружбы народов. Серия “Прикладная математика и информатика”. М., 1999. № 1. С. 48–51.
5. Тлеубергенов М. И. Об обратной стохастической задаче замыкания //Доклады МН-АН РК. Алматы. 1999. № 1. С. 53–60.
6. Тлеубергенов М. И. Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем //Дифференциальные уравнения. М., 2001. Т.37. № 5. С. 714–716.

Адитивні функціонали, пов'язані з потоком Арратья

П. П. Чернега

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

pasha_ch@i.ua

Важливим функціоналами, пов'язаними з одновимірним вінерівським процесом, є локальний час в точці та число перетинів смужки. В доповіді розглядається *сумарне число перетинів зверху вниз* фіксованої смужки траєкторіями континуальної системи частинок потоку Арратья. Доводиться збіжність добутку ширини смужки на *сумарне число перетинів зверху вниз* смужки до *сумарного локального часу* для потоку Арратья. Цей результат є узагальненням відомої теореми Леві про число перетинів зверху вниз смужки для одновимірного вінерівського процесу.

Теорема 1. *З ймовірністю одиниця існує границя:*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^{t\wedge\tau(u_k^m)}\delta_0(x(u_k^m,r))dr =: \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^{t\wedge\tau(u)}\delta_0(x(u,r))dr,$$

де $u_k^m=\frac{k}{2^m}$, $k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}$; $x(\cdot,\cdot)$ *— потік Арратья;* $\tau(u_k^m)=\inf\{x(u_k^m,t)=x(u_{k-1}^m,t)\}\wedge 1$; $\int\limits_0^t\delta_0(x(u_k^m,r))dr$ *— локальний час, проведений в точці нуль процесом* $x(u_k^m,\cdot)$ *на проміжку часу* $[0;t]$.

Позначимо через $\widetilde{\nu}_{[s;t]}^{u_k^m}$ число перетинів смужки $[0;\delta]$ процесом $x(u_k^m,\cdot)$ на проміжку часу $[s;t]$, $0\le s\le t$.

Теорема 2. *Для кожного числа* $m\in\mathbb{N}$ *справедливе наступне співвідношення:*

$$\lim_{\delta\searrow 0+}\delta\nu_{m,[s;t]}^{Arr}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\limits_s^{t\wedge\tau(u_k^m)}\delta_0(x(u_k^m,r))dr,$$

де $\nu_{m,[s;t]}^{Arr}=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\nu}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]}^{u_k^m}$.

Теорема 3. *Нехай* $0<s\le t$. *З ймовірністю одиниця існує границя:*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\nu}_{[s;t\wedge\tau(u_k^m)]}^{u_k^m}:=\nu_{[s;t]}^{Arr}.$$

Випадкова величина $\nu_{[s;t]}^{Arr}$ *з ймовірністю одиниця є скінченною.*

Теорема 4. *Має місце наступне граничне співвідношення:*

$$\lim_{\delta\searrow 0+}\delta\nu_{[s;t]}^{Arr}=\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_s^{t\wedge\tau(u)}\delta_0(x(u,r))dr$$

Використано результати робіт [1-5].

1. А. А. Дороговцев. Мерозначные процессы и стохастические потоки. – Киев.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 289 с.
2. Y. Kasahara. On Levy′s Downcrossing Theorem. Proc. Japan Acad, 56, Ser. A, 1980.
3. K. Ito, H. McKean. Diffusion processes and their sample paths. Springer-Verlag, Berlin· Heidelberg· New York. – 1965 – 321 p.
4. П. П. Чернега. Локальное время в нуле для потока Арратья. УМЖ, 2012, т.64, №4, с.542-557.
5. R. Arratia, Coalescing Brownian motions on the line, Ph.D. thesis, University of Wisconsis, Madison (1979).

Controlled Set Theory

G. CUVALCIOGLU
Mersin University, Mersin, Turkey
gcuvalcioglu@mersin.edu.tr

In this work, we introduced a new set theory which is called Controlled Set Theory. We show that this sets have fundamental properties of Mathematics, like as, Boole, Moore Family property, Closure Operator so that Algebraic Properties, e.t.c

1. Atanassov K.T., Intuitionistic Fuzzy Sets, VII ITKR's Session, Sofia, June (1983).
2. Birkhoff G., Lattice Theory, American Mathematical Society, United States of America, 418 p., (1940).
3. Cohn P. M., Universal Algebra, D. Reidel Publishing Company, Holland, 412 p., (1981).
4. Jeng J. T., Axiomatic Set Theory, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 222 p., (1974).
5. Zadeh, L. A. Fuzzy Sets, Information and Control, 8: 338-353, (1965)

Інститут математики НАН України

Міжнародна математична конференція

«Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування»

з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка

23 – 30 червня 2013 р.
Севастополь, УКРАЇНА

Тези доповідей

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

International mathematical conference

«Bogolyubov readings DIF-2013. Differential equations, theory of functions and their applications»

on the occasion of the 75th anniversary of academician A. M. Samoilenko

June 23 – 30, 2013
Sevastopol, UKRAINE

ABSTRACTS

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макета
А. О. Браточкіна, І. А. Головацька, А. В. Дворник, О. В. Руденко, О. М. Тимоха, В. А. Ферук, С. Я. Янченко

Підп. до друку 10.06.2013. Формат 60x90/16. Папір офс. Офс. друк. Обл. вид. арк. 21,5. Ум. друк. арк. 30,1. Зам. 58. Тираж 300 пр.

Ін-т математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3